ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A (giallo)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2° anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4: le risposte CORRETTE valgono **1** PUNTO e quelle SBAGLIATE **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO). Per gli esercizi 5,6,7: le risposte CORRETTE valgono **0,25** PUNTI e quelle SBAGLIATE **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ x_1^2 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2 x_1 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2 + \frac{3}{2} x_1 - 4x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa in $\Re^2$.

   VERO | FALSO **X**

2. Il punto $(0,\ 1)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

   VERO **X** | FALSO

3. Il punto $(0,\ 1)^T$ è un minimo locale stretto.

   VERO **X** | FALSO

4. L'approssimazione quadratica della funzione nell'intorno del punto $(1,\ -1)^T$ è strettamente convessa.

   VERO | FALSO **X**

5. Nel punto $(1,\ -1)^T$ la direzione $d = (0,\ 1)^T$ è di discesa e il metodo del gradiente con ricerca di linea di Armijo accetta passo $\alpha = 1$ (per ogni valore del parametro $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$)

   VERO | FALSO **X**

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_2 \geq x_1^2 \\ & x_2 \leq x_1^2 + 1 \\ & x_2 \leq 4 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

VERO	FALSO **X**

2. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è di regolarità per i vincoli

VERO **X**	FALSO

3. Il punto $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix}$ soddisfa le condizioni di KKT.

VERO **X**	FALSO

4. I moltiplicatori $\lambda_1 = 1/4, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 5/4$ associati rispettivamente al primo, secondo e terzo vincolo, non soddisfano le condizioni di KKT

VERO	FALSO **X**

5.

6. Il punto $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix}$ non soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 - 6x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 4 \\ & -x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

1. Il problema

   $$\begin{aligned} \max \quad & 4u_1 - u_2 \\ & u_1 \leq \tfrac{1}{2} \\ & 6u_1 - u_2 \leq -6 \\ & u_1 + u_2 \leq 2 \\ & u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO **X**	FALSO

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & 4u_1 - u_2 \\ & 6u_1 - u_2 \leq -6 \\ & u_1 + u_2 \leq 2 \\ & 2u_1 \leq 1 \\ & u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO ☐ FALSO ☒

3. I punti $\bar{x} = (1,\ 2,\ 0)^T$ e $\bar{u} = (-1,\ 0)^T$ sono ammissibili rispettivamente per il problema primale e per il duale ma non ottimi.

VERO ☒ FALSO ☐

4. Risulta $-4 \leq c^T x^* \leq 5$

VERO ☒ FALSO ☐

5. Il punto $u^* = (1/2,\ 0)^T$ è ottimo per il duale ed esiste una soluzione ottima per il problema primale.

VERO ☐ FALSO ☒

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**)

Sia dato il seguente vincolo lineare:

$$\sum_{i \in T} x_i \cdot a_i - \sum_{j \in S} y_j \leq 0$$

dove x_i e y_j sono le variabili del generico problema, mentre a_i sono parametri.

Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Supponendo che siano stati correttamente dichiarati tutti gli insiemi, i parametri e le variabili, la seguente traduzione AMPL del vincolo nel file .mod è corretta:

```
s.t.  vincolo{i in T,j in S}:x[i]*a[i]-y[j]<=0;
```

VERO ☐ FALSO ☒

2. Supponendo che siano stati correttamente dichiarati tutti gli insiemi, i parametri e le variabili, la seguente traduzione AMPL dei vincoli nel file .mod è corretta:

```
s.t.  vincolo:sum{i in T} (x[i]*a[i])- sum {j in S}y[j]<=0;
```

VERO ☒ FALSO ☐

3. Supponiamo che l'insieme S abbia i seguenti elementi:

$$S = \{C, D\}$$

mentre i parametri b e c abbiano i valori riportati in tabella:

	C	D
b	9	10
c	7	8

Si abbia inoltre nel file .mod la seguente dichiarazione:

```
set S;
param b{S};
param c{S};
```

allora una possibile definizione dell'insieme S e dei parametri b e c nel file .dat è la seguente:

```
set S:= C D;

param:  b   c:=
C       9   7
D       10  8;
```

VERO **X** | FALSO

Esercizio 5. (**Punteggio massimo = 1**)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione quadratica

$$\min_{R^n} \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x.$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $\bar{x}$ è un punto tale che $Q\bar{x} + c = 0$, allora $\bar{x}$ è minimo locale.

