ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2° anno**

Cognome : **Nome** : **Voto previsto** :

Questo foglio NON deve essere consegnato e' serve per poter effettuare un'**AUTOVALUTAZIONE** seguendo i seguenti criteri: Per gli esercizi 1,2,3,4: ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO e ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO), nessuna risposta vale **0** PUNTI. Per gli esercizi 5,6,7: ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI e ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO), nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*punteggio massimo = 5, punteggio minimo =-2.5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2 + x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa.

   VERO **X** FALSO

2. La funzione è coerciva.

   VERO FALSO **X**

3. Il punto $(\frac{1}{3},\ 0,\ -\frac{2}{3})^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

   VERO **X** FALSO

4. È possibile affermare che i punti $(\frac{1}{3},\ 0,\ -\frac{2}{3})^T$, $(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -1)^T$ sono minimi globali

   VERO **X** FALSO

5. Il passo $\alpha = \frac{1}{2}$ soddisfa una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente nel punto $x^0 = (0,\ 0,\ 0)^T$ (valore di $\gamma = \frac{1}{4}$).

   VERO FALSO **X**

Esercizio 2 . (*punteggio massimo = 5, punteggio minimo =-2.5*)

Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x + y \\ & (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1 \\ & (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \\ & x \geq y \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema non è convesso.

   VERO **X** FALSO

2. Il punto $(0,\ 0)^T$ soddisfa le condizioni di KKT.

   VERO FALSO **X**

3. Il punto $(2,\ 2)^T$ soddisfa le condizioni di KKT.

   VERO **X** FALSO

4. Nel punto $\left(1-\sqrt{2}/2,\ 1-\sqrt{2}/2\right)^T$, che soddisfa le condizioni di KKT, vale la stretta complementarità.

   VERO FALSO **X**

5. Nel punto di KKT $\left(1-\sqrt{2}/2,\ 1-\sqrt{2}/2\right)^T$ è soddisfatta la condizione necessaria del secondo ordine.

   VERO **X** FALSO

Esercizio 3. (*punteggio massimo = 5, punteggio minimo =-2.5*)

Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 + 6x_2 \\ & -x_1 + x_2 \geq 2 \\ & 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste) e sia $\bar{x} = (0,\ 3,\ 10)^T$ un punto ammissibile.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 2y_1 + y_2 \\ & -y_1 + 3y_2 \leq -3 \\ & y_1 - 3y_2 \leq 6 \\ & y_2 \leq 0, \\ & y_1 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO **X** FALSO

2. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 2y_1 + y_2 \\ & -y_1 + 3y_2 \leq -3 \\ & y_1 - 3y_2 \leq 6 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO FALSO **X**

3. Il punto $(2, \; -1)^T$ è ammissibile per il duale e si ha $3 \leq b^T y^* \leq 18$ dove y^* è la soluzione ottima del duale (se esiste).

VERO **X** FALSO

4. Il problema duale è illimitato.

VERO FALSO **X**

5. Il punto $y^* = (6, \; 0)^T$ è ottimo per il problema duale.

VERO **X** FALSO

Esercizio 4. (*punteggio massimo = 3, punteggio minimo =-1.5*) Sia dato il seguente file:

ex.mod

```
set RIGHE;
set COLONNE;
param A{RIGHE, COLONNE};
param B{RIGHE};
var x{COLONNE}>=0.001;
minimize obiettivo:  1+sum{j in COLONNE}x[j];
s.t.  VINC{i in RIGHE}:sum{j in COLONNE}A[i,j]/x[j]<=B[i];
s.t.  UB{j in COLONNE}:x[j]<=5;
```

e il seguente file

ex.dat

```
set RIGHE:=1..2;
set COLONNE:=1..4;
param A: 1 2 3 4:=
1 4 2.25 1 0.25
2 0.16 0.36 0.64 0.64;
param B:=
1 0.4
2 0.25;
```

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema a cui fa riferimento il file ex.mod ha 4 variabili nel range $[0.001, 5]$.

VERO **X** FALSO

2. La funzione obiettivo espressa la seguente:

$$\min 1 + \sum_{j=1}^{4} x_j$$

VERO **X** FALSO

3. Il primo gruppo di vincoli è:

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{A_{i,j}}{x_j} \leq b_j, \quad j = 1, \ldots, 4$$

VERO FALSO **X**

Esercizio 5. (*punteggio massimo = 1, punteggio minimo =-1*)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata della una funzione $f(x) = x^T A^T Ax + b^T x$ ovvero si consideri il problema

$$\min_{R^n} \; x^T A^T Ax + b^T x$$

con A matrice $m \times n$, $b, x \in R^n$.

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è quadratica e convessa.

VERO **X** FALSO

2. Il punto $\bar{x} = 0$ è l'unico minimo globale.

VERO FALSO **X**

3. La matrice hessiana è $A^T A$ simmetrica $n \times n$.

VERO FALSO **X**

4. Il metodo del gradiente con ricerca di linea esatta converge al minimo della funzione in un numero finito di passi.

VERO FALSO **X**

Esercizio 6. (*punteggio massimo = 1, punteggio minimo =-1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

con $g : R^n \rightarrow \; R^m$, $c \in R^n$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $g_i(x)$ sono funzioni convesse per $i = 1, \dots, m$, allora il problema è convesso.

VERO **X** FALSO

2. Il problema si può risolvere utilizzando un metodo basato su una funzione Lagrangiana aumentata.

VERO **X** FALSO

3. Le condizioni necessarie di KKT richiedono la regolarità dei vincoli.

VERO **X** FALSO

4. Se $L(x, \lambda)$ è la funzione Lagrangiana, risulta $\nabla^2 L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla^2 g_i(x)$.

VERO **X** FALSO

Esercizio 7. (*punteggio massimo = 1, punteggio minimo =-1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & A_1^T x \geq b_1 \\ & A_2^T x = b_2 \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (P)$$

con A_1 matrice $n \times m_1$, A_2 matrice $n \times m_2$ $x \in R^n$ e $b_1 \in R^{m_1}$, $b_2 \in R^{m_2}$. Si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. I vincoli del problema duale sono n tutti di disuguaglianza.

VERO **X** FALSO

2. Un