Soluzioni degli esercizi sulle condizioni di ottimalità per il corso di Ottimizzazione Nuovo Ordinamento

a cura di V. Piccialli*

a.a. 2002-2003

1 Soluzione degli esercizi sull'analisi di sensibilità per problemi vincolati

1.1 Esercizio 1.1

Prima di tutto applichiamo le condizioni di Kuhn Tucker a questo problema:

$$
\begin{aligned}
\min f(x,y) = \quad & \frac{1}{xy} \\
& x + y \leq 5 \\
& x \geq 1 \\
& y \geq 1
\end{aligned}
$$

Il lagrangiano associato ha la seguente espressione:

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{xy} + \lambda_1(x + y - 5) + \lambda_2(-x + 1) + \lambda_3(-y + 1)$$

Le condizioni di Kuhn Tucker sono le seguenti:

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{x^2 y} + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \qquad (1) \\
& -\frac{1}{xy^2} + \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\
& \lambda_1(x + y - 5) = 0 \\
& \lambda_2(-x + 1) = 0 \\
& \lambda_3(-y + 1) = 0 \\
& \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

*piccialli@dis.uniroma1.it

a cui vanno aggiunte le condizioni di ammissibilità:

$$x + y \leq 5$$
$$x \geq 1$$
$$y \geq 1$$

Consideriamo i vari casi:

(a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ In questo caso il sistema (1) non ammette soluzione.

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0$ Anche in questo caso il sistema (1) non ammette soluzione.

(c) $\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 > 0$ Anche in questo caso il sistema (1) non ammette soluzione.

(d) $\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_1 > 0$ In questo caso il sistema (1) ammette l'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

con i corrispondenti moltiplicatori:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{125} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questo punto è ammissibile e il corrispondente valore della funzione obiettivo è $f(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}) = \frac{4}{25} = 0.16$.

(e) $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ In questo caso il sistema (1) ammette l'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con i corrispondenti moltiplicatori:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

che non è accettabile poichè λ_2 e λ_3 sono negativi.

(f) $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$. In questo caso il sistema (1) ammette l'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

con i corrispondenti moltiplicatori

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ -\frac{3}{16} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poichè il moltiplicatore λ_2 è negativo questa soluzione non è accettabile.

(g) $\lambda_1, \lambda_3 > 0, \lambda_2 = 0$. In questo caso il sistema (1) ammette l'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con i corrispondenti moltiplicatori

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ 0 \\ -\frac{3}{16} \end{pmatrix}$$

Poichè il moltiplicatore λ_3 è negativo questa soluzione non è accettabile.

(h) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ In questo caso il sistema (1) non ha soluzione.

Si è quindi trovato un solo punto di Kuhn Tucker. Poichè il problema ammette soluzione (l'insieme ammissibile è compatto e la funzione obiettivo è continua nell'insieme ammissibile), il punto trovato è la soluzione ottima.
Il problema che si ottiene aumentando il valore assoluto dei termini noti nei vincoli del 10% è il seguente:

$$\begin{aligned} \min f(x,y) = \quad & \frac{1}{xy} \\ & x + y \leq 5.5 \\ & -x \leq -1.1 \\ & -y \leq -1.1 \end{aligned}$$

Nel punto individuato tramite le condizioni di Kuhn Tucker $(x, y) = (2.5, 2.5)$ l'unico vincolo attivo è il primo e il moltiplicatore associato è $\lambda_1 = \frac{8}{125} = 0.064$. La variazione subita da questo vincolo è pari a $\epsilon = 0.5$. Possiamo quindi applicare la formula derivante dall'analisi di sensibilità

$$f(x^*(\epsilon), y^*(\epsilon)) \simeq f(x^*, y^*) - \lambda_1^* \epsilon$$

e stimare il valore della funzione obiettivo nel punto che soddisfa le condizioni di ottimo del problema modificato:

