ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A (giallo)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2º anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4:
ogni risposta CORRETTA vale **1** PUNTO e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.
Per gli esercizi 5,6,7:
ogni risposta CORRETTA vale **0,25** PUNTI e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ 2x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - x_1x_3 + x_2x_3 + 4x_1 + 2x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa in $\Re^3$.

   VERO **X** FALSO

2. Il punto $(-1,\ -1,\ 0)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

   VERO **X** FALSO

3. Il punto $(-1,\ -1,\ 0)^T$ è un minimo locale stretto.

   VERO **X** FALSO

4. Nel punto $x^0 = (-1,\ 1,\ 0)^T$ il passo ottenuto con una ricerca di linea esatta lungo la direzione del metodo del gradiente è $\alpha^* = \frac{5}{13}$

   VERO **X** FALSO

5. Le direzioni $d^0 = (0,\ 4,\ 2)^T$ e $d^1 = (5,\ 1,\ 0)^T$ sono coniugate tra loro.

   VERO **X** FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_2 \geq x_1^2 \\ & x_2 \leq 1 - x_1^2 \\ & x_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

   VERO **X** | FALSO

2. Il punto $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ è di regolarità per i vincoli

   VERO | FALSO **X**

3. Il punto $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ soddisfa le condizioni di KKT.

   VERO | FALSO **X**

4. I moltiplicatori $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ associati rispettivamente al primo, secondo e terzo vincolo, non soddisfano le condizioni di KKT

   VERO | FALSO **X**

5. Se nel terzo vincolo a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ si sostituisce $\frac{2}{\sqrt{2}}$, la soluzione ottima migliora.

   VERO | FALSO **X**

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - x_2 \\ & -2x_1 - 3x_2 \leq -12 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

1. Il problema

   $$\begin{aligned} \min \quad & -12u_1 - 8u_2 \\ & -2u_1 - 2u_2 \geq -1 \\ & -3u_1 - u_2 \geq -1 \\ & u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

   VERO **X** | FALSO

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & 12u_1 + 8u_2 \\ & 2u_1 + 2u_2 \leq 1 \\ & 3u_1 + u_2 \leq 1 \\ & u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO **X** FALSO

3. I punti $\bar{x} = (0,\ 6)^T$ e $\bar{u} = (0,\ \frac{1}{2})^T$ sono ammissibili rispettivamente per il problema primale e per il duale ma non ottimi.

VERO **X** FALSO

4. Risulta $-6 \leq c^T x^* \leq 4$

VERO **X** FALSO

5. La coppia $x^* = (3,\ 2)^T$, $u^* = (\frac{1}{4},\ \frac{1}{4})^T$ è ottima rispettivamente per il problema primale il per il problema duale.

VERO **X** FALSO

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Siano x_i con $i \in INS$ le variabili di un generico problema e supponiamo di dover dichiarare in AMPL i seguenti vincoli

$$0 \leq x_i \leq Upper \quad , \forall i \in INS$$

dove *Upper* è un parametro.

Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Le seguenti istruzioni, nel file `.mod`, sono corrette

```
set INS;
var x{INS}>=0,<=Upper;
param Upper;
⋮
```

VERO FALSO **X**

2. Le seguenti istruzioni, nel file `.mod`, sono corrette

```
set INS;
param Upper;
var x{INS};
⋮
s.t.  vinc1{i in INS}:x[i]>=0;
s.t.  vinc2{i in INS}:x[i]<=Upper;
```

VERO **X** FALSO

3. Le seguenti istruzioni, nel file `.mod`, sono corrette

```
set INS;
param Upper;
var x{INS}<=Upper;
⋮
s.t.  vinc1{i in INS}:x[i]>=0;
```

VERO **X** FALSO

Esercizio 5. (**Punteggio massimo = 1**)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione

$$\min_{R^n} \; f(x).$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $\bar{x}$ è un punto tale che $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$, allora $\bar{x}$ non è minimo locale.

