Soluzioni degli esercizi sulle condizioni di ottimalità per il corso di Ottimizzazione Nuovo Ordinamento

a cura di V. Piccialli[*]

a.a. 2002-2003

1 Soluzione degli esercizi sulle condizioni di ottimalità per problemi vincolati

1.1 Esercizio 2.1

Dobbiamo applicare le condizioni di Kuhn Tucker al seguente problema:

$$\begin{aligned} \min f(x,y) = \quad & -x - 3y \\ & x + y = 6 \\ & -x + y \leq 4 \end{aligned}$$

Il lagrangiano corrispondente a questo problema é il seguente:

$$L(x,\mu,\lambda) = -x - 3y + \mu(x + y - 6) + \lambda(-x + y - 4)$$

Poichè i vincoli sono lineari non è necessaria un'analisi della regolarità dei vincoli e si possono scrivere direttamente le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker:

$$\begin{aligned} & -1 + \mu - \lambda = 0 \\ & -3 + \mu + \lambda = 0 \\ & \lambda(-x + y - 4) = 0 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

a cui vanno aggiunte le condizioni di ammissibilità:

$$\begin{aligned} & x + y = 6 \\ & -x + y \leq 4 \end{aligned}$$

[*]piccialli@dis.uniroma1.it

Queste condizioni ammettono un'unica soluzione che è data dal punto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

con i corrispondenti moltiplicatori

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che questo problema è convesso in quanto sia funzione obiettivo che vincoli sono lineari e quindi il punto trovato è un punto di minimo globale in cui la funzione obiettivo vale $f(1,5) = -16$.

1.2 Esercizio 2.2

Dobbiamo applicare le condizioni di Kuhn Tucker al seguente problema (riscritto con i vincoli di disuguaglianza nella forma $\leq$):

$$\begin{aligned} \min f(x,y) = \quad & x^2 + 2y^2 \\ & -x - y \leq -1 \\ & -x, -y \leq 0 \end{aligned}$$

Il lagrangiano corrispondente a questo problema é il seguente:

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = x^2 + 2y^2 + \lambda_1(-x - y + 1) + \lambda_2(-x) + \lambda_3(-y)$$

Anche in questo caso poichè i vincoli sono lineari non è necessaria un'analisi di regolarità e si possono scrivere direttamente le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker, che sono le seguenti:

$$\begin{aligned} & 2x - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ & 4y - \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ & \lambda_1(-x - y + 1) = 0 \\ & \lambda_2 x = 0 \\ & \lambda_3 y = 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

a cui vanno aggiunte le condizioni di ammissibilità:

$$\begin{aligned} & -x - y \leq -1 \\ & -x, -y \leq 0 \end{aligned}$$

Consideriamo ora i vari casi:

(a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ In questo caso il sistema (2) ammette l'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che però non è ammissibile.

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0$ Anche in questo caso il sistema (2) ammette l'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che però non è ammissibile.

(c) $\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 > 0$ Anche in questo caso il sistema (2) ammette l'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che però non è ammissibile.

(d) $\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_1 > 0$ In questo caso il sistema (2) ammette l'unica soluzione (questa volta ammissibile)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

con i corrispondenti moltiplicatori:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il corrispondente valore della funzione obiettivo è $f(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$.

(e) $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ In questo caso il sistema (2) ammette l'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che però non è ammissibile.

(f) $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$. In questo caso il sistema (2) ammette l'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con i corrispondenti moltiplicatori

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poichè il moltiplicatore λ_2 è negativo questa soluzione non è accettabile.

(g) $\lambda_1, \lambda_3 > 0, \lambda_2 = 0$. In questo caso il sistema (2) ammette l'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con i corrispondenti moltiplicatori

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Poichè il moltiplicatore λ_3 è negativo questa soluzione non è accettabile.

(h) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ In questo caso il sistema (2) non ha soluzione.

In conclusione abbiamo individuato un unico punto che soddisfa le condizioni di Kuhn Tucker e che è il seguente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

con i corrispondenti moltiplicatori:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con valore della funzione obiettivo $f(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ Notiamo che questo problema è convesso in quanto l'hessiano della funzione obiettivo è la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

che è ovviamente definita positiva e i vincoli sono lineari. Quindi il punto trovato è un punto di minimo globale.

1.3 Esercizio 2

Dato il seguente problema

$$\begin{aligned} \min f(x,y) = \quad & x^2 + 2yx + y^2 - 15x - 20y \\ & x^2 + y^2 \leq 20 \\ & x^2 - y^2 \leq 10 \end{aligned}$$

dobbiamo prima di tutto verificare se esistono punti di non regolarità dei vincoli. Per fare questo consideriamo i gradienti dei vincoli:

$$\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

Nel caso siano attivi singolarmente non ci sono problemi di regolarità in quanto i due gradienti si annullano solo in corrispondenza del punto $(0,0)$, ma nessuno dei due vincoli è attivo in questo punto. Consideriamo invece i punti in cui i due vincoli sono attivi contemporaneamente, che sono le soluzioni di questo sistema:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 20 \\ x^2 - y^2 &= 10 \end{aligned}$$

In particolare questo sistema ammette quattro soluzioni

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{15} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{15} \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{15} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{15} \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora il determinante della matrice costituita dai gradienti dei due vincoli (possiamo calcolarlo in un generico punto (x, y)):

$$det \begin{pmatrix} 2x & 2x \\ 2y & -2y \end{pmatrix} = -8xy$$

Questo determinante si annulla se e solo se $x = 0$ o $y = 0$ o $x = y = 0$, ma questo non si verifica in nessuno dei quattro punti in cui sono attivi entrambi i vincoli. Possiamo quindi concludere che non esistono punti di non regolarità.