$$f(x^*(\epsilon), y^*(\epsilon)) = 0.16 - 0.064 \times 0.5 = 0.128$$

Questa stima suggerisce che conviene modificare il primo vincolo perchè questa modifica ha l'effetto di diminuire la funzione obiettivo all'ottimo. E' chiaro invece che non conviene modificare i termini noti degli altri due vincoli perchè non essendo attivi all'ottimo hanno i corrispondenti moltiplicatori nulli e quindi un loro cambiamento non altererebbe il valore della funzione obiettivo.
Per verificare se questa stima è esatta riapplichiamo le condizioni di Kuhn Tucker al problema modificato. Si ottiene il punto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.75 \\ 2.75 \end{pmatrix}$$

il cui valore della funzione obiettivo è circa $f(2.75, 2.75) = 0.132231$ e si ha quindi una conferma della diminuzione della funzione obiettivo all'ottimo.

1.2 Esercizio 1.2

Prima di tutto applichiamo le condizioni di Kuhn Tucker a questo problema:

$$\begin{aligned} \min f(x_1, x_2, x_3) = \quad & x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 \\ & x_1 x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

Il lagrangiano associato ha la seguente espressione:

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + \lambda(-x_1 x_2 + 1)$$

Le condizioni di Kuhn Tucker sono le seguenti:

$$\begin{aligned} & 2x_1 - \lambda x_2 = 0 \\ & 18x_2 - \lambda x_1 = 0 \\ & 2x_3 = 0 \\ & \lambda(-x_1 x_2 + 1) = 0 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

a cui vanno aggiunte le condizioni di ammissibilità:

$$x_1 x_2 \geq 1$$

Consideriamo i due casi possibili:

(a) $\lambda = 0$. In questo caso il sistema (2) ammette l'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che però non è ammissibile.

(b) $\lambda > 0$. In questo caso il sistema (2) ammette le due soluzioni

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

entrambi con valore del moltiplicatore $\lambda = 6$ e valore della funzione obiettivo pari a $f = 6$.

Per determinare se le soluzioni ottenute sono effettivamente soluzioni ottime è necessaria l'analisi della condizione sufficiente del secondo ordine che sarà oggetto di un altro esercizio.
Il problema che si ottiene aumentando il valore assoluto del termine noto nel vincolo del 10% è il seguente:

$$\begin{aligned} \min f(x_1, x_2, x_3) = \quad & x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 \\ & -x_1 x_2 \leq -1.1 \end{aligned}$$

In entrambi i punti individuati tramite le condizioni di Kuhn Tucker il moltiplicatore associato al vincolo attivo è $\lambda = 6$. La variazione subita da questo vincolo è pari a $\epsilon = -0.1$. Possiamo quindi applicare la formula derivante dall'analisi di sensibilità

$$f(x^*(\epsilon)) \simeq f(x^*) - \lambda^* \epsilon$$

e stimare il valore della funzione obiettivo nei punti che soddisfano le condizioni di ottimo del problema modificato:

$$f(x^*(\epsilon)) = 6 + 6 \times 0.1 = 6.6$$

Riapplicando le condizioni di Kuhn Tucker al problema modificato si ottengono i punti

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt[4]{1.1}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt[4]{1.1}}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt[4]{1.1}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt[4]{1.1}}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

il cui valore della funzione obiettivo è $f' = 6.599$.

1.3 Esercizio 2

La forumlazione matematica del problema è la seguente (vedi soluzione degli esercizi sulle condizioni di Kuhn Tucker):

$$\begin{aligned}
&f(x, y) = 300x + 200y \\
&15x + 15y \geq 150 \\
&25x + 10y \geq 130 \\
&x, y \geq 0
\end{aligned}$$