   VERO | FALSO **X**

2. Se $Q \succ 0$ (definita positiva) il metodo del gradiente con ricerca di linea esatta ha la forma

$$x^{k+1} = x^k - \frac{\|\nabla f(x^k)\|^2}{\nabla f(x^k)^T Q \nabla f(x^k)} \nabla f(x^k).$$

   VERO **X** | FALSO

3. Se $Q \succeq 0$ (è semidefinita positiva), esiste sempre una soluzione al problema $\min_{R^n} \; f(x)$.

   VERO | FALSO **X**

4. Se $d^0, \ldots, ..d^{n-1}$ sono direzioni coniugate tra loro, sono anche sempre direzioni di discesa.

   VERO | FALSO **X**

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \end{array}$$

con $g : R^n \rightarrow \; R^m$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e risulta per ogni $j = 1, \dots, m$:

$$g_j(y) \geq g_j(x) + \nabla g_j(x)^T (y - x), \quad \forall \; x, y \in \Re^n$$

allora il problema è convesso.

VERO	FALSO **X**

2. La funzione

$$-f(x) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{m} \|g_i(x)\|^2$$

è una funzione di penalità esterna per il problema.

VERO	FALSO **X**

3. Sia $\bar{x}$ un punto ammissibile NON regolare. Se soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine, allora $\bar{x}$ è un minimo locale stretto.

VERO **X**	FALSO

4. Se in un punto ammissibile $\bar{x}$ i vincoli attivi $g_i(\bar{x}) = 0$ sono in numero inferiore ad n, allora il punto è regolare.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & Ax \leq b \end{array}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono m tutte vincolate ad essere non negative.

VERO **X**	FALSO

2. Se il problema duale ammette soluzione ottima finita u^*, allora il valore ottimo della funzione obiettivo del problema duale è $c^T x^*$.

VERO **X**	FALSO

3. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A^T \bar{u} = c$, allora $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$.

VERO	FALSO **X**

4. Se il problema primale è illimitato superiormente, allora il problema duale deve avere insieme ammissibile vuoto.

VERO **X**	FALSO

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B (verde)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2º anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4:
le risposte CORRETTE valgono **1** PUNTO e
quelle SBAGLIATE **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO).
Per gli esercizi 5,6,7:
le risposte CORRETTE valgono **0,25** PUNTI e
quelle SBAGLIATE **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ x_1^2 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2 x_1 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + \frac{3}{2}x_1 - 4x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione non è convessa in $\Re^2$.

   VERO **X** | FALSO

2. Il punto $(0,\ 1)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine.

   VERO **X** | FALSO

3. Il punto $(0,\ 1)^T$ è un punto di sella.

   VERO | FALSO **X**

4. L'approssimazione quadratica della funzione nell'intorno del punto $(1,\ 1)^T$ è strettamente convessa.

   VERO **X** | FALSO

5. Nel punto $x^0 = (1,\ 1)^T$ una ricerca di linea esatta lungo $d = (1,\ 0)^T$ determina un passo $\alpha^* = -1$.

   VERO **X** | FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{l} \max \quad x_1 + x_2 \\ x_2 \geq x_1^2 \\ x_2 \leq x_1^2 + 1 \\ x_2 \leq 4 \end{array}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema non è convesso.

   | VERO **X** | FALSO |

2. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è di regolarità per i vincoli

   | VERO **X** | FALSO |

3. Il punto $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix}$ non soddisfa le condizioni di KKT.

   | VERO | FALSO **X** |

4. I moltiplicatori $\lambda_1 = 1/4, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 5/4$ associati rispettivamente al primo, secondo e terzo vincolo, soddisfano le condizioni di KKT

   | VERO **X** | FALSO |

5. Il punto $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix}$ soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine.

   | VERO **X** | FALSO |

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 2x_2 - 6x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 4 \\ & -x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0. \end{array}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Il problema

   $$\begin{array}{ll} \max & 4u_1 - u_2 \\ & u_1 \leq \frac{1}{2} \\ & 6u_1 - u_2 \leq -6 \\ & u_1 + u_2 \leq 2 \\ & u_2 \geq 0 \end{array}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

   | VERO **X** | FALSO |

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & 4u_1 - u_2 \\ & u_1 \le \frac{1}{2} \\ & 6u_1 - u_2 \le -6 \\ & u_1 + u_2 \le 2 \\ & u_1 \ge 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO | FALSO **X**

3. I punti $\bar{x} = (1,\ 2,\ 0)^T$ e $\bar{u} = (-1,\ 0)^T$ sono ottimi rispettivamente per il problema primale e per il duale.

