Università di Roma "La Sapienza"

Controlli Automatici II modulo

Teoria della stabilità

Prof. Giuseppe Oriolo
DIS, Università di Roma "La Sapienza"

Introduzione

consideriamo un generico sistema dinamico **non lineare** tempo-invariante

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) \\ y &= g(x) \end{aligned}$$

con stato $x \in \mathbb{R}^n$, ingresso $u \in \mathbb{R}^p$, uscita $y \in \mathbb{R}^q$

problema tipico

calcolare, dati $x_0 = x(0)$ e $u_{[0,t]}$, lo stato $x(t)$ e l'uscita $y(t)$ per valori di $t > 0$

es: nei sistemi lineari, dove $f(x,u) = Ax + Bu$, si ha

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

tuttavia

spesso non si ha interesse a stabilire esplicitamente la soluzione, ma piuttosto a determinarne alcune proprietà come **limitatezza**, **comportamento asintotico**, ...

$\Longrightarrow$ teoria **qualitativa** delle equazioni differenziali (Poincaré 1880, Lyapunov 1892, La Salle e Lefschetz 1947...)

idea di base

valutare il comportamento qualitativo del sistema in corrispondenza a **perturbazioni** dello stato iniziale e dell'ingresso del sistema rispetto a valori nominali

indicata con $x(t)$ l'evoluzione dello stato in corrispondenza a x_0 e $u_{[0,t]}$, ci si chiede:

- cosa succede se $x_0 \to x_0 + \Delta x_0$?
- cosa succede se $u(t) \to u(t) + \Delta u(t)$?

in particolare:

- quanto è **prossima** l'evoluzione perturbata a quella nominale?
- sotto quali condizioni le due soluzioni tendono a **coincidere** per $t \to \infty$?

qualitativamente, appare naturale chiamare

- **stabile** un sistema nel quale piccole perturbazioni danno luogo a piccoli scostamenti
- **instabile** un sistema nel quale piccole perturbazioni danno luogo ad ampi scostamenti

teoria della stabilità

definizioni

proprietà di stabilità (diversi tipi in relazione al comportamento del sistema e alle esigenze applicative) e di instabilità

condizioni

che un sistema deve soddisfare per godere dell'una o dell'altra di queste proprietà

criteri

per verificare la sussistenza o meno delle condizioni senza calcolare esplicitamente la soluzione perturbata del sistema

es: nei sistemi lineari

- definizione di stabilità, stabilità asintotica, instabilità
- condizione di stabilità asintotica: $\lim_{t\to\infty} x(t)|_{u\equiv 0} = \lim_{t\to\infty} e^{At}x_0 = 0$
- criteri di stabilità asintotica: $\sigma(A) \in \mathbb{C}^-$, criterio di Routh, oppure criterio di Nyquist per sistemi retroazionati

generalmente si considera il comportamento di sistemi **in evoluzione libera**

$$\boxed{\dot{x} = f(x)}$$

rispetto a perturbazioni dello stato iniziale x_0

infatti:

- scelta una legge di controllo in retroazione $u = h(x)$, la dinamica **ad anello chiuso** diventa

  $$\dot{x} = f(x, h(x)) = f'(x)$$

  cioè appunto un (nuovo) sistema in evoluzione libera

- anche ad anello aperto, se la perturbazione sull'ingresso è **non persistente**

  $$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) + \delta(t) & t \in [0, t_1] \\ u(t) & t > t_1 \end{cases}$$

  il problema si riconduce allo studio dell'effetto di una perturbazione (e cioè $x(t_1)$) sullo stato iniziale

Definizioni

un importante concetto preliminare: punto di equilibrio

uno stato $x_e \in \mathbb{R}^n$ è un **punto di equilibrio** (**pde**) per il sistema $\dot{x} = f(x)$ se, posto $x_0 = x_e$, si ha $x(t) \equiv x_e$, $\forall t > 0$

nota: si tratta di una traiettoria **degenere** del sistema

matematicamente:

$$\boxed{x_e \quad \text{è un } \textbf{pde} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x_e) = 0}$$

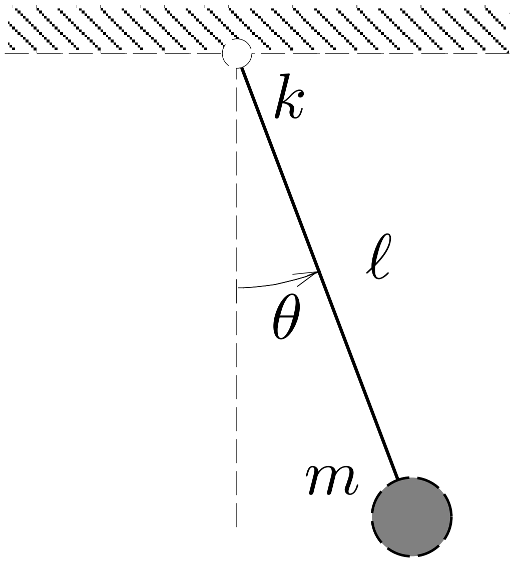
i pde sono perciò gli **zeri** della funzione vettoriale $f(x)$

es: nei sistemi lineari $\dot{x} = Ax$, i pde sono i punti x_e tali che

$$Ax_e = 0, \qquad \text{cioè} \quad x_e \in \mathcal{N}(A)$$

- se A è non singolare, l'**unico** pde è l'origine
- se A è singolare, i pde sono **infiniti** e **contigui**: geometricamente, sono iperpiani passanti per l'origine (rette se $\dim(\mathcal{N}(A)) = 1$, piani se $\dim(\mathcal{N}(A)) = 2$, ...)

es: pendolo di lunghezza ℓ e massa m in presenza di attrito viscoso di coefficiente k



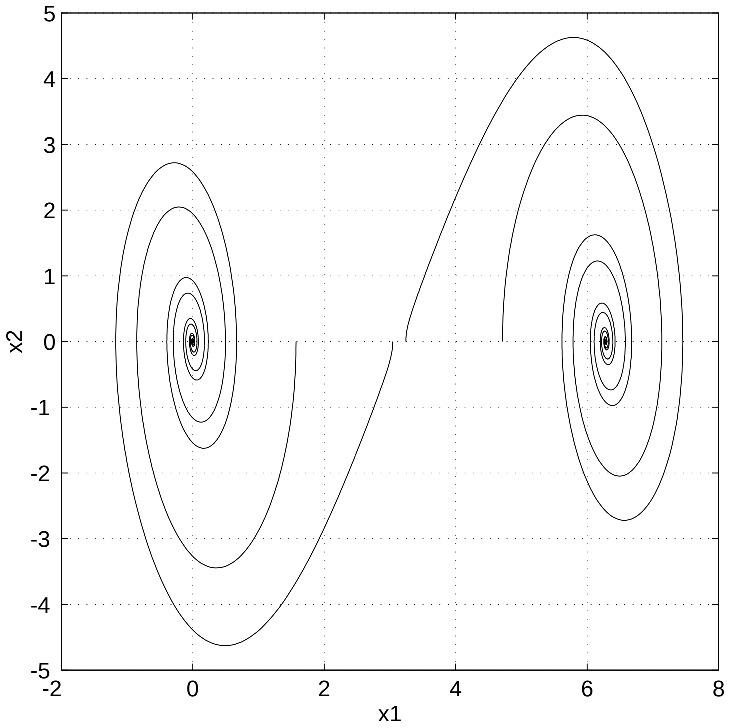
$$m\ell^2\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + mg\ell \sin\theta = 0$$

ponendo $x = (x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$, l'equazione nello spazio di stato è

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{k}{m\ell^2}x_2 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow f(x) = (x_2 \quad -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{k}{m\ell^2}x_2)^T$; sistema **non lineare**!

quindi, i punti di equilibrio sono caratterizzati da $x_1 = j\pi$ $(j = 0, 1)$ e $x_2 = 0$ (pendolo verticale verso il basso/l'alto e fermo) ecco le traiettorie del pendolo nel piano $(x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$ (**piano delle fasi**)



es: ancora un sistema non lineare

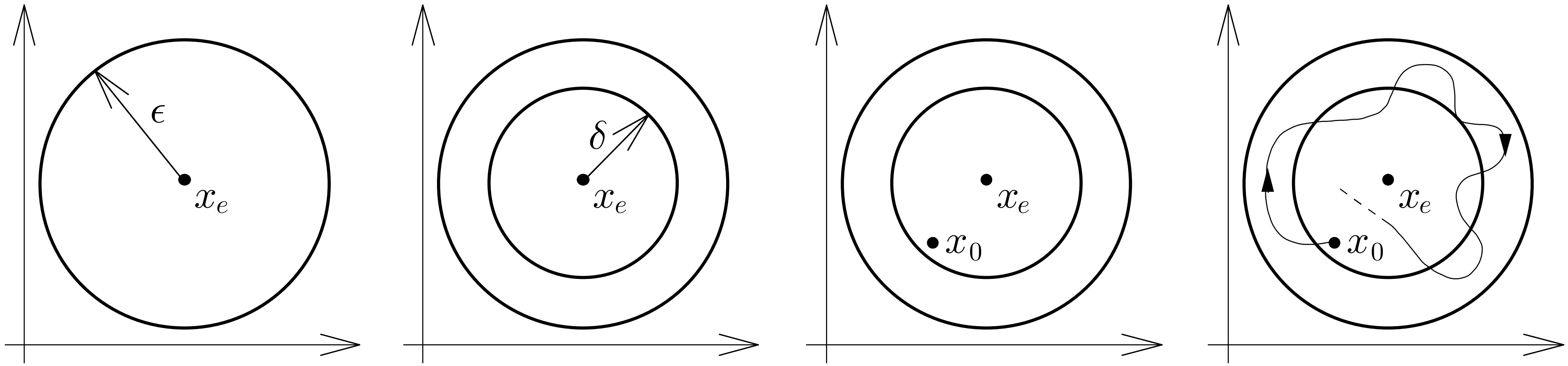
$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 1 - x_1^3 \\
\dot{x}_2 &= x_1 - x_2^2
\end{aligned}
$$

i pde sono caratterizzati da $x_1 = 1$ e $x_2 = \pm 1$ ■

nota: i pde di un sistema nonlineare possono essere in numero finito (2 nei precedenti esempi, ma eventualmente nullo) o infinito, e possono essere punti **isolati** nello spazio di stato

definizioni di stabilità (secondo Lyapunov)
(nel seguito, $|\cdot|$ indica una qualsiasi norma di $\mathbb{R}^n$)