Le condizioni di Kuhn Tucker per questo problema sono le seguenti (poichè tutti i vincoli sono lineari non c'è bisogno di verificare la regolarità dei vincoli):

$$\begin{aligned}
&300 - 15\lambda_1 - 25\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \qquad (3) \\
&200 - 15\lambda_1 - 10\lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\
&\lambda_1(-15x - 15y + 150) = 0 \\
&\lambda_2(-25x - 10y + 130) = 0 \\
&\lambda_3(-x) = 0 \\
&\lambda_4(-y) = 0 \\
&\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0
\end{aligned}$$

a cui vanno aggiunte le condizioni di ammissibilità:

$$\begin{aligned}
&15x + 15y \geq 150 \\
&25x + 10y \geq 130 \\
&x, y \geq 0
\end{aligned}$$

L'unico punto (vedi soluzione degli esercizi sulle condizioni di Kuhn Tucker) che soddisfa le condizioni di Kuhn Tucker è il seguente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

con i moltiplicatori corrispondenti:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.89 \\ 6.67 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se la richiesta di spazio refrigerato aumenta a $160m^3$ il problema diventa:

$$\begin{aligned} & f(x,y) = 300x + 200y \\ & 15x + 15y \geq 160 \\ & 25x + 10y \geq 130 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Nel punto individuato tramite le condizioni di Kuhn Tucker $(x, y) = (2, 8)$ sono attivi i primi due vincoli e i moltiplicatori associati sono $\lambda_1 = 8.89$ e $\lambda_2 = 6.67$. Poichè varia il termine noto solo del primo vincolo nell'analisi di sensibilità dobbiamo tenere conto solo di questo. La variazione subita da questo vincolo è pari a $\epsilon = -10$(dobbiamo considerare il vincolo nella sua forma $\leq$). Possiamo quindi applicare la formula derivante dall'analisi di sensibilità

$$f(x^*(\epsilon), y^*(\epsilon)) \simeq f(x^*, y^*) - \lambda_1^* \epsilon$$

e stimare il valore della funzione obiettivo nel punto che soddisfa le condizioni di ottimo del problema modificato:

$$f(x^*(\epsilon), y^*(\epsilon)) = 2200 + 8.89 \times 10 = 2288.9$$

Riapplicando le condizioni di Kuhn Tucker al problema modificato si ottiene il punto:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.56 \\ 9.11 \end{pmatrix}$$

in corrispondenza del quale la funzione obiettivo vale $f^* = 2290$. Si conferma quindi quanto verificato con l'analisi di sensibilità: se aumenta la richiesta di spazio refrigerato la quantità minima di carburante utilizzato aumenta.

Se la richiesta di spazio non refrigerato aumenta a $140m^3$ il problema diventa:

$$\begin{aligned} & f(x,y) = 300x + 200y \\ & 15x + 15y \geq 150 \\ & 25x + 10y \geq 140 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Nel punto individuato tramite le condizioni di Kuhn Tucker $(x, y) = (2, 8)$ sono attivi i primi due vincoli e i moltiplicatori associati sono $\lambda_1 = 8.89$ e $\lambda_2 = 6.67$. Poichè varia il termine noto solo del secondo vincolo nell'analisi di sensibilità dobbiamo tenere conto solo di questo. La variazione subita da questo vincolo è pari a $\epsilon = -10$(dobbiamo considerare il vincolo nella sua forma $\leq$). Possiamo quindi applicare la formula derivante dall'analisi di sensibilità

$$f(x^*(\epsilon), y^*(\epsilon)) \simeq f(x^*, y^*) - \lambda_2^* \epsilon$$

e stimare il valore della funzione obiettivo nel punto che soddisfa le condizioni di ottimo del problema modificato:

$$f(x^*(\epsilon), y^*(\epsilon)) = 2200 + 6.67 \times 10 = 2266.7$$

Riapplicando le condizioni di Kuhn Tucker al problema modificato si ottiene il punto:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.67 \\ 7.33 \end{pmatrix}$$

in corrispondenza del quale la funzione obiettivo vale $f^* = 2267$. Si conferma quindi ancora una volta quanto verificato con l'analisi di sensibilità: se aumenta la richiesta di spazio non refrigerato la quantità minima di carburante utilizzato aumenta.

