

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A (giallo)Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2° anno**

Cognome :

Nome :

VALUTAZIONE

Per gli esercizi 1,2,3,4:

ogni risposta CORRETTA vale **1 PUNTO** eogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5 PUNTI** (VALORE NEGATIVO),nessuna risposta vale **0 PUNTI**.

Per gli esercizi 5,6,7:

ogni risposta CORRETTA vale **0,25 PUNTI** eogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25 PUNTI** (VALORE NEGATIVO),nessuna risposta vale **0 PUNTI**.**Esercizio 1.** (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + \sqrt{2}x_2x_3 + \sqrt{2}x_2 + 4x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa in \mathfrak{R}^3 .

VERO

X

FALSO

2. Il punto $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -2)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

VERO

X

FALSO

3. Il punto $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -2)^T$ è un minimo globale.

VERO

X

FALSO

4. Nel punto $x^0 = (-1, 0, -1)^T$ il passo ottenuto con una ricerca di linea esatta lungo la direzione $d = (2, 0, 1)^T$ è $\alpha^* = \frac{1}{3}$.

VERO

X

FALSO

5. Nel punto $x^0 = (-1, 0, -1)^T$ una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente accetta passo $\alpha = 1$ per ogni $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$.

VERO

FALSO

X

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & -x_1^2 \leq x_2 \leq x_1^2 \\ & -1 \leq x_1 \leq 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è di regolarità per i vincoli

VERO

FALSO **X**

2. Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa le condizioni di *KKT*.

VERO **X**

FALSO

3. Il punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non soddisfa le condizioni di *KKT*.

VERO **X**

FALSO

4. Il punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine.

VERO **X**

FALSO

5. Il punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è una soluzione globale.

VERO **X**

FALSO

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & -4x_1 + x_2 - 2x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

1. Il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & 6u_1 + 4u_2 \\ & u_1 + 2u_2 \geq -4 \\ & u_1 + u_2 \geq 1 \\ & u_1 + u_2 \geq -2 \\ & u_1 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO **X**

FALSO

2. Il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & 6u_1 + 4u_2 \\ & u_1 + 2u_2 \geq -4 \\ & u_1 + u_2 \geq 1 \\ & u_1 + u_2 \geq -2 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO

FALSO

X

3. I punti $\bar{x} = (0, 4, 2)^T$ e $\bar{u} = (1, 0)^T$ sono ammissibili rispettivamente per il problema primale e per il duale e risulta $0 \leq c^T x^* \leq 6$.

VERO

FALSO

X

4. Il punto $u^* = (0, 1)^T$ è ottimo per il duale ed esiste una soluzione ottima per il problema primale.

VERO

X

FALSO

5. Il problema primale è vuoto.

VERO

FALSO

X

Esercizio 4. (Punteggio massimo = 3) Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Sia data la seguente funzione obiettivo:

$$\min \sum_{i \in T} \sum_{j \in S} \sqrt{x_{ij}}$$

Supponendo di aver dichiarato insiemi e variabili nel seguente modo:

```
set T;  
set S;  
var x{T,S};
```

una possibile traduzione AMPL della funzione obiettivo è la seguente:

```
minimize funzione:sum{i in S,j in T}sqrt(x[i,j]);
```

VERO

FALSO

X

2. Siano dati i seguenti vincoli:

$$\sum_{j \in S} y_j - c_i = 1, \forall i \in T$$

dove c_i sono parametri, mentre y_j sono variabili, allora le seguenti istruzioni AMPL per esprimere tali vincoli sono corrette:

```
set T;  
set S;  
param c{T};  
var y{S};  
:  
s.t. vincoli{i in T}:sum{j in S}y[j]-c[i]=1;
```

VERO

FALSO

3. Si Supponga che i due insiemi T e S siano definiti come segue:

$$T = \{D, E, F\}$$

$$S = \{A, B, C\}$$

Sia dato un parametro par i cui valori sono riportati nella seguente tabella:

par	D	E	F
A	4	5	4
B	3	12	2
C	6	1	11

Supponendo che nel file .mod si abbia la seguente dichiarazione

```
set T;  
set S;  
param par{S,T};
```

allora una possibile assegnazione del parametro par è la seguente:

```
set T:=D E F;  
set S:=A B C;
```

```
param par: A B C:=  
D 4 5 4  
E 3 12 2  
F 6 1 11
```

VERO

FALSO

Esercizio 5. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione

$$\min_{R^n} f(x).$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se \bar{x} è un punto tale che $\nabla^2 f(\bar{x}) \not\geq 0$ (non è semidefinita positiva), allora \bar{x} non è minimo locale.