> un pde x_e si dice **stabile** (S) se:
> $$\forall \epsilon, \exists\, \delta(\epsilon) : |x_0 - x_e| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_e| < \epsilon, \forall t > 0$$



$\forall \epsilon$ $\quad$ $\exists\, \delta(\epsilon)$ $\quad$ $|x_0 - x_e| < \delta$ $\quad$ $|x(t) - x_e| < \epsilon, \forall t > 0$

un pde x_e di un sistema dinamico è stabile se è possibile mantenere l'evoluzione del sistema **arbitrariamente vicina** a x_e prendendo la condizione iniziale x_0 **sufficientemente vicina** a x_e; ovvero, se nell'intorno di x_e è possibile limitare a piacimento lo scostamento limitando opportunamente la perturbazione

ovviamente: $\quad$ un pde x_e si dice **instabile** se non è stabile

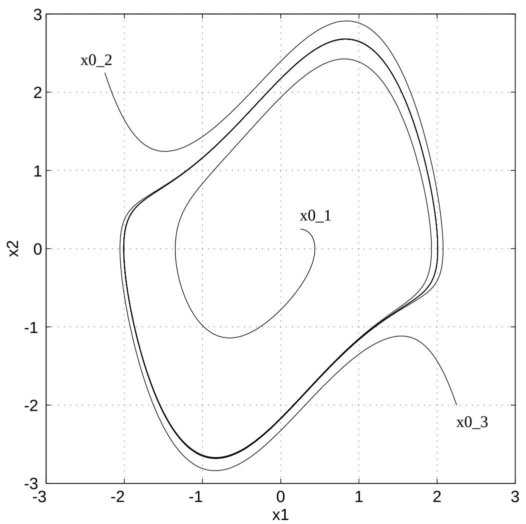
- la stabilità è una **proprietà dei pde**: un sistema può avere pde stabili e instabili contemporaneamente (accade nei sistemi non lineari, es: pendolo)

- nella definizione di stabilità **non** si richiede che lo stato perturbato tenda a convergere verso x_e

- d'altra parte, nella definizione di instabilità **non** si richiede che l'evoluzione perturbata tenda a divergere

  es: oscillatore di Van der Pol (sistema MMS con damping dipendente dalla posizione)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (1 - x_1^2)x_2\end{aligned}$$



le traiettorie nello spazio di stato mostrano che, indipendentemente dalla condizione iniziale, lo stato converge ad un **ciclo limite**: quindi, è impossibile limitare a piacimento lo scostamento da 0 (ad es., se si pone $\epsilon = 1$ non esiste alcun δ)

$\Rightarrow$ l'origine è un pde instabile per il sistema ■

in pratica, spesso la stabilità **semplice** non basta:

un pde x_e si dice **asintoticamente stabile** (AS) se:

1. è stabile
2. $\exists\, \delta_a : |x_0 - x_e| < \delta_a \Rightarrow \lim_{t\to\infty} |x(t) - x_e| = 0$

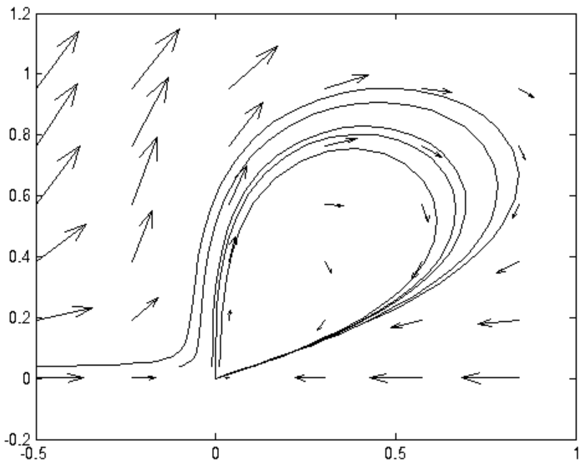
- in aggiunta alla stabilità, si richiede la convergenza a x_e se la condizione iniziale è sufficientemente vicina a x_e

- la stabilità asintotica è un concetto **locale**, nel senso che la convergenza si ha se x_0 appartiene all'intorno di x_e avente raggio δ_a (**dominio di attrazione**); all'esterno di tale intorno si può avere semplice limitatezza o **persino divergenza**!

- la 2. **non implica** la 1.; è possibile cioè avere la convergenza senza la stabilità (qualche volta pde di questo tipo si definiscono **quasi-stabili asintoticamente**, ma sono a tutti gli effetti pde instabili)

es: (dovuto a Vinograd)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2)} \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2)}\end{aligned}$$



le traiettorie nello spazio di stato mostrano che, indipendentemente dalla distanza di x_0 dall'origine, se $x_{1,0} < 0$ lo stato converge all'origine dopo aver toccato una curva che si trova **a distanza finita** da 0: quindi, è impossibile limitare a piacimento lo scostamento dall'origine

$\Rightarrow$ l'origine è un pde quasi-stabile asintoticamente (ma instabile) per il sistema ■

tuttavia, nelle applicazioni, è spesso necessario disporre di una **stima** del tempo necessario perché lo stato perturbato ritorni in x_e:

un pde x_e si dice **esponenzialmente stabile** (ES) se esistono costanti positive α, λ e c tali che:

$$|x(t) - x_e| \leq \alpha |x_0 - x_e| e^{-\lambda t}, \quad \forall t > 0, \quad \forall |x_0 - x_e| < c$$

- in pratica, si richiede che esista almeno un intorno di x_e a partire dal quale la distanza della traiettoria perturbata da x_e converge a zero con velocità **maggiorata** da quella di una funzione esponenziale (anche questo è un concetto locale)

- λ viene detto **tasso** di convergenza esponenziale; posto $\alpha = e^{\lambda \tau_0}$, si trova facilmente che dopo $(\tau_0 + 1/\lambda)$ secondi la distanza da x_e si è ridotta ad almeno $1/e$ (circa il 35%) del suo valore iniziale

- la stabilità esponenziale **implica** la stabilità asintotica (e quindi la stabilità); il viceversa **non è vero**

  es: l'origine è un pde asintoticamente ma non esponenzialmente stabile per il sistema

  $$\dot{x} = -x^2$$

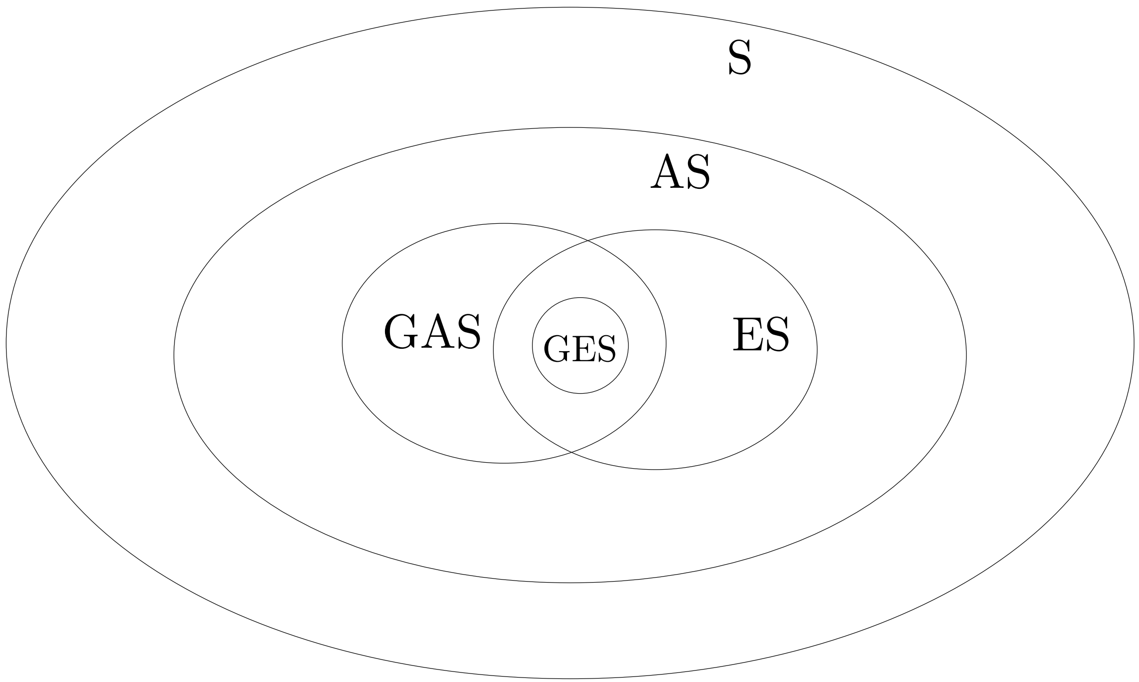
  infatti, la soluzione è $x(t) = \dfrac{x_0}{1 + t x_0}$, che converge a zero più lentamente di qualsiasi funzione esponenziale ■

le proprietà di stabilità asintotica e stabilità esponenziale, che sono intrinsecamente locali, possono anche essere **globali**

- un pde si dice **globalmente asintoticamente stabile** (GAS) se è stabile e lo stato converge a x_e per **qualsiasi** stato iniziale (il dominio di attrazione coincide con tutto $\mathbb{R}^n$)

- un pde si dice **globalmente esponenzialmente stabile** (GES) se lo stato converge esponenzialmente a x_e per **qualsiasi** stato iniziale

riassumendo, si ha la seguente classificazione dei pde **stabili**



nota: x_e può essere GAS solo se è l'**unico** pde del sistema (C.N.)