   VERO **X** FALSO

2. Se $\bar{x}$ è minimo locale, allora $\nabla^2 f(\bar{x}) \succ 0$ (definita positiva).

   VERO FALSO **X**

3. Se in $\bar{x}$ risulta $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$, si può sempre definire la direzione di Newton ed è di discesa.

   VERO FALSO **X**

4. Se un algoritmo per la minimizzazione non vincolata converge con rapidità di convergenza quadratica, allora trova il minimo in due passi.

   VERO FALSO **X**

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & h(x) = 0 \end{array}$$

con $h : R^n \rightarrow \; R^p$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e $h_i(x)$ sono convesse per ogni $j = 1, \dots, p$ allora il problema è convesso.

   VERO FALSO **X**

2. La funzione

   $$f(x) + \epsilon \sum_{i=1}^{m} log(h_i(x))$$

   è una funzione di penalità interna per il problema.

   VERO FALSO **X**

3. Sia $\bar{x}$ un punto ammissibile NON regolare. Se soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine, allora $\bar{x}$ è un minimo locale stretto.

   VERO **X** FALSO

4. Se $p > n$, allora l'insieme ammissibile non è regolare.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (P)$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono m tutte vincolate ad essere non negative.

VERO **X**	FALSO

2. Se il problema duale ammette soluzione ottima finita u^*, allora esiste una soluzione ammissibile $\bar{x}$ del problema primale (P) tale che $c^T \bar{x} = b^T u^*$.

VERO	FALSO **X**

3. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A^T \bar{u} \geq -c$ e $\bar{u} \geq 0$, allora $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$.

VERO	FALSO **X**

4. Se il problema primale è vuoto, allora il problema duale deve avere insieme ammissibile vuoto.

VERO	FALSO **X**

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B (verde)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2º anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4:
ogni risposta CORRETTA vale **1** PUNTO e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.
Per gli esercizi 5,6,7:
ogni risposta CORRETTA vale **0,25** PUNTI e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ 2x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - x_1x_3 + x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è coerciva in $\Re^3$.

   VERO **X** FALSO

2. Il punto $(1,\ -5,\ 6)^T$ non soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

   VERO FALSO **X**

3. Il punto $(1,\ -5,\ 6)^T$ è l'unico punto di minimo globale.

   VERO **X** FALSO

4. Nel punto $x^0 = (-1,\ 1,\ 0)^T$ il passo ottenuto con una ricerca di linea esatta lungo la direzione del metodo del gradiente è $\alpha^* = \frac{6}{19}$

   VERO FALSO **X**

5. Le direzioni $d^0 = (2,\ -4,\ -2)^T$ e $d^1 = (1,\ 1,\ 0)^T$ NON sono coniugate tra loro.

   VERO FALSO **X**

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_2 \geq x_1^2 \\ & x_2 \leq 1 - x_1^2 \\ & x_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema non è convesso. | VERO | FALSO **X** |
2. Il punto $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ non è di regolarità per i vincoli
   | VERO **X** | FALSO |
3. Il punto $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ non soddisfa le condizioni di KKT.
   | VERO **X** | FALSO |
4. I moltiplicatori $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ associati rispettivamente al primo, secondo e terzo vincolo, soddisfano le condizioni di KKT
   | VERO **X** | FALSO |
5. Se nel terzo vincolo a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ si sostituisce $\frac{2}{\sqrt{2}}$, la soluzione ottima non migliora.
   | VERO **X** | FALSO |

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - x_2 \\ & -2x_1 - 3x_2 \leq -12 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Il problema

   $$\begin{aligned} \max \quad & 12u_1 + 8u_2 \\ & 2u_1 + 2u_2 = 1 \\ & 3u_1 + u_2 \leq 1 \\ & u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).
   | VERO **X** | FALSO |

2. Il problema
3. Il problema

$$\begin{array}{ll} \min & -12u_1 - 8u_2 \\ & -2u_1 - 2u_2 \geq -1 \\ & -3u_1 - u_2 \geq -1 \\ & u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO | FALSO **X**

4. I punti $\bar{x} = (-1,\ 10)^T$ e $\bar{u} = (0,\ \frac{1}{2})^T$ sono ottimi rispettivamente per il problema primale e per il duale.

