Soluzioni degli esercizi sulla convessità per il corso di Ottimizzazione Nuovo Ordinamento

a cura di V. Piccialli*

a.a. 2002-2003

1 Soluzione degli esercizi sulla convessità

1.1 Esercizio 1

Per studiare la convessità della funzione:

$$f(x) = x^7 + x^5 + x^3 + x$$

dobbiamo studiare il segno del suo hessiano, che in questo caso coincide con la derivata seconda, che ha la seguente espressione:

$$f''(x) = 42x^5 + 20x^3 + 6x.$$

Si vede che $f''(x)$ assume valori positivi o nulli solo nell'insieme $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, possiamo quindi concludere che la funzione non è convessa in tutto lo spazio, ma solo nel suo sottoinsieme costituito dal semiasse non negativo.

1.2 Esercizio 2

Per studiare la convessità della funzione:

$$f(x, y) = x^2 + 4yx + y^2 - 4$$

dobbiamo studiare il segno del suo hessiano, che ha la seguente espressione:

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

I minori principali di questa matrice sono l'elemento in posizione $(1, 1)$ che è $2 > 0$ e la stessa matrice A, che ha determinante $-12 < 0$. Si può quindi concludere che l'hessiano non è definito o semi definito positivo, e quindi la funzione non è convessa. In particolare applivando il test degli autovalori si vede che questa matrice è indefinita.

*piccialli@dis.uniroma1.it

1.3 Esercizio 3

Per studiare la convessità della funzione:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

dobbiamo studiare il segno del suo hessiano, che ha la seguente espressione:

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poichè questo hessiano è una matrice diagonale è di semplice applicazione il test degli autovalori. Infatti i suoi autovalori sono gli elementi della diagonale principale, che sono tutti strettamente positivi. Questa osservazione ci permette di concludere l'hessiano è definito positivo e quindi che la funzione di partenza è strettamente convessa su tutto lo spazio.

1.4 Esercizio 4

Si vuole determinare se il seguente problema di ottimizzazione è un problema convesso:

$$\begin{aligned} \max f(x,y) = \quad & -6x + 9y \\ & x - y \geq 2 \\ & 3x + y \geq 1 \\ & 2x - 3y \geq 3 \end{aligned}$$

Per studiarne la convessità, dovremmo in teoria trasformare il problema nella forma

$$\begin{aligned} & \min f(x,y) \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

ma per questo specifico problema non è necessario, poichè sia funzione obiettivo che vincoli sono lineari e quindi convessi indipendentemente dal segno dei coefficienti. Si può quindi concludere che il problema è convesso.

1.5 Esercizio 5

Si vuole determinare se il seguente problema di ottimizzazione è un problema convesso:

$$\begin{aligned} \min f(x,y) = \quad & x^2 + 2y^2 \qquad (1) \\ & x + y \geq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Anche in questo caso non è necessaria la trasformazione nella forma

$$\min f(x,y)$$
$$g(x) \leq 0$$

perchè i vincoli sono lineari e il problema è già di minimizzazione. Innanzitutto studiamo la convessità della funzione obiettivo, considerandone l'hessiano:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di questa matrice sono $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = 4$, da cui si ha che la funzione obiettivo è strettamente convessa. Per quel che riguarda i vincoli, sono tutti vincoli lineari e quindi convessi. Si può quindi concludere che il problema è convesso.

1.6 Esercizio 6

Si vuole determinare se il seguente problema di ottimizzazione è un problema convesso:

$$\begin{aligned} \min f(x,y) = \quad & (x-2)^2 + (y-10)^2 \\ & x^2 + y^2 = 50 \\ & x^2 + y^2 + 2xy - x - y + 20 \leq 0 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Quello che si può immediatamente osservare è che si ha un vincolo di uguaglianza non lineare, e quindi si può immediatamente concludere che il problema non è convesso.