Teorema

se un sistema lineare ammette più di un pde, la stabilità (instabilità) di uno di essi implica ed è implicata da quella di tutti gli altri

dim basta mostrare che, se il generico pde x_e è stabile, lo è anche l'origine, e viceversa

per ipotesi $\forall\epsilon, \exists\,\delta(\epsilon) : |x_0 - x_e| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_e| < \epsilon, \forall t > 0$

$x(t) - x_e$ è la differenza tra la risposta a partire da x_0 e quella a partire da $x_e \Rightarrow$ per la linearità, $x(t) - x_e$ è la risposta a partire da $x_0 - x_e = z_0$, che indicheremo con $x_{z_0}(t)$

si ha dunque $\forall\epsilon, \exists\,\delta(\epsilon) : |z_0| < \delta \Rightarrow |x_{z_0}(t)| < \epsilon, \forall t > 0$, cioè la stabilità dell'origine

analogamente si prova il 'è implicata' ■

Teorema

in un sistema lineare:

1. si può avere stabilità asintotica solo per l'origine e solo nel caso in cui sia l'unico pde
2. se l'origine è AS, è anche GAS

dim 1: ovvia (cfr. slide 6)

2: ovvia per sistemi tempo-invarianti a dimensione finita, considerando che affinchè l'evoluzione libera $x(t) = e^{At}x_0$ converga in un intorno dell'origine è necessario che gli autovalori di A abbiano parte reale negativa, il che implica che l'evoluzione libera converge da $\forall x_0$ ■

Teorema

in un sistema lineare, l'origine è ES se e solo se è AS

dim necessità: ovvia

sufficienza: ovvia per sistemi tempo-invarianti a dimensione finita, poiché se l'origine è AS l'evoluzione libera è combinazione di esponenziali convergenti ∎

riassumendo, nei sistemi lineari:

sia che l'origine sia l'unico pde (che può essere S, ES, I) o che vi siano più pde (e allora sono infiniti, e sono tutti S oppure tutti I), è lecito parlare di **stabilità** (eventualmente esponenziale) **o instabilità del sistema** nel suo complesso

il seguente criterio di stabilità è immediato per sistemi tempo-invarianti a dimensione finita

Teorema

in un sistema lineare tempo-invariante a dimensione finita, l'origine è S se e solo se

1. gli autovalori di A con molteplicità geometrica pari a 1 hanno Re$[\,] \leq 0$
2. gli autovalori di A con molteplicità geometrica maggiore di 1 hanno Re$[\,] < 0$

l'origine è ES se e solo se tutti gli autovalori di A hanno Re$[\,] < 0$

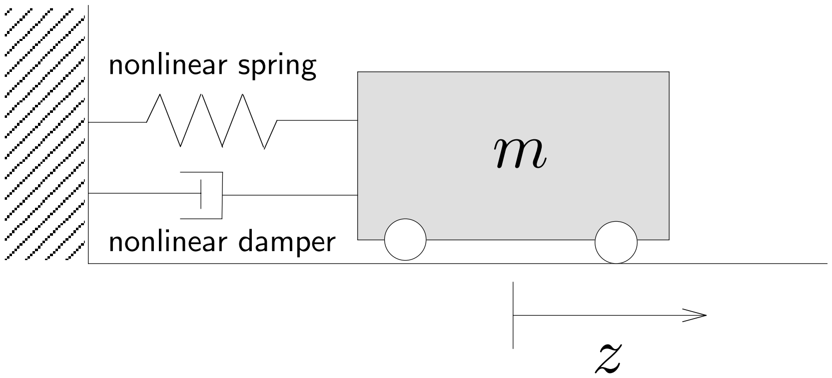
oppure, per evitare il calcolo degli autovalori: criterio di Routh

Stabilità dei sistemi non lineari: criterio diretto di Lyapunov

idea di base

se l'energia totale di un sistema (meccanico, elettrico, . . .) viene continuamente **dissipata**, il sistema (lineare o non lineare) tende a un punto di equilibrio $\Rightarrow$ è possibile determinare la stabilità/instabilità di un sistema esaminando un'**unica funzione scalare**

es: sistema MMS non lineare



$$m\ddot{z} + b\dot{z}|\dot{z}| + (k_0 z + k_1 z^3) = 0$$

impossibile studiare la stabilità dell'origine usando le definizioni, poiché non siamo in grado di ottenere la soluzione dell'equazione: esaminiamo l'energia meccanica ponendo $x = (z, \dot{z})$

$$V(x) = V_{\text{cin}}(\dot{z}) + V_{\text{pot}}(z) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \int_0^z (k_0\zeta + k_1\zeta^3)d\zeta = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}k_0 z^2 + \frac{1}{4}k_1 z^4$$

relazioni energia/stabilità

- si ha energia nulla nell'unico pde $z = 0$, $\dot{z} = 0$
- si ha stabilità asintotica (globale) dell'origine se l'energia converge (sempre) a zero
- si ha instabilità dell'origine se l'energia diverge

come varia l'energia durante il moto del sistema? basta derivare V rispetto a t (di cui è funzione composta) e sostituire a $\ddot{z}$ l'espressione che se ne ricava dal modello dinamico

$$\dot{V}(x) = m\dot{z}\ddot{z} + (k_0 z + k_1 z^3)\dot{z} = -b|\dot{z}|^3$$

$\Rightarrow$ l'energia viene **continuamente dissipata** e il sistema converge ad uno stato con velocità nulla ($\dot{z} = 0$); d'altra parte, poiché in qualsiasi posizione diversa da $z = 0$ la massa sarebbe soggetta a una forza elastica di richiamo non nulla, è evidente che **il sistema converge in effetti all'origine** ($z = 0$, $\dot{z} = 0$) ■

il metodo diretto di Lyapunov si basa appunto su una generalizzazione (e una formalizzazione rigorosa) di questo concetto: si cerca un'opportuna funzione scalare *energy-like* per il sistema dinamico non lineare in esame, e se ne esamina la variazione nel tempo lungo le traiettorie del sistema nel seguito, faremo riferimento al generico sistema non lineare tempo-invariante

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

e indicheremo con x_e il pde da studiare; dunque, $f(x_e) = 0$

concetti preliminari: data una funzione scalare $V(x)$, continua e derivabile rispetto a x ($V \in C^1$), e detto $S(x_e, r)$ un intorno sferico di x_e di raggio r