Se la richiesta di spazio non refrigerato aumenta a $140m^3$ e quella di spazio refrigerato diminuisce a $140m^3$ il problema diventa:

$$\begin{aligned}
&f(x, y) = 300x + 200y \\
&15x + 15y \geq 140 \\
&25x + 10y \geq 140 \\
&x, y \geq 0
\end{aligned}$$

Nel punto individuato tramite le condizioni di Kuhn Tucker $(x, y) = (2, 8)$ sono attivi i primi due vincoli e i moltiplicatori associati sono $\lambda_1 = 8.89$ e $\lambda_2 = 6.67$. La variazione subita dal primo vincolo è pari a $\epsilon_1 = 10$(dobbiamo considerare il vincolo nella sua forma $\leq$), mentre quella subita dal secondo vincolo è pari a $\epsilon_2 = -10$. Possiamo quindi applicare la formula derivante dall'analisi di sensibilità

$$f(x^*(\epsilon), y^*(\epsilon)) \simeq f(x^*, y^*) - \lambda_1^* \epsilon_1 - \lambda_2^* \epsilon_2$$

e stimare il valore della funzione obiettivo nel punto che soddisfa le condizioni di ottimo del problema modificato:

$$f(x^*(\epsilon), y^*(\epsilon)) = 2200 - 8.89 \times 10 + 6.67 \times 10 = 2177.8$$

Riapplicando le condizioni di Kuhn Tucker al problema modificato si ottiene il punto:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.11 \\ 6.22 \end{pmatrix}$$

in corrispondenza del quale la funzione obiettivo vale $f^* = 2177$. Notiamo quindi che in questo caso la funzione obiettivo all'ottimo diminuisce.

2 Soluzione degli esercizi sulla condizione sufficiente del secondo ordine per problemi vincolati

2.1 Esercizio 1.1

Abbiamo visto che le condizioni di Kuhn Tucker applicate al problema:

$$\begin{aligned} \min f(x,y) = \quad & \frac{1}{xy} \\ & x + y \le 5 \\ & x \ge 1 \\ & y \ge 1 \end{aligned}$$

sono soddisfatte dal punto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

con i corrispondenti moltiplicatori:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{125} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La condizione sufficiente richiede che $d^T \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*) d > 0$ per ogni $d \in \mathbb{R}^n$ tale che $\nabla g_{sa}(x^*)^T d = 0,\ d \neq 0$, dove

$$I_{sa}(x^*) = \{i \in \{1, \dots, p\} : g_i(x^*) = 0, \lambda_i^* > 0)\}.$$

Nel nostro caso abbiamo $I_{sa}(x^*) = 1$, in quanto nel punto considerato è attivo solo il primo vincolo e il corrispondente moltiplicatore $\lambda_1 = \frac{8}{125}$ è strettamente positivo. Inoltre

$$\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi che l'insieme $\{d \in \ Re^2 :\ \nabla g_{sa}(x^*)^T d = 0,\ d \neq 0\}$ è dato da tutti i vettori $d^T = (d_1, d_2)$ tali che

$$(d_1\ d_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = d_1 - d_2 = 0, \quad d_1, d_2 \neq 0.$$

e quindi da tutti i vettori della forma

$$\begin{pmatrix} d \\ -d \end{pmatrix}, \quad d \neq 0.$$

Il lagrangiano associato al problema è il seguente:

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{xy} + \lambda_1(x + y - 5) + \lambda_2(-x + 1) + \lambda_3(-y + 1)$$

e quindi il suo hessiano è:

$$\begin{pmatrix} 2\frac{1}{x^3 y} & \frac{1}{x^2 y^2} \\ \frac{1}{x^2 y^2} & \frac{1}{x y^3} \end{pmatrix}$$