VERO

FALSO

2. Se \bar{x} è un minimo globale, allora $\nabla^2 f(\bar{x}) \succ 0$ (definita positiva).

VERO

FALSO

3. Se in \bar{x} risulta $\nabla^2 f(\bar{x}) \succeq 0$, si può sempre definire la direzione di Newton ed è di discesa.

VERO

FALSO

4. Il punto x^{k+1} generato a partire da x^k lungo la direzione d^k utilizzando una ricerca di linea esatta soddisfa sempre

$$\nabla f(x^{k+1})^T d^k = 0$$

VERO FALSO

Esercizio 6. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{con} \quad & Ax \geq b \end{aligned}$$

con A matrice $m \times n$, $b \in R^m$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa allora il problema è convesso.

VERO FALSO

2. La funzione

$$f(x) - \epsilon \sum_{i=1}^m \log(a_i^x - b_i)$$

è una funzione di penalità interna per il problema.

VERO FALSO

3. Sia \bar{x} un punto ammissibile e $f(x)$ convessa. Se \bar{x} soddisfa le condizioni di KKT, allora \bar{x} è un minimo globale.

VERO FALSO

4. Se $m > n$, allora l'insieme ammissibile non è regolare.

VERO FALSO

Esercizio 7. (Punteggio massimo = 1) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{con} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono m tutte vincolate ad essere non negative.

VERO FALSO

2. Se il problema duale ammette soluzione ottima finita u^* , allora allora risulta $c^T x \leq c^T x^* \leq b^T u^*$ per ogni x tale che $Ax \leq b$.

VERO FALSO

3. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A^T \bar{u} = c$ e $\bar{u} \geq 0$, allora $\bar{u}^T (b - Ax) = 0$ qualunque sia x .

VERO FALSO

4. Se il problema primale è illimitato, allora il problema duale anche è illimitato.

VERO FALSO

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B (verde)Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2° anno**

Cognome :

Nome :

VALUTAZIONE

Per gli esercizi 1,2,3,4:

ogni risposta CORRETTA vale **1 PUNTO** eogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5 PUNTI** (VALORE NEGATIVO),nessuna risposta vale **0 PUNTI**.

Per gli esercizi 5,6,7:

ogni risposta CORRETTA vale **0,25 PUNTI** eogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25 PUNTI** (VALORE NEGATIVO),nessuna risposta vale **0 PUNTI**.**Esercizio 1.** (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + \sqrt{2}x_2x_3 - \sqrt{2}x_2 - 4x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è coerciva.

VERO

X

FALSO

2. Il punto $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

VERO

X

FALSO

3. Il punto $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)^T$ è l'unico punto di minimo globale.

VERO

X

FALSO

4. Nel punto $x^0 = (-1, 0, 1)^T$ il passo ottenuto con una ricerca di linea esatta lungo la direzione $d = (1, 0, 2)^T$ è $\alpha^* = -\frac{1}{13}$.

VERO

X

FALSO

5. Le direzioni $d^0 = (1, 0, 2)^T$ e $d^1 = (-6, 0, 1)^T$ sono coniugate tra loro.

VERO

X

FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & -x_1^2 \leq x_2 \leq x_1^2 \\ & -1 \leq x_1 \leq 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è di regolarità per i vincoli

VERO FALSO

2. Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non soddisfa le condizioni di *KKT*.