A questo punto scriviamo le condizioni di Kuhn Tucker per questo problema, il cui lagrangiano ha la seguente espressione:

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + 2yx + y^2 - 15x - 20y + \lambda_1(x^2 + y^2 - 20) + \lambda_2(x^2 - y^2 - 10)$$

Le condizioni di Kuhn Tucker sono quindi le seguenti:

$$\begin{aligned} & 2x + 2y - 15 + 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 x = 0 \\ & 2y + 2x - 20 + 2\lambda_1 y - 2\lambda_2 y = 0 \\ & \lambda_1(x^2 + y^2 - 20) = 0 \\ & \lambda_2(x^2 - y^2 - 10) = 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

a cui vanno aggiunte le condizioni di ammissibilità:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 \leq 20 \\ & x^2 - y^2 \leq 10 \end{aligned}$$

A questo punto dobbiamo verificare con quale precisione il punto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.666 \\ 4.149 \end{pmatrix}$$

con i moltiplicatori:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soddisfa le condizioni appena scritte. Sostituendo i valori nelle equazioni del sistema si ottiene:

$$\begin{aligned} & -0.038 = 0 \\ & -0.072 = 0 \\ & -0.010243 = 0 \\ & 0 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Possiamo quindi concludere che il punto soddisfa le condizioni con una precisione di 10^{-2}.

1.4 Esercizio 3

Se indichiamo con x il numero di camion di tipo $T1$ e con y il numero di camion di tipo $T2$, il numero di litri di carburante utilizzati per il viaggio andata e ritorno dall'industria al negozio è pari a:

$$f(x, y) = 300x + 200y$$

e costituisce la funzione obiettivo da minimizzare. Inoltre si hanno i vincoli sul numero di m^3 necessari refrigerati e non refrigerati, e i vincoli di non negatività delle variabili:

$$\begin{aligned}
&15x + 15y \geq 150 \\
&25x + 10y \geq 130 \\
&x, y \geq 0
\end{aligned}$$

La funzione lagrangiana associata a questo problema è la seguente:

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = 300x+200y+\lambda_1(-15x-15y+150)+\lambda_2(-25x-10y+130)+\lambda_3(-x)+\lambda_4(-y)$$

Le condizioni di Kuhn Tucker per questo problema sono le seguenti (poichè tutti i vincoli sono lineari non c'è bisogno di verificare la regolarità dei vincoli):

$$\begin{aligned}
&300 - 15\lambda_1 - 25\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \qquad (5) \\
&200 - 15\lambda_1 - 10\lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\
&\lambda_1(-15x - 15y + 150) = 0 \\
&\lambda_2(-25x - 10y + 130) = 0 \\
&\lambda_3(-x) = 0 \\
&\lambda_4(-y) = 0 \\
&\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0
\end{aligned}$$

a cui vanno aggiunte le condizioni di ammissibilità:

$$\begin{aligned}
&15x + 15y \geq 150 \\
&25x + 10y \geq 130 \\
&x, y \geq 0
\end{aligned}$$

Consideriamo ora i vari casi. Si verifica facilmente che nei seguenti casi il sistema (5) non ammette soluzione:

(a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_4 > 0$

(c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0, \lambda_3 > 0$

(d) $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \lambda_2 > 0$

(e) $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \lambda_1 > 0$

(f) $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 > 0$

(g) $\lambda_2 = 0, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_4 > 0$

(h) $\lambda_3 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_4 > 0$

(i) $\lambda_4 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$

(j) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0, \lambda_4 > 0$

Consideriamo ora i casi rimanenti:

(k) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3, \lambda_4 > 0$. In questo caso il sistema (5) ammette l'unica soluzione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con i moltiplicatori:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$$

ma il punto non è ammissibile.

(l) $\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2, \lambda_4 > 0$. In questo caso il sistema (5) ammette l'unica soluzione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con i moltiplicatori:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix}$$

ma il punto non è ammissibile.

(m) $\lambda_1 = \lambda_4 = 0, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. In questo caso il sistema (5) ammette l'unica soluzione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \end{pmatrix}$$

con i moltiplicatori:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -300 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ma non è una soluzione accettabile in quanto $\lambda_3 < 0$.

(n) $\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_1, \lambda_4 > 0$. In questo caso il sistema (5) ammette l'unica soluzione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con i moltiplicatori:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix}$$

ma non è una soluzione accettabile in quanto $\lambda_4 < 0$.

(o) $\lambda_2 = \lambda_4 = 0, \lambda_1, \lambda_3 > 0$. In questo caso il sistema (5) ammette l'unica soluzione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

con i moltiplicatori:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{40}{3} \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ma il punto non è ammissibile.

(p) $\lambda_3 = \lambda_4 = 0, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. In questo caso il sistema (5) ammette l'unica soluzione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

con i moltiplicatori:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.89 \\ 6.67 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e il punto è ammissibile.

Possiamo quindi concludere che l'unico punto che soddisfa le condizioni di Kuhn Tucker è il punto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

in corrispondenza del quale la funzione obiettivo vale $f(2, 8) = 2200$. Notiamo che questo problema è convesso in quanto sia funzione obiettivo che vincoli sono lineari e quindi il punto trovato è un punto di minimo globale.

Riferimenti bibliografici

[1] M. Asghar Bhatti, *Practical Optimization Methods*, Springer-Telos, New York, 2000.