Soluzioni degli esercizi sulle condizioni di ottimalità per il corso di Ottimizzazione Nuovo Ordinamento

a cura di V. Piccialli*

a.a. 2002-2003

1 Soluzione degli esercizi sulle condizioni di ottimalità

1.1 Esercizio 1

Dobbiamo prima di tutto trovare tutti i punti stazionari della seguente funzione:

$$f(x) = x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x$$

Per fare questo dobbiamo trovare tutti i punti in cui il gradiente (che in questo caso coincide con la derivata prima) si annulla, cioè i punti in cui è soddisfatta la seguente equazione:

$$f'(x) = 4x^3 + x - 1 = 0$$

Il gradiente si annulla nel punto $x = \frac{1}{2}$, che quindi è l'unico punto stazionario di questa funzione. Studiamo le condizioni del secondo ordine per determinare la natura di questo punto, considerando l'hessiano della funzione (che in questo caso coincide con la derivata seconda):

$$f''(x) = 12x^2 + 1$$

Nel punto considerato abbiamo che l'hessiano vale:

$$f''(\frac{1}{2}) = 4 > 0$$

Possiamo quindi concludere che il punto $x = \frac{1}{2}$ è un punto di minimo della funzione. Inoltre, poichè l'hessiano è sempre positivo, la funzione è strettamente convessa e quindi il punto $x = \frac{1}{2}$ è l'unico punto di minimo globale.

*piccialli@dis.uniroma1.it

1.2 Esercizio 2

Dobbiamo prima di tutto trovare tutti i punti stazionari della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^6 - \frac{1}{3}x^3 + 2$$

Per fare questo dobbiamo trovare tutti i punti in cui il gradiente si annulla, cioè i punti in cui è soddisfatta la seguente equazione:

$$f'(x) = \frac{9}{2}x^5 - x^2 = 0$$

Il gradiente si annulla nei punti $x_1 = 0,\ x_2 = 0.601$. Studiamo le condizioni del secondo ordine per determinare la natura di questi due punti, considerando l'hessiano della funzione:

$$f''(x) = \frac{45}{2}x^4 - 2x$$

Nei due punti stazionari abbiamo che l'hessiano vale rispettivamente:

$$f''(0) = 0, \quad f''(0.601) = 1.817$$

Possiamo quindi concludere che il punto $x = 0.601$ è un punto di minimo locale della funzione, mentre non possiamo concludere nulla sulla natura del punto stazionario $x = 0$.

1.3 Esercizio 3

Dobbiamo prima di tutto mostrare che la seguente funzione è convessa:

$$f(x, y, z) = 3x + 2x^2 + 2y - 3xy + \frac{7}{2}y^2 + z + xz + yz + \frac{5}{2}z^2$$

Per fare questo consideriamo l'hessiano della funzione:

$$\nabla f^2(x) = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

L'hessiano risulta indipendente dal punto in cui viene calcolato. Per studiarne il segno applichiamo il test dei minori principali. I tre minori principali di questa matrice sono l'elemento in posizione $(1, 1)$ che è 4 e quindi è positivo, la sotto matrice 2×2 $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, che ha determinante pari a 19 e quindi è positivo, e infine la stessa matrice A, che ha determinante 78.
Abbiamo quindi che la funzione è strettamente convessa e di conseguenza ha un unico punto di minimo globale. Per detrminarlo dobbiamo trovare il punto in cui il gradiente si annulla, cioè il punto in cui è soddisfatta la seguente equazione:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 3 + 4x - 3y + z \\ 2 - 3x + 7y + z \\ 1 + x + y + 5z \end{pmatrix} = 0$$

Il punto che la soddisfa è $x = -\frac{422}{259} = -1.623,\ y = -\frac{553}{546} = -1.012,\ z = \frac{25}{78} = 0.32$.

1.4 Esercizio 4

Se indichiamo con la variabile x il numero di unità di prodotto p_1 e con la variabile y il numero di unità di prodotto p_2 il profitto dell'industria che vogliamo massimizzare è dato dalla differenza tra il ricavo e i costi. Il ricavo di questa industria è il seguente:

$$(15 - 0.001x)x + (25 - 0.0015y)y$$

dato dal prezzo di vendita del prodotto p_1 moltiplicato per il numero di unità del prodotto stesso sommato al prezzo di vendita del prodotto p_2 moltiplicato per il numero di unità del prodotto stesso. I costi sono invece dati da due contributi: quello dovuto ai costi di produzione di entrambi i prodotti:

$$(5 + \frac{1.5}{x})x + (7 + \frac{2.5}{y})y$$

e quello dovuto ai costi di manutenzione:

$$(x + y)[0.2 + 2.3 \times 10^{-5}(x + y) + 5.3 \times 10^{-9}(x + y)^2]$$

La funzione obiettivo complessiva da massimizzare è quindi la seguente:

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= (15 - 0.001x)x + (25 - 0.0015y)y - \big[(5 + \frac{1.5}{x})x + (7 + \frac{2.5}{y})y \\ &+(x + y)[0.2 + 2.3 \times 10^{-5}(x + y) + 5.3 \times 10^{-9}(x + y)^2]\big] \end{aligned}$$

che può essere riscritta nella seguente forma:

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= -5.3 \times 10^{-9}x^3 - 5.3 \times 10^{-9}y^3 - 1.023 \times 10^{-3}x^2 - 1.523 \times 10^{-3}y^2 \\ &-15.9 \times 10^{-9}x^2y - 15.9 \times 10^{-9}xy^2 - 2.3 \times 10^{-5}xy + 9.8x + 17.8y - 4 \end{aligned}$$

il cui gradiente è:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -15.9 \times 10^{-9}x^2 - 2.046 \times 10^{-3}x - 31.8 \times 10^{-9}xy - 15.9 \times 10^{-9}y^2 - 4.6 \times 10^{-5}y + 9.8 \\ -15.9 \times 10^{-9}y^2 - 3.046 \times 10^{-3}y - 15.9 \times 10^{-9}x^2 - 31.8 \times 10^{-9}xy - 4.6 \times 10^{-5}x + 17.8 \end{pmatrix}$$

I punti per cui questo gradiente si annulla sono due, il primo ha coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -54213.3 \\ -33475.5 \end{pmatrix}$$

il secondo ha coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3994.4 \\ 5329.6 \end{pmatrix}$$

e studiando l'hessiano si vede che il primo è un punto di sella e il secondo è un punto di massimo e quindi la nostra soluzione desiderata .
Notiamo che il primo punto ha coordinate negative e quindi è una soluzione priva di senso, in quanto non si possono produrre quantità negative di un prodotto.

Questo problema è quindi un problema intrinsecamente vincolato, in quanto sarebbero necessari vincoli di non negatività sulle variabili. In questo caso però il punto di massimo è un punto di massimo non vincolato in quanto i vincoli di nonnegatività non sono attivi nel punto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3994.4 \\ 5329.6 \end{pmatrix}.$$

Riferimenti bibliografici

[1] M. Asghar Bhatti, *Practical Optimization Methods*, Springer-Telos, New York, 2000.