- $V(x)$ si dice **definita positiva** (DP) in $S(x_e, r)$ se

  a) $V(x_e) = 0$

  b) $V(x) > 0, \forall x \in S(x_e, r), x \neq x_e$

- $V(x)$ si dice **semidefinita positiva** (SDP) in $S(x_e, r)$ se

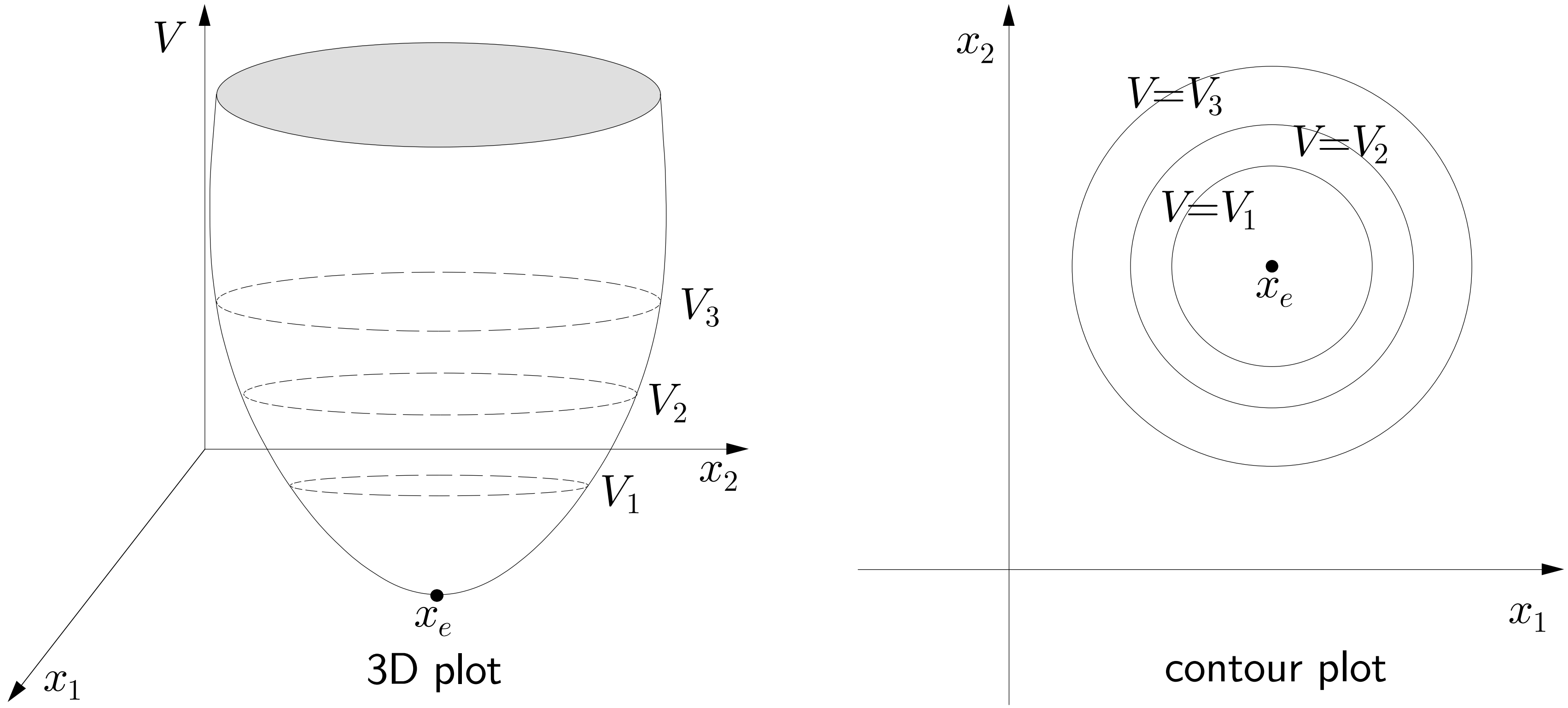
  a) $V(x_e) = 0$

  b) $V(x) \geq 0, \forall x \in S(x_e, r), x \neq x_e$

- $V(x)$ si dice **definita negativa** (DN) in $S(x_e, r)$ se $-V(x)$ è definita positiva, **semidefinita negativa** (SDN) in $S(x_e, r)$ se $-V(x)$ è semidefinita positiva

nota: $V(x)$ DP (DN) in $S(x_e, r) \Rightarrow V(x)$ SDP (SDN) in $S(x_e, r)$

caso $n = 2$: rappresentazione grafica **locale** di una funzione V DP in x_e



es: in $I\!R^2$, la funzione $V(x) = x^T x = x_1^2 + x_2^2$ è DP in qualsiasi intorno dell'origine

es: in $I\!R^2$, la funzione $V(x) = x_1^2$ è SDP in qualsiasi intorno dell'origine (si annulla su tutto l'asse x_2; le curve di livello non sono chiuse)

es: per il sistema MMS non lineare, l'energia meccanica $V(x)$ è DP in qualsiasi intorno dell'origine data una funzione $V(x)$, e considerata una soluzione $x(t)$ della $\dot{x} = f(x)$, si può riguardare la $V(x(t))$ come una funzione **composta** di t, continua e derivabile per ogni t; si ha quindi

$$\dot{V}(t) = \frac{dV(x(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x(t)) = \dot{V}(x)$$

dove $f_i(x(t))$ è la i-esima componente della funzione vettoriale $f(x)$

la $\dot{V}(x)$, considerata come una funzione della sola x, viene chiamata la **derivata di V lungo le traiettorie del sistema**

alla $\dot{V}(x)$ è quindi ancora possibile attribuire le proprietà di definitezza positiva, negativa, semidefinitezza positiva, etc.

es: si consideri il sistema dinamico

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 \end{aligned}$$

il cui unico pde è l'origine, e si ponga $V = x_1^2 + x_2^2$, che è DP intorno all'origine; si ha

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 = -2x_2^2$$

che è SDN intorno all'origine ■

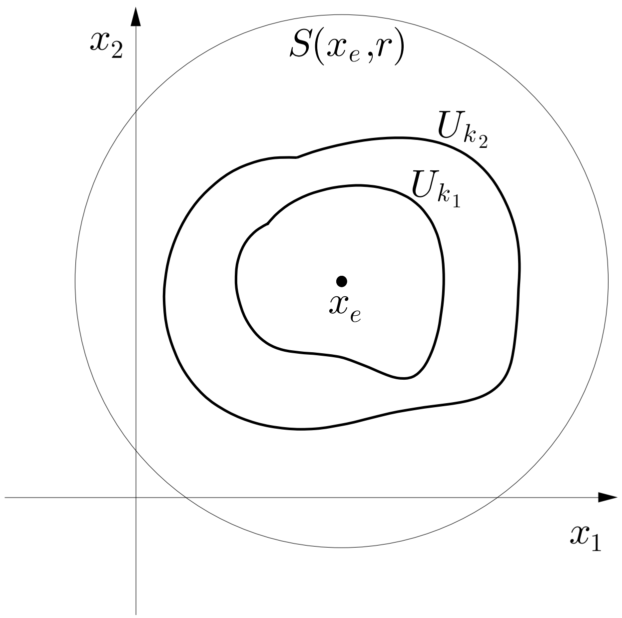
Teorema

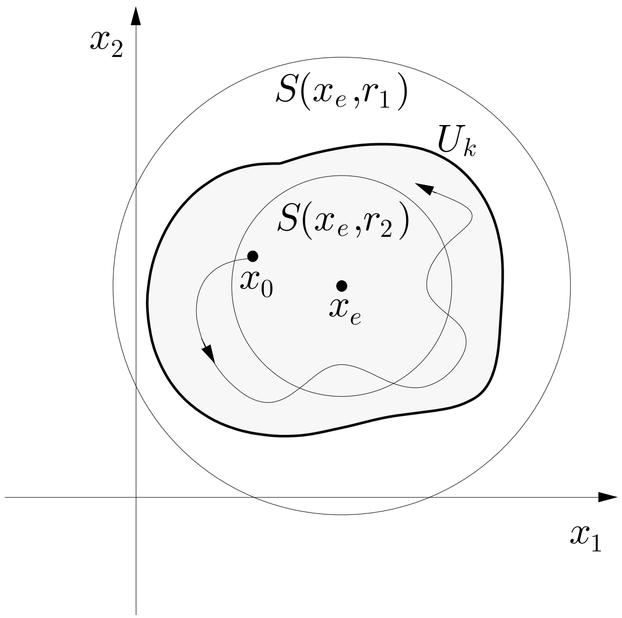
un pde x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è **stabile** se esiste una funzione $V(x) \in C^1$ tale che

1. $V(x)$ sia DP in un intorno $S(x_e, r)$
2. $\dot{V}(x)$ sia SDN nello stesso intorno

dim di tipo geometrico, per $n = 2$ (ma valida in generale)

si noti intanto che, poiché $V(x)$ è DP in $S(x_e, r)$, le linee di livello $U_k = \{x \in I\!R^2 : V(x) = k\}$ sono **chiuse** per k sufficientemente piccolo; inoltre, se $k_1 < k_2$, U_{k_1} è **interna** a U_{k_2}





scelto r_1 tale che $0 < r_1 \leq r$, esiste certamente un valore k tale che U_k è interna a $S(x_e, r_1)$ (basta prendere il valore minimo di V lungo la frontiera di $S(x_e, r_1)$, che esiste ed è positivo perché V è continua, e scegliere k minore di tale valore); dunque U_k è chiusa

inoltre, poiché U_k è una curva chiusa che contiene x_e, è sempre possibile trovare r_2 tale che $S(x_e, r_2)$ è interno a U_k

si consideri una traiettoria che origina da $x_0 \in S(x_e, r_2)$; si ha $V(x_0) < k$ ed essendo $\dot{V}$ negativa o nulla lungo le traiettorie del sistema contenute in $S(x_e, r)$, la $V(x(t))$ è **non crescente** nello stesso intorno

$\Rightarrow$ si ha $V(x(t)) < k$, $\forall t > 0$, e dunque lo stato $x(t)$ si mantiene all'interno di $S(x_e, r_1)$ **indefinitamente**

quindi:

$$|x_0 - x_e| < r_2 \quad \Rightarrow \quad |x(t) - x_e| < r_1, \;\; \forall t > 0 \qquad \text{c.d.d.} \qquad \blacksquare$$

- una funzione $V(x)$ che gode delle proprietà richieste dal teorema (cioè tale che V sia DP e $\dot{V}$ sia SDN in un intorno di x_e) si definisce **funzione di Lyapunov**

- il teorema stabilisce dunque che l'**esistenza** di una funzione di Lyapunov è condizione **sufficiente** per la stabilità; in effetti, per sistemi tempo-invarianti a dimensione finita si può mostrare che la condizione è anche **necessaria**

- l'applicazione del teorema passa attraverso due fasi, eventualmente ripetute:

  1. costruzione di una $V(x)$ DP in un intorno di x_e (detta **candidata** di Lyapunov)
  2. calcolo della $\dot{V}$ lungo le traiettorie del sistema e verifica della sua SDN nell'intorno

  nota: se la $V(x)$ scelta non risulta essere una funzione di Lyapunov, non si può concludere nulla; potrebbe esisterne un'altra