VERO | FALSO **X**

4. Sia u^* la soluzione ottima del problema duale, risulta $-4 \le b^T u^* \le 5$

VERO **X** | FALSO

5. Il punto $u^* = (1/2,\ 0)^T$ è ottimo per il duale ed esiste una soluzione ottima x^* per il problema primale tale che $c^T x^* = 2$.

VERO **X** | FALSO

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Siano dati i seguenti vincoli lineari:

$$\sum_{i \in T} x_i \cdot a_i - y_k \le c_k, \quad \forall k \in S$$

dove x_i e y_k sono le variabili del generico problema, mentre a_i e c_k sono parametri.

Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Supponendo che siano stati correttamente dichiarati tutti gli insiemi, i parametri e le variabili, la seguente traduzione AMPL dei vincoli nel file .mod è corretta:

```
s.t.  vincoli{k in S}:  sum{ i in T} (x[i]*a[i])-y[k]<=c[k];
```

VERO **X** | FALSO

2. Supponendo che siano stati correttamente dichiarati tutti gli insiemi, i parametri e le variabili, la seguente traduzione AMPL dei vincoli nel file .mod è corretta:

```
s.t.  vincoli{i in T,k in S}:  (x[i]*a[i])-y[k]<=c[k];
```

VERO | FALSO **X**

3. Si Supponga che nel file .mod si abbia la seguente dichiarazione:

```
set T;
set S;
param a symbolic in T;
param b symbolic in T;
```

allora una possibile assegnazione dei parametri `a` e `b`, nel file .dat, è la seguente:

```
set T:= A B;
set S:= F G;
```

```
param a:=A;
param b:=F;
```

VERO [ ] FALSO [X]

Esercizio 5. (**Punteggio massimo = 1**)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione quadratica

$$\min_{R^n} \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx.$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $\bar{x}$ è un punto tale che $Q\bar{x} + c = 0$ e $Q \succeq 0$ (semidefinita positiva), allora $\bar{x}$ è un minimo globale.

   VERO [X] FALSO [ ]

2. Se $Q \succ 0$ (definita positiva) il metodo delle direzioni coniugate con ricerca di linea esatta ha la forma

$$x^{k+1} = x^k - \frac{\nabla f(x^k)^T d^k}{{d^k}^T Q d^k} d^k.$$

   VERO [X] FALSO [ ]

3. Se $Q \succ 0$ (è definita positiva), esiste sempre una soluzione al problema $\min_{R^n}\ f(x)$.

   VERO [X] FALSO [ ]

4. Dato un punto x^k tale che $\nabla f(x^k) \neq 0$, il passo α^k ottenuto con una qualunque ricerca di linea lungo la direzione del metodo del gradiente è sempre positivo.

   VERO [X] FALSO [ ]

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \end{array}$$

con $g : R^n \rightarrow\ R^m$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e risulta per ogni $j = 1, \dots, m$:

$$g_j(y) \leq g_j(x) + \nabla g_j(x)^T(y - x), \quad \forall\ x, y \in \Re^n$$

   allora il problema è convesso.

   VERO [ ] FALSO [X]

2. La funzione

$$f(x) + \frac{1}{\epsilon}\sum_{i=1}^{m} \| - g_i(x)\|^2$$

   è una funzione di penalità esterna per il problema.

   VERO [ ] FALSO [X]

3. Sia $\bar{x}$ un punto ammissibile e regolare. Se non soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine, allora $\bar{x}$ non è un minimo.

VERO **X**	FALSO

4. Se in un punto ammissibile $\bar{x}$ i vincoli attivi $g_i(\bar{x}) = 0$ sono in numero inferiore ad m, allora il punto è regolare.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili del problema duale sono m tutte vincolate ad essere non negative.

VERO	FALSO **X**

2. Se il problema primale ammette soluzione ottima finita x^*, allora esiste un punto ammissibile duale $\bar{u}$ tale che $c^T x^* = b^T \bar{u}$.

VERO **X**	FALSO

3. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A^T \bar{u} \geq c$, allora $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$.

VERO	FALSO **X**

4. Se il problema primale ha insieme ammissibile vuoto, allora il problema duale deve avere insieme ammissibile vuoto.

VERO	FALSO **X**