1.7 Esercizio 7

Si vuole determinare se il seguente problema di ottimizzazione è un problema convesso:

$$\begin{aligned} \min f(x,y) = \quad & (x-2)^2 + (y-10)^2 \\ & x^2 + y^2 \leq 50 \\ & x^2 + y^2 + 2xy - x - y + 20 \leq 0 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Trasformiamo il problema nella forma

$$\min f(x,y)$$
$$g(x) \leq 0$$

ottenendo:

$$\begin{aligned} \min f(x,y) = \quad & (x-2)^2 + (y-10)^2 \\ & x^2 + y^2 \leq 50 \\ & x^2 + y^2 + 2xy - x - y + 20 \leq 0 \\ & -x, -y \leq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Notiamo che questa volta abbiamo vincoli solo di disuguaglianza. Innanzitutto studiamo la convessità della funzione obiettivo, considerandone l'hessiano:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di questa matrice sono $\alpha_1 = \alpha_2 = 2 > 0$, da cui si ha che la funzione obiettivo è strettamente convessa. Consideriamo ora il primo vincolo:

$$g_1(x,y) = x^2 + y^2 - 50 \leq 0$$

Il suo hessiano ha la seguente espressione:

$$\nabla^2 g_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e quindi anche questo vincolo è convesso. Passiamo ora al secondo vincolo:

$$g_2(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy - x - y + 20 \leq 0$$

il cui hessiano è

$$\nabla^2 g_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di questa matrice sono $\alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 4 > 0$, da cui si ha che l'hessiano è semidefinito positivo, e quindi la funzione è convessa. Infine abbiamo due vincoli lineari e quindi convessi. Possiamo dunque concludere che il problema è convesso.

1.8 Esercizio 8

Si vuole determinare se il seguente problema di ottimizzazione è un problema convesso:

$$\begin{aligned} \min f(x,y) = \quad & x^2 + y^2 - \log(x^2 y^2) \\ & x \leq \log(y) \\ & x \geq 1 \\ & y \geq 1 \end{aligned} \tag{5}$$

Trasformiamo il problema nella forma

$$\begin{aligned} & \min f(x,y) \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

ottenendo:

$$\begin{aligned} \min f(x,y) = \quad & x^2 + y^2 - \log(x^2 y^2) \\ & x - \log(y) \leq 0 \\ & -x + 1 \leq 0 \\ & -y + 1 \leq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Notiamo che la funzione obiettivo e il primo vincolo sono definite ovunque nell'insieme ammissibile, in quanto abbiamo i vincoli $x \geq 1, y \geq 1$. Innanzitutto studiamo la convessità della funzione obiettivo, considerandone l'hessiano:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{2}{x^2} & 0 \\ 0 & 2 + \frac{2}{y^2} \end{pmatrix}$$

I minori principali di questa matrice sono l'elemento in posizione $(1,1)$ che è $2 + \frac{2}{x^2} > 0$ e la stessa matrice A, che ha determinante $4 + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{4}{x^2 y^2} > 0$. Si può quindi concludere che l'hessiano è definito positivo nella regione ammissibile, e quindi la funzione è strettamente convessa. Passiamo ora a considerare i vincoli, in particolare il primo non lineare. Anche in questo caso consideriamo l'hessiano:

$$\nabla^2 g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di questa matrice sono l'elemento in posizione $(1,1)$ che è 0 e l'elemento in posizione $(2,2)$, che è $\frac{1}{y^2} > 0$. Si può quindi concludere che l'hessiano è semidefinito positivo nella regione ammissibile, e quindi la funzione è convessa. Gli altri due vincoli sono lineari e quindi convessi. Possiamo quindi concludere che il problema è convesso in quanto la funzione obiettivo è convessa e i vincoli di disuguaglianza sono convessi.

Riferimenti bibliografici

[1] M. Asghar Bhatti, *Practical Optimization Methods*, Springer-Telos, New York, 2000.