- se $V(x)$ è una funzione di Lyapunov per un sistema, lo è anche la funzione

$$V'(x) = \beta V^{\gamma}(x) \qquad\qquad \beta > 0, \gamma \in I\!R$$

- la scelta della candidata di Lyapunov è ovviamente essenziale: nei sistemi meccanici ed elettrici si può provare a scegliere l'energia totale, ma possono esistere scelte migliori che non hanno un'immediata interpretazione fisica

es: pendolo (per semplicità, $m = 1$, $k = 1$, $\ell = 1$)

il vettore di stato è $x = (x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g \sin x_1 - x_2 \end{aligned}$$

posto $x_e^{\text{down}} = (0, 0)$, proviamo con l'energia meccanica

$$V(x) = \frac{1}{2} x_2^2 + g(1 - \cos x_1) \qquad \text{DP in qualsiasi intorno dell'origine}$$

si ha

$$\dot{V}(x) = x_2 \dot{x}_2 + g \sin x_1 \dot{x}_1 = -x_2^2 \qquad \text{SDN in qualsiasi intorno dell'origine}$$

dunque x_e^{down} è un pde **stabile** per il pendolo (e $\dot{V}$ è la potenza dissipata) ■

però: l'intuizione fisica ci dice che, in presenza di attrito, l'origine è un pde **asintoticamente** stabile per il pendolo $\Rightarrow$ ci serve un teorema più forte

Teorema

> un pde x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è **asintoticamente stabile** se esiste una funzione $V(x) \in C^1$ tale che
>
> 1. $V(x)$ sia DP in un intorno $S(x_e, r)$
> 2. $\dot{V}(x)$ sia DN nello stesso intorno

dim intanto, x_e è certamente stabile; in particolare, se $x_0 \in S(x_e, r_2)$ (cfr. dimostrazione precedente) la traiettoria rimane in $S(x_e, r_1)$ indefinitamente $\Rightarrow$ $V(t)$ lungo la traiettoria tende a un valore limite $\bar{V} \geq 0$ (perché $\dot{V} < 0$ e V è limitata inferiormente da zero)

supponiamo $\bar{V} > 0$; poiché V è continua e si azzera solo in x_e, esiste un intorno $S(x_e, \sigma)$ in cui la traiettoria non entra mai $\Rightarrow$ poiché anche $\dot{V}$ è continua e si azzera solo in x_e, esiste un $\alpha > 0$ tale che $\dot{V} \leq -\alpha$ indefinitamente

ma allora avremmo

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \dot{V}(\tau) d\tau \leq V(0) - \alpha t$$

e quindi V diventerebbe negativa dopo un tempo finito, contraddicendo l'assunzione $\bar{V} > 0$

quindi, se $x_0 \in S(x_e, r_2)$ si ha $\lim_{t\to\infty} V(t) = 0$; quindi, essendo $V(x)$ nulla solo per $x = x_e$, implica che $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_e$, c.d.d. ■

nota: estrapolando le proprietà di $S(x_e, r_2)$ dalla prova del criterio di stabilità precedente, si conclude che **qualsiasi intorno di x_e contenuto in U_{V^*}** (dove V^* è il valore minimo di V lungo la frontiera di $S(x_e, r)$) è una **stima** (per difetto) del **dominio di attrazione** di x_e

es: si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) - x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)\end{aligned}$$

per il quale l'origine è un punto di equilibrio

scelta

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \qquad \text{DP in qualsiasi intorno dell'origine}$$

si ha

$$\dot{V}(x) = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \qquad \text{DN per } x : x_1^2 + x_2^2 < 1\text{, ovvero in } S(0, 1^-)$$

l'origine è dunque asintoticamente stabile per il sistema in questione

per stimare il dominio di attrazione:

si ponga $U_{V^*} = \{x \in I\!R^2 : V(x) \leq 1/2\} = S(0, 1^-)$; scelto $\rho \in (0, 1)$, qualunque intorno $S(0, \rho)$ è contenuto in U_{V^*} e dunque costituisce una stima (per difetto) del **dominio di attrazione** dell'origine

es: pendolo; prendiamo la seguente candidata di Lyapunov (nessuna interpretazione fisica)

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + 2g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 \qquad \text{DP in qualsiasi intorno dell'origine}$$

si trova

$$\dot{V}(x) = -x_2^2 - g x_1 \sin x_1 \qquad \text{DN in qualsiasi intorno dell'origine tale che } x_1 \in (-\pi, \pi)$$

dunque x_e^{down} è un pde **asintoticamente stabile** per il pendolo; un'analisi approfondita mostra che punti $(x_1, x_2) : x_1 \in (-\pi, \pi), x_2 = 0$, fanno parte del dominio di attrazione (com'è intuitivo) ■

cosa succede se cerchiamo di applicare i teoremi precedenti al punto di equilibrio $x_e^{\text{up}} = (\pi, 0)$ del pendolo? l'intuizione fisica ci dice che x_e^{up} è **instabile**, ma la condizione necessaria (e sufficiente) di stabilità è l'**esistenza** di una funzione di Lyapunov, che non possiamo escludere a priori

è utile disporre di un **criterio di instabilità**

Teorema [Cetaev]

un pde x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è **instabile** se esiste una funzione $V(x) \in C^1$ tale che

1. l'insieme $P = \{x : V(x) > 0\}$ ha x_e come punto di accumulazione
2. $\dot{V}(x)$ sia DP in $U = P \cap S(x_e, r)$, per qualche $r > 0$

es: si consideri il sistema dinamico

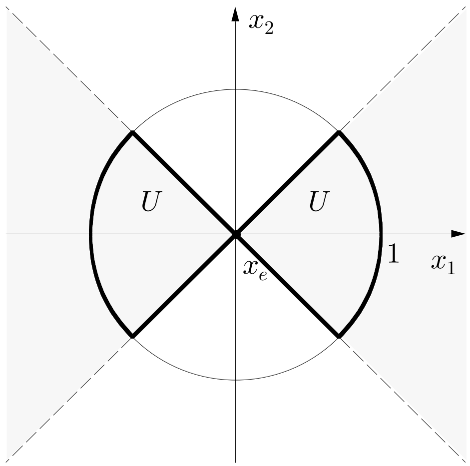
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2\end{aligned}$$

l'applicazione del teorema di Cetaev mostra che il pde $x_e = (0,0)$ è **instabile**

infatti, si consideri la seguente funzione

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2$$

che è positiva in $P = \{x : |x_1| > |x_2|\}$, di cui x_e è punto di accumulazione



si ha

$$\dot{V}(x) = x_1^2 + x_1x_2^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2(1 + x_1)$$

che è chiaramente DP in $U = P \cap S(x_e, 1)$ ■

è disponibile anche un criterio di stabilità asintotica **globale**

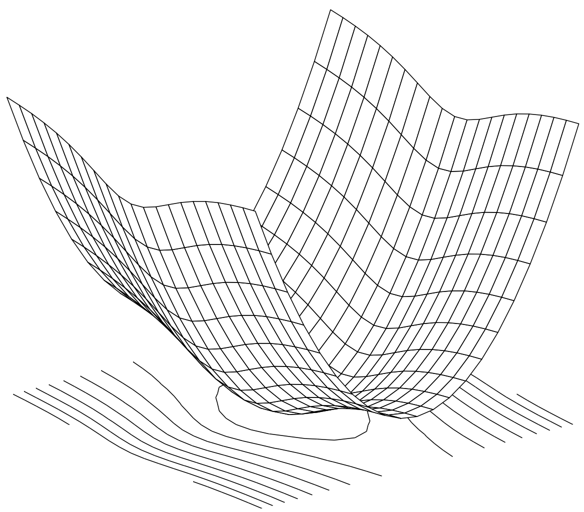
Teorema

un pde x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è **globalmente asintoticamente stabile** se esiste una funzione $V(x) \in C^1$ tale che

1. $V(x)$ sia DP in qualsiasi intorno di x_e
2. $\dot{V}(x)$ sia DN in qualsiasi intorno di x_e
3. $V(x)$ sia **radialmente illimitata**, cioè $\lim_{|x-x_e|\to\infty} V(x) = \infty$

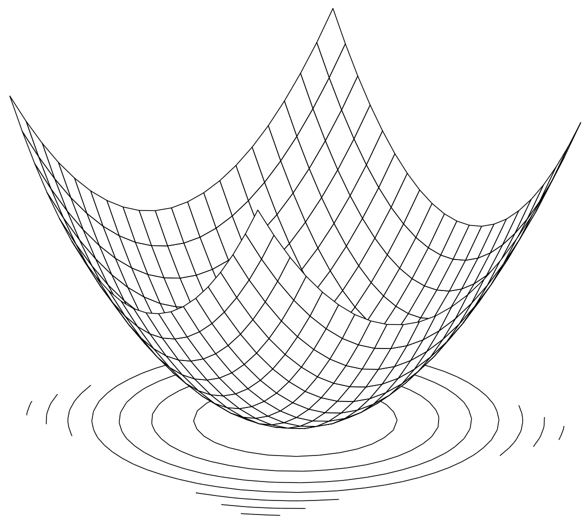
es:

$$V = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$



radialmente limitata

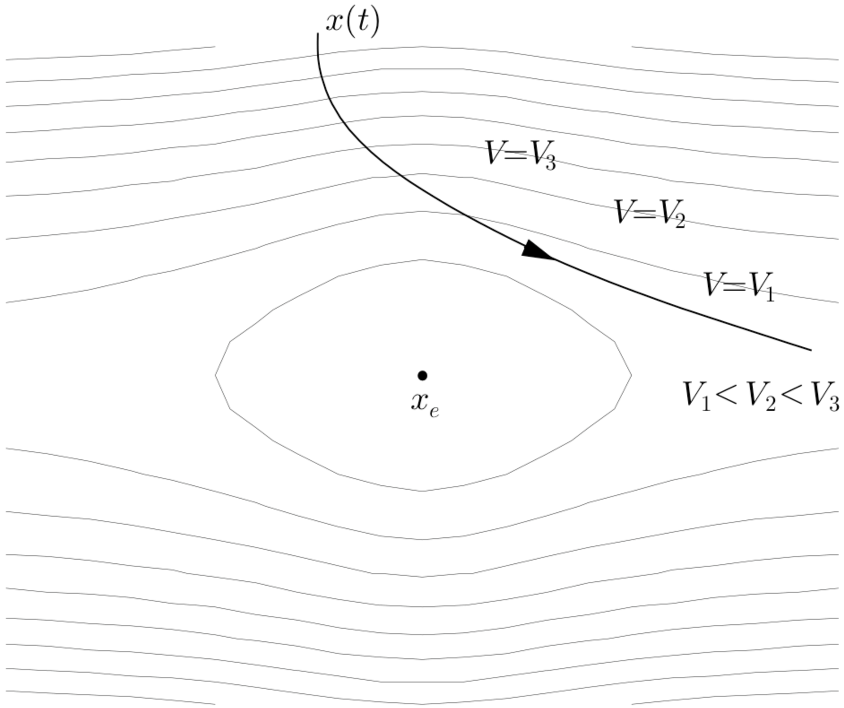
$$V = x_1^2 + x_2^2$$



radialmente illimitata

dim come nel caso locale, osservando che la illimitatezza radiale di V, combinata con il fatto che $\dot{V}$ è DN in tutto $I\!R^n$, implica che per qualsiasi condizione iniziale x_0 le traiettorie rimangono all'interno della regione **limitata** definita da $V(x) \leq V(x_0)$ ■

nota: nel caso in cui V sia radialmente limitata, le curve di livello non sono chiuse lontano da x_e; di conseguenza, è possibile che lo stato si allontani indefinitamente da x_e pur rimanendo all'interno della regione definita da $V(x) \leq V(x_0)$, e anzi attraversando curve di livello relative a valori progressivamente decrescenti di V



$\Rightarrow$ quando x_0 è sufficientemente lontano, $x(t)$ può **non** convergere a x_e

es: si consideri la famiglia di sistemi non lineari descritta da

$$\dot{x} = -c(x), \qquad \text{con} \quad xc(x) > 0, \forall x \neq 0, \;\; c(0) = 0$$

e la candidata di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

che è DP in qualsiasi intorno di $x_e = 0$ e radialmente illimitata

essendo

$$\dot{V}(x) = x\dot{x} = -xc(x)$$

la $\dot{V}(x)$ è DN in qualsiasi intorno di $x_e = 0$

$\Rightarrow$ x_e è un pde globalmente asintoticamente stabile ■

riassumendo, il **criterio diretto di stabilità di Lyapunov** si basa sulle seguenti condizioni:

	x_e è S	x_e è AS	x_e è GAS	x_e è instabile
$V(x)$	DP in un $S(x_e, r)$	DP in un $S(x_e, r)$	DP in $\forall$ $S(x_e, r)$ e rad. illim.	x_e è punto di accum. di $P = \{x : V(x) > 0\}$
$\dot{V}(x)$	SDN in $S(x_e, r)$	DN in $S(x_e, r)$	DN in $\forall$ $S(x_e, r)$	DP in $P \cap S(x_e, r)$

Costruzione di funzioni di Lyapunov

la maggiore difficoltà nell'applicare il metodo diretto di Lyapunov per studiare un pde x_e di un sistema non lineare $\dot{x} = f(x)$ consiste nella **scelta** della funzione $V(x)$; a volte la fisica del problema fornisce un'ispirazione, ma in generale è utile procedere sistematicamente

una scelta spesso efficace consiste nel definire $V(x)$ come una **forma quadratica** del tipo

$$V(x) = \frac{1}{2}(x - x_e)^T Q (x - x_e)$$

con la matrice $Q : n \times n$ **simmetrica** e **definita positiva** (tale cioè che $w^T Q w > 0$, $\forall w \neq 0$)

per garantire la definitezza positiva di Q si può utilizzare la **C.N.&S. di Sylvester**

$$Q_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{vmatrix} > 0, \qquad \ldots \qquad \det(Q) > 0$$

essendo Q simmetrica, la $\dot{V}(x)$ risulta essere

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^T Q(x-x_e) + \frac{1}{2}(x-x_e)^T \dot{Q}(x-x_e) + \frac{1}{2}(x-x_e)^T Q\dot{x} = (x-x_e)^T Q\dot{x} + \frac{1}{2}(x-x_e)^T \dot{Q}(x-x_e)$$

es: si consideri il sistema

$$\begin{array}{rcl}\dot{x}_1 & = & k_2 x_1 \\ \dot{x}_2 & = & -x_2^3 + k_1 x_3 \\ \dot{x}_3 & = & -2x_2 - x_3^3\end{array}$$

con $k_2 < 0$ e $k_1 > 0$; l'origine è l'unico pde

- posto

$$V(x) = \frac{1}{2}(x - x_e)^T I_{3\times 3}(x - x_e) = \frac{1}{2}\,x^T x = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

che è DP in qualsiasi intorno dell'origine e radialmente illimitata, si trova

$$\dot{V}(x) = x^T \dot{x} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + x_3\dot{x}_3 = k_2 x_1^2 - x_2^4 + (k_1 - 2)x_2 x_3 - x_3^4$$

per $k_1 = 2$, $\dot{V}(x)$ è DN in qualsiasi intorno dell'origine, che è in questo caso GAS

- si può fare un'analisi più precisa ponendo $Q = \mathrm{diag}(1, \dfrac{2}{k_1}, 1)$

$$V(x) = \frac{1}{2}\,x^T Q x = \frac{1}{2}(x_1^2 + \frac{2}{k_1}\,x_2^2 + x_3^2) \quad \Longrightarrow \quad \dot{V}(x) = k_2 x_1^2 - \frac{2}{k_1}\,x_2^4 - x_3^4$$

che, per $k_2 < 0$ e $k_1 > 0$, è sempre DN $\Rightarrow$ l'origine è GAS in ogni caso ■

metodo di Krasovski

assumendo che l'origine sia un pde per $\dot{x} = f(x)$ (altrimenti: traslazione $x_e \to O$), provare come candidata di Lyapunov la $V(x) = f^T(x)f(x)$, chiaramente DP in un intorno di x_e

Teorema

indicata con $J(x) = df/dx$ la matrice Jacobiana della funzione f:

- se la matrice $F(x) = J(x) + J^T(x)$ è definita negativa in un intorno $S(x_e, r)$ allora x_e è **asintoticamente stabile**
- se $F(x) = J(x) + J^T(x)$ è definita negativa in tutto $\mathbb{R}^n$ e $V(x) = f^T(x)f(x)$ è radialmente illimitata, allora x_e è **globalmente asintoticamente stabile**

dim posto $V(x) = f^T(x)f(x)$, si ha $\dot{V} = 2f^T(x)\dot{f}(x) = 2\dot{x}^T\frac{df}{dx}\dot{x}$ che, se $F(x)$ è definita negativa, è anch'essa DN $\Rightarrow V$ è una funzione di Lyapunov ■

es: l'origine è un pde GAS per il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_2^3 \end{aligned}$$

infatti si ha

$$J(x) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow F(x) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 - 6x_2^2 \end{pmatrix}$$

dalla condizione di Sylvester, $-F(x)$ è definita positiva in tutto $\mathbb{R}^n$; quindi $F(x)$ è definita negativa in tutto $\mathbb{R}^n$ e inoltre

$$V(x) = f^T(x)f(x) = (-3x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 \to \infty \text{ per } |x| \to \infty$$ ■

metodo del gradiente variabile

si basa sull'osservazione che, se $V(x)$ è una funzione di Lyapunov per il pde x_e del sistema $\dot{x} = f(x)$, allora

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dx}\,\dot{x} = \nabla V^T(x)\dot{x} \qquad \nabla V(x) : \text{gradiente di } V \text{ rispetto a } x$$

l'idea di base è di **scegliere direttamente $\nabla V(x)$** (invece che $V(x)$), in modo da ottenere V DP e $\dot{V}$ DN; generalmente si pone

$$\nabla V_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) x_j$$

affinché $\nabla V(x)$ sia un gradiente, si deve imporre la condizione che (Th. di Schwartz)

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} \quad i,j = 1,\dots,n$$

si cerca di scegliere gli a_{ij} in modo che *(i)* sia verificata questa condizione; *(ii)* $\dot{V}(x)$ sia DN in un intorno $S(x_e,r)$; e infine

$$\textit{(iii)} \quad V(x) = \int_0^x \frac{dV}{dx}dx = \int_0^x \nabla V^T(x)dx \qquad \text{sia DP in } S(x_e,r)$$

nota: poiché $V(x)$ dipende solo da x, l'integrale è indipendente dal percorso di integrazione; conviene dunque usare un percorso di integrazione allineato di volta in volta con gli assi $x_1,\dots,x_n$, cioè

$$V(x) = \int_0^{x_1} \nabla V_i^T(x_1,0,\dots,0)dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2^T(x_1,x_2,0,\dots,0)dx_2 + \dots + \int_0^{x_n} \nabla V_n^T(x_1,x_2,\dots,x_n)dx_n$$

es: si consideri il sistema

$$\begin{array}{rcl}\dot{x}_1 & = & -x_1 \\ \dot{x}_2 & = & -x_2 + x_1 x_2^2\end{array}$$

e si scelga la seguente forma per $\nabla V(x)$

$$\begin{array}{rcl}\nabla V_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \nabla V_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{array}$$

la condizione di simmetria

$$x_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} + a_{12} + x_2 \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} = x_2 \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} + a_{21} + x_1 \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1}$$

si può soddisfare ponendo $a_{12} = a_{21} =$ cost e $a_{11} =$ cost, $a_{22} =$ cost. Ad esempio, si può provare con $a_{12} = a_{21} = 0$, cioè $\nabla V_1 = a_{11}x_1$ e $\nabla V_2 = a_{22}x_2$. Ne segue

$$\dot{V}(x) = (a_{11}x_1 \;\; a_{22}x_2)^T \dot{x} = -a_{11}x_1^2 - a_{22}x_2^2(1 - x_1 x_2)$$

che, se $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, risulta DN in qualsiasi intorno dell'origine tale che $x_1 x_2 < 1$ (ad esempio, la crf di raggio 1). Proviamo dunque a porre $a_{11} = a_{22} = 1$. Troviamo

$$V(x) = \int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \qquad \text{DP in qualsiasi intorno dell'origine}$$