VERO | FALSO **X**

5. Sia u^* la soluzione ottima del problema duale, risulta $-9 \leq b^T u^* \leq -4$

VERO **X** | FALSO

6. Il punto $u^* = (\frac{1}{4},\ \frac{1}{4})^T$ è ottimo per il duale ed esiste una soluzione ottima x^* per il problema primale.

VERO **X** | FALSO

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Sia data la seguente funzione obiettivo:

$$\min \sum_{i \in T} \sum_{j \in S} x_{ij}^3$$

Supponendo di aver dichiarato insiemi e variabili nel seguente modo:

```
set T;
set S;
var x{T,S};
```

una possibile traduzione AMPL della funzione obiettivo è la seguente:

```
minimize funzione:sum{i in T,j in S}(x[i,j]**3);
```

VERO **X** | FALSO

2. Siano dati i seguenti vincoli:

$$\sum_{i \in T} x_{ij} + y_j = 1 \quad, \forall j \in S$$

dove x_{ij} e y_j sono variabili. Supponendo di aver correttamente dichiarato insiemi e variabili un possibile modo per esprimere tali vincoli in AMPL è il seguente

```
s.t.  vincoli{i in T, j in S}:x[i,j]+y[j]=1;
```

VERO | FALSO **X**

par	A	B	C
D	4	5	20
E	3	12	1

3. Si Supponga che i due insiemi T e S siano definiti come segue:

$$T = \{A, B, C\}$$
$$S = \{D, E\}$$

Sia dato un parametro *par* i cui valori sono riportati nella seguente tabella:

Supponendo che nel file .mod si abbia la seguente dichiarazione

```
set T;
set S;
param par{T,S};
```

allora una possibile assegnazione del parametro *par* è la seguente:

```
set T:=A B C;
set S:=D E;
param par:= A D 4   A E 3   B D 5   B E 12   C D 20   C E 1;
```

VERO **X** FALSO

Esercizio 5. (**Punteggio massimo = 1**)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione

$$\min_{R^n} \; f(x).$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $\bar{x}$ è un punto tale che $\nabla f(\bar{x}) = 0$, allora $\bar{x}$ è minimo locale.

VERO FALSO **X**

2. Se $\nabla^2 f(\bar{x}) \not\succeq 0$ (semidefinita positiva), allora $\bar{x}$ non è minimo locale.

VERO **X** FALSO

3. Se in $\bar{x}$ risulta $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$, si può sempre definire la direzione del metodo gradiente ed è di discesa.

VERO **X** FALSO

4. Se un algoritmo per la minimizzazione non vincolata converge con rapidità di convergenza superlineare, allora converge anche con rapidità quadratica.

VERO FALSO **X**

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ & h(x) = 0 \end{array}$$

con $h : \; R^n \rightarrow \; R^p$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e $h_i(x)$ sono lineari per ogni $j = 1, \dots, p$ allora il problema è convesso.

VERO	FALSO **X**

2. La funzione

$$-f(x) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{m} h_i^2(x)$$

è una funzione di penalità esterna per il problema.

VERO **X**	FALSO

3. Sia $\bar{x}$ un punto ammissibile regolare. Se soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine, allora $\bar{x}$ è un minimo locale.

VERO	FALSO **X**

4. Se $p \leq n$, allora l'insieme ammissibile è sempre regolare.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono m tutte vincolate ad essere non negative.

VERO	FALSO **X**

2. Se il problema primale ammette soluzione ottima finita x^*, allora il valore ottimo della funzione obiettivo del problema duale è $< c^T x^*$.

VERO	FALSO **X**

3. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A^T \bar{u} \geq c$, allora $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$.

VERO	FALSO **X**

4. Se il problema duale è vuoto, allora il problema primale ha insieme ammissibile vuoto oppure è illimitato.

VERO **X**	FALSO