VERO FALSO

3. Il punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa le condizioni di *KKT*.

VERO FALSO

4. Il punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine.

VERO FALSO

5. Il punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione globale.

VERO FALSO

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & -4x_1 + x_2 - 2x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

1. Il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & 6u_1 + 4u_2 \\ & u_1 + 2u_2 \geq -4 \\ & u_1 + u_2 \geq 1 \\ & u_1 + u_2 = -2 \\ & u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO FALSO

2. Il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & 6u_1 + 4u_2 \\ & u_1 + 2u_2 \geq -4 \\ & u_1 + u_2 \geq 1 \\ & u_1 + u_2 \geq -2 \\ & u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO

FALSO **X**

3. I punti $\bar{x} = (2, 2, 0)^T$ e $\bar{u} = (1, 0)^T$ sono ammissibili rispettivamente per il problema primale e per il duale e risulta $-6 \leq c^T x^* \leq 6$.

VERO

FALSO **X**

4. Il punto $u^* = (0, 1)^T$ è ottimo per il duale ed esiste una soluzione ottima per il problema primale.

VERO

FALSO **X**

5. Il problema duale è vuoto.

VERO **X**

FALSO

Esercizio 4. (Punteggio massimo = 3) Siano x_i con $i \in INS$ le variabili di un generico problema e supponiamo di dover dichiarare in AMPL i seguenti vincoli

$$Lower \leq x_i \leq Upper, \forall i \in INS$$

dove $Lower$ e $Upper$ sono due parametri.

Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Le seguenti istruzioni, nel file `.mod`, sono corrette

```
set INS;
param Upper;
param Lower;
var x{INS}>=Lower,<=Upper;
:
```

VERO **X**

FALSO

2. Le seguenti istruzioni, nel file `.mod`, sono corrette

```
set INS;
param Upper;
param Lower;
var x{INS};
:
s.t. vinc1{i in INS}:x[i]>=Lower;
s.t. vinc2{i in INS}:x[i]<=Upper;
```

VERO **X**

FALSO

3. Le seguenti istruzioni, nel file .mod, sono corrette

```

set INS;
param Upper;
var x{INS}>=Lower;
param Lower;
:
s.t. vinc1{i in INS}:x[i]<=Upper;

```

VERO

FALSO **X**

Esercizio 5. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione

$$\min_{R^n} f(x).$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa, allora ammette sempre minimo.

VERO

FALSO **X**

2. Se \bar{x} è un minimo globale, allora $\nabla f(\bar{x}) = 0$ e $\nabla^2 f(\bar{x}) \succeq 0$.

VERO **X**

FALSO

3. Se in \bar{x} risulta $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$, si può sempre trovare una direzione d di discesa per cui risulti $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$.

VERO **X**

FALSO

4. Il metodo di Newton (puro) è globalmente convergente con rapidità di quadratica.

VERO

FALSO **X**

Esercizio 6. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con A matrice $m \times n$, $b \in R^m$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa allora il problema è convesso.

VERO

FALSO **X**

2. La funzione

$$-f(x) + \frac{1}{\epsilon} \left[\sum_{j=1}^m (a_j x - b_j)^2 + \sum_{i=1}^n \min\{0, x_i\}^2 \right]$$

è una funzione di penalità esterna per il problema.

VERO **X**

FALSO

3. Sia \bar{x} un punto ammissibile. Se \bar{x} è un minimo locale, allora soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine.

VERO

FALSO **X**

4. Le condizioni di KKT sono necessarie senza ipotesi sui vincoli.

VERO

FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. I vincoli del problema duale sono n di disuguaglianza.

VERO **X**

FALSO

2. Se il problema primale ammette soluzione ottima finita x^* , allora esiste una soluzione ammissibile \bar{u} del problema duale (P) tale che $c^T x^* = b^T \bar{u}$.

VERO **X**

FALSO

3. Se $\bar{x} \in R^n$ è un punto tale che $A\bar{x} = b$, e $\bar{x} \geq 0$ allora $c^T \bar{x} \leq b^T u$ per ogni u ammissibile per il problema duale.

VERO **X**

FALSO

4. Se il problema duale è vuoto, allora il problema primale ha insieme ammissibile vuoto oppure è illimitato.

VERO **X**

FALSO