$\Rightarrow$ l'origine è un pde AS ■

Teorema dell'insieme invariante

spesso la funzione di Lyapunov scelta ha una derivata $\dot{V}(x)$ che è **solo SDN** (e non DN); in queste condizioni, si può concludere la stabilità semplice di x_e ma non l'eventuale stabilità asintotica (cfr: la prima funzione di Lyapunov per il pendolo)

in queste condizioni, il **teorema dell'insieme invariante** consente di analizzare più a fondo la situazione

> un sottoinsieme $G \subset \mathbb{R}^n$ dello spazio di stato si dice **insieme invariante** per un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ se qualsiasi traiettoria $x(t)$ del sistema che parte da un punto $x_0 \in G$ rimane indefinitamente in G

è una generalizzazione del concetto di punto di equilibrio; esempi di insiemi invarianti:

- qualsiasi punto di equilibrio
- il dominio di attrazione di un punto di equilibrio AS
- qualsiasi traiettoria del sistema (purché questo sia tempo-invariante)
- $\mathbb{R}^n$ stesso

idea di base

se $V(x)$ è DP (cioè $V(x) > 0$) e $\dot{V}(x)$ è SDN (cioè $\dot{V}(x) \leq 0$) in un intorno di x_e, $V(x)$ deve tendere a un valore limite $\Rightarrow$ anche $\dot{V}(x)$ deve tendere a zero, almeno in certe condizioni

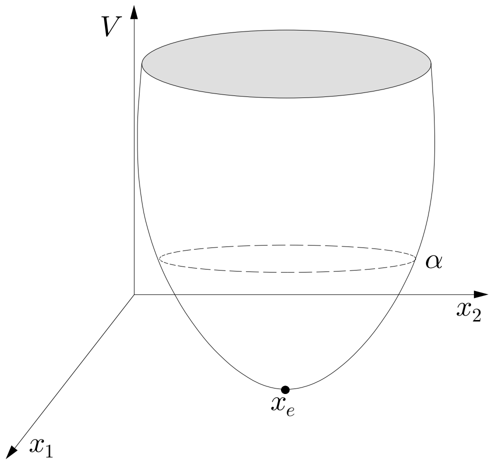
Teorema locale dell'insieme invariante [La Salle]

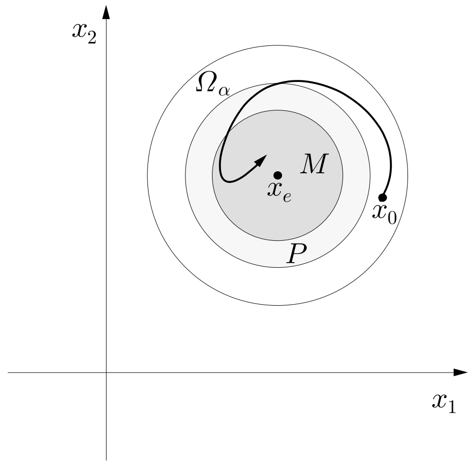
per un sistema $\dot{x} = f(x)$, si assuma che esista una funzione $V(x) \in C^1$ tale che:

1. la regione $\Omega_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \alpha\}$ sia limitata, per qualche $\alpha > 0$
2. $\dot{V}(x) \leq 0$ in Ω_α

allora, ogni traiettoria del sistema che parte da Ω_α tende asintoticamente all'insieme M, il **massimo insieme invariante** contenuto in P, l'insieme dei punti di Ω_α dove $\dot{V} = 0$

qui: massimo insieme invariante contenuto in P = unione di tutti i sottoinsiemi invarianti di P





si noti come il criterio di AS sia un caso particolare di questo teorema con $P = M = x_e$

es: riprendiamo in esame il pendolo con la prima funzione di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + g(1 - \cos x_1) \qquad \text{DP in qualsiasi intorno dell'origine}$$

si ha

$$\dot{V}(x) = x_2\dot{x}_2 + g \sin x_1 \dot{x}_1 = -x_2^2 \qquad \text{SDN in qualsiasi intorno dell'origine}$$

dunque $x_e^{\text{down}} = (0, 0)$ è un pde stabile per il pendolo; ma il teorema dell'insieme invariante **dice qualcosa in più**

l'insieme P è costituito dagli stati per cui $\dot{V} = 0$, ovvero dai punti aventi $x_2 = 0$; qual è il massimo insieme invariante M contenuto in P?

la dinamica del sistema in P è

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= -g \sin x_1 \end{aligned}$$

se $x_1 \neq 0$, si ha $\dot{x}_2 \neq 0$ e quindi x_2 varia, facendo uscire la traiettoria $x(t)$ dall'insieme P

$\Rightarrow$ l'insieme M consiste solo dell'origine, cui dunque converge qualsiasi traiettoria

dunque x_e^{down} è un pde **asintoticamente stabile** per il pendolo

nota: poiché secondo il teorema dall'insieme invariante la regione Ω_α deve essere limitata, si deve prendere $\alpha < 2g$ (si noti che Ω_{2g} è illimitata, poiché include tutto l'asse x_1); ciò esclude dall'analisi il punto di equilibrio $x_e^{\text{up}} = (\pi, 0)$ (pendolo verticale verso l'alto), e quindi la convergenza all'origine non è globale (com'è ovvio) ∎

l'esempio precedente mostra come l'uso del teorema dell'insieme invariante consenta, in certi casi, di concludere la stabilità asintotica anche in presenza di una $\dot{V}$ SDN

si può quindi enunciare il seguente

Corollario

un pde x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è **asintoticamente stabile** se esiste una funzione $V(x) \in C^1$ tale che

1. $V(x)$ sia DP in un insieme D che contiene x_e al suo interno
2. $\dot{V}(x)$ sia SDN nello stesso insieme
3. il massimo insieme invariante M contenuto in P (l'insieme dei punti di D per cui $\dot{V} = 0$) contenga solo x_e

inoltre, detta Ω la più ampia regione definita dalla $V(x) \leq \alpha$, $\alpha > 0$, che sia contenuta in D, si ha che Ω costituisce una stima del **dominio di attrazione** per x_e

- rispetto al criterio diretto di AS di Lyapunov, questo corollario 'rilassa' la condizione 2 (DN $\rightarrow$ SDN) ma aggiunge la 3; inoltre la condizione 1 del corollario garantisce la condizione 1 del Teorema Locale dell'Insieme Invariante

- l'insieme D di per sé non è una stima del dominio di attrazione (in sostanza, alcune delle curve di livello che cadono in D possono essere aperte, e dunque esso risulterebbe non invariante) il teorema dell'insieme invariante ammette ovviamente una versione globale

Teorema globale dell'insieme invariante [La Salle]

per un sistema $\dot{x} = f(x)$, si assuma che esista una funzione $V(x) \in C^1$ tale che:

1. $V(x)$ sia radialmente illimitata
2. $\dot{V}(x) \leq 0$ in tutto $I\!R^n$

allora, ogni traiettoria del sistema tende asintoticamente all'insieme M, il **massimo insieme invariante** contenuto in P, l'insieme dei punti di $I\!R^n$ dove $\dot{V} = 0$

nota: il fatto che $V(x)$ sia radialmente illimitata garantisce che qualsiasi regione $\Omega_\alpha = \{x \in I\!R^n : V(x) < \alpha\}$, con $\alpha > 0$, sia limitata

cui corrisponde il seguente

Corollario

un pde x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è **globalmente asintoticamente stabile** se esiste una funzione $V(x) \in C^1$ tale che

1. $V(x)$ sia DP in qualsiasi intorno di x_e e radialmente illimitata
2. $\dot{V}(x)$ sia SDN in qualsiasi intorno di x_e
3. il massimo insieme invariante M contenuto in P (l'insieme dei punti di $I\!R^n$ per cui $\dot{V} = 0$) contenga solo x_e