e calcolato nel punto considerato vale

$$\begin{pmatrix} 0.0512 & 0.0256 \\ 0.0256 & 0.0512 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto $d^T \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*) d$ vale $0.512 d^2 > 0$ e quindi la condizione sufficiente del secondo ordine è soddisfatta.
Un metodo alternativo per controllare la condizione sufficiente è quello di utilizzare il risultato che ci dice che se M è una matrice quadrata simmetrica $n \times n$, e B una matrice $n \times q$, con $q \leq n$, allora risulta $d^T M d > 0$ per ogni d tale che $B^T d = 0,\ d \neq 0,$ se e solo se, considerata la matrice di dimensione $(q+n) \times (q+n)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & B^T \\ B & M \end{pmatrix},$$

gli ultimi $(n-q)$ minori principali della medesima hanno determinanti il cui segno è pari a quello di $(-1)^q$. Nel nostro caso particolare $M = \nabla^2 L(x^*, \lambda^*)$ e $B = \nabla g_1(x^*)$, con $q = 1$. Consideriamo allora la matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & B^T \\ B & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0.0512 & 0.0256 \\ 1 & 0.0256 & 0.0512 \end{pmatrix}.$$

In questo caso $n - q = 1$ e l'ultimo minore principale è la matrice stessa, che ha determinante -0.0512. La condizione risulta quindi verificata in quanto questo determinante è negativo e ha quindi segno concorde con $(-1)^q = -1$ Questo risultato ci conferma quindi che il punto trovato è l'unica soluzione del nostro problema.

2.2 Esercizio 1.1

Abbiamo visto che le condizioni di Kuhn Tucker applicate al problema:

$$\begin{aligned} \min f(x_1, x_2, x_3) = \quad & x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 \\ & x_1 x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

sono soddisfatte dai punti:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

entrambi con valore del moltiplicatore $\lambda = 6$ e valore della funzione obiettivo pari a $f = 6$. In questo caso caso abbiamo $I_{sa}(x^*) = 1$, in quanto in entrambi i punti è attivo il vincolo e il corrispondente moltiplicatore $\lambda = 6$ è strettamente positivo. Inoltre

$$\nabla g = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il lagrangiano associato al problema è il seguente:

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + \lambda(-x_1x_2 + 1)$$

e quindi il suo hessiano è:

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora separatamente i due punti: nel primo punto

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi che l'insieme $\{d \in \ Re^2 : \ \nabla g_{sa}(x^*)^T d = 0, \ d \neq 0\}$ è dato da tutti i vettori $d^T = (d_1, d_2, d_3)$ tali che

$$(d_1 \ d_2 \ d_3) \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{d_1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}d_2 = 0, \quad (d_1 \ d_2 \ d_3)^T \neq 0_3.$$

e quindi da tutti i vettori della forma

$$\begin{pmatrix} -3d_2 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, \quad (d_2 \ d_3)^T \neq 0_2.$$

Il prodotto $d^T \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*) d$ vale $6d_2^2 > 0, \forall d_2 \neq 0$ e quindi la condizione sufficiente del secondo ordine è soddisfatta.
Anche in questo caso si può applicare il test dei minori sulla matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & B^T \\ B & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 2 & -6 & 0 \\ -\sqrt{3} & -6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo che $q = 1$ e $n - q = 2$. Dobbiamo quindi considerare gli ultimi due minori principali della matrice, che sono la matrice stessa che ha determinante -48 e la sottomatrice 3×3

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 2 & -6 \\ -\sqrt{3} & -6 & 18 \end{pmatrix}.$$

che ha determinante -24 e quindi il test è soddisfatto.
Passiamo ora al secondo punto. Applichiamo direttamente il test dei minori sulla matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & B^T \\ B & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 2 & -6 & 0 \\ \sqrt{3} & -6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Anche in questo caso dobbiamo quindi considerare gli ultimi due minori principali della matrice, che sono la matrice stessa che ha determinante -48 e la sottomatrice 3×3

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 2 & -6 \\ \sqrt{3} & -6 & 18 \end{pmatrix}.$$

che ha determinante -24 e quindi il test è soddisfatto. Possiamo quindi concludere che le due soluzioni trovate sono due punti di minimo del problema.