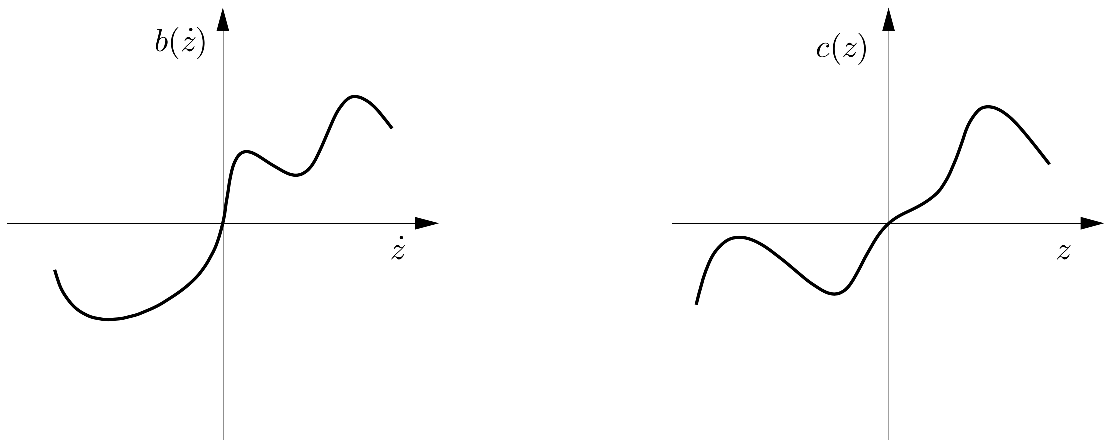
es: si consideri la famiglia di sistemi non lineari del secondo ordine descritta da

$$\ddot{z} + b(\dot{z}) + c(z) = 0$$

dove le funzioni generiche b e c sono continue e verificano le condizioni

$$\dot{z}b(\dot{z}) > 0, \forall \dot{z} \neq 0 \qquad zc(z) > 0, \forall z \neq 0$$

si noti che queste condizioni, insieme alla continuità, implicano che $b(0) = 0$, $c(0) = 0$



fanno parte di questa famiglia i sistemi meccanici massa-molla-smorzatore (con molla e smorzatore non lineari, rappresentati rispettivamente dalla forza di richiamo elastica $c(z)$ e dalla forza di attrito $b(\dot{z})$) e i circuiti elettrici RLC (con resistenza $b(\dot{z})$ e capacità $c(z)$ non lineari) si consideri il punto di equilibrio $x_e = (z_e, \dot{z}_e) = (0, 0)$; una candidata di Lyapunov è l'energia totale del sistema (ad esempio, cinetica + potenziale)

$$V(x) = \frac{1}{2}\dot{z}^2 + \int_0^z c(y)dy$$

che è DP in qualsiasi intorno di x_e

si ha

$$\dot{V}(z) = \dot{z}\ddot{z} + c(z)\dot{z} = -\dot{z}b(\dot{z}) - \dot{z}c(z) + c(z)\dot{z} = -\dot{z}b(\dot{z})$$

che nelle ipotesi del problema è SDN in qualsiasi intorno di $x_e = 0$

l'insieme P è costituito dagli stati per cui $\dot{V} = 0$, ovvero dai punti aventi $\dot{z} = 0$; qual è il massimo insieme invariante M contenuto in P?

la dinamica del sistema in P è

$$\ddot{z} = -c(z)$$

se $z \neq 0$, si ha $\ddot{z} \neq 0$ e quindi $\dot{z}$ varia, facendo uscire la traiettoria $x(t)$ dall'insieme P $\Rightarrow$ l'insieme M consiste solo dell'origine, cui dunque converge qualsiasi traiettoria

dunque l'origine è un pde **asintoticamente stabile** per il sistema

inoltre, se $\int_0^z c(y)dy$ è illimitato per $|z| \to \infty$, $V(x)$ risulta essere radialmente illimitata, e quindi x_e è un pde **globalmente asintoticamente stabile** ■

Stabilità dei sistemi non lineari: criterio indiretto di Lyapunov

idea di base

> analizzare la stabilità dell'**approssimazione lineare** del sistema intorno al punto di equilibrio x_e: in certe condizioni, è possibile trarre da ciò conclusioni sulla stabilità o meno di x_e **per il sistema originario**

si consideri il generico sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x) \qquad\qquad \text{con } x_e \text{ pde, cioè } f(x_e) = 0$$

nell'ipotesi che $f \in C^\infty$, la si può sviluppare in serie di Taylor nell'intorno di x_e

$$f(x) = f(x_e) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_e}(x - x_e) + h(x - x_e) = J(x_e)(x - x_e) + h(x - x_e)$$

dove $h(x - x_e)$ raccoglie gli (infiniti) termini di grado superiore al primo e $J(x_e)$ è la matrice Jacobiana di f rispetto a x, calcolata in x_e

effettuiamo una trasformazione di coordinate

$$\xi = x - x_e \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\xi} = \dot{x} = f(x) = J(x_e)\xi + h(\xi)$$

nell'intorno di x_e, i termini di ordine superiore sono trascurabili rispetto a quello lineare $\Rightarrow$ si può associare al sistema non lineare originario la seguente **approssimazione lineare**

$$\boxed{\dot{\xi} = J(x_e)\xi}$$

che è naturalmente tanto più accurata quanto più lo stato è prossimo a x_e

l'analisi dell'approssimazione lineare $\dot{\xi} = J(x_e)\xi$ conduce a risultati interessanti sul sistema non lineare originario $\dot{x} = f(x)$

Teorema

se la matrice $J(x_e)$ è **non singolare**, x_e è un pde **isolato** del sistema non lineare

dim per assurdo: se ciò non fosse vero, in qualsiasi intorno di x_e cadrebbe almeno un punto x'_e tale che $f(x'_e) = f(x_e) = 0$; si avrebbe allora

$$f(x'_e) = f(x_e) + J(x_e)(x'_e - x_e) + h(x'_e - x_e) = 0 \implies J(x_e)(x'_e - x_e) + h(x'_e - x_e) = 0$$

poiché x'_e varia, tale condizione richiede di fatto che siano nulli entrambi gli addendi, in particolare, deve essere $J(x_e)(x'_e - x_e) = 0$, che però contraddice il fatto che $J(x_e)$ sia non singolare ■

il viceversa non è vero; può accadere che x_e sia isolato e $J(x_e)$ risulti singolare

es: si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \end{aligned}$$

il cui unico pde è l'origine; tuttavia

$$J(x_e) = \left. \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|_{x_e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è singolare ■

il risultato più forte è il seguente

Teorema (**criterio indiretto di stabilità di Lyapunov**)

si consideri l'approssimazione lineare $\dot{\xi} = J(x_e)\xi$ di un sistema non lineare $\dot{x} = f(x)$ intorno a un suo punto di equilibrio x_e

1. se l'approssimazione lineare è asintoticamente stabile (cioè, se tutti gli autovalori di $J(x_e)$ hanno parte reale negativa), x_e è un pde **asintoticamente stabile** per il sistema non lineare
2. se l'approssimazione lineare è instabile a causa del fatto che almeno un autovalore di $J(x_e)$ ha parte reale positiva, x_e è un pde **instabile** per il sistema non lineare

dim basata sull'applicazione del criterio diretto di Lyapunov: in particolare, si dimostra che una funzione di Lyapunov per l'approssimazione lineare risulta essere tale anche per il sistema non lineare

comunque: la tesi è intuitiva per **continuità** ■

- la stabilità asintotica dell'origine dell'approssimazione lineare (che è sempre globale) consente di concludere solo la stabilità asintotica **locale** di x_e per il sistema non lineare

- se l'approssimazione lineare è semplicemente stabile o instabile a causa della presenza di autovalori a parte reale nulla con molteplicità geometrica maggiore di 1 (**caso critico**) non si può concludere **nulla** sulla natura del pde x_e per il sistema non lineare (sono decisivi i termini di ordine superiore al primo)

es: riprendiamo ancora in esame il pendolo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -g\sin x_1 - x_2\end{aligned}$$

la matrice Jacobiana è

$$J(x) = \frac{df}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g\cos x_1 & -1 \end{pmatrix}$$

- nell'intorno del pde $x_e^{\text{down}} = (0,0)$ si ha

$$J_e^{\text{down}}(x) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_e^{\text{down}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & -1 \end{pmatrix}$$

  il cui polinomio caratteristico è $\lambda^2 + \lambda + g$; quindi l'approssimazione lineare del pendolo nell'intorno di x_e^{down} è AS

  $\Longrightarrow$ x_e^{down} è un pde asintoticamente stabile per il pendolo

- nell'intorno del pde $x_e^{\text{up}} = (\pi, 0)$ si ha

$$J_e^{\text{up}}(x) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_e^{\text{up}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & -1 \end{pmatrix}$$

  il cui polinomio caratteristico è $\lambda^2 + \lambda - g$; quindi l'approssimazione lineare del pendolo nell'intorno di x_e^{up} è instabile

  $\Longrightarrow$ x_e^{up} è un pde instabile per il pendolo ■

spesso, tuttavia, il criterio indiretto **non è risolutivo** perché ci si trova nel caso critico; in questi casi si deve ricorrere al criterio diretto, che è più potente (e, con l'aiuto del teorema dell'insieme invariante, consente anche di stabilire l'eventuale dominio di attrazione, che non è analizzabile con metodo indiretto)

es: si consideri il sistema non lineare

$$\dot{x} = -x^3$$

avente come unico pde $x_e = 0$

la Jacobiana è in questo caso uno scalare

$$J(x_e) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_e} = -3x^2\big|_{x_e} = 0$$

e dunque l'approssimazione lineare del sistema intorno a x_e è $\dot{\xi} = 0 \Rightarrow$ siamo nel **caso critico**

si consideri allora la seguente candidata di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{DP in qualsiasi intorno dell'origine, e radialmente illimitata}$$

si ha

$$\dot{V}(x) = -x^4 \qquad \text{DN in qualsiasi intorno dell'origine}$$

$\Rightarrow$ x_e è dunque un pde GAS per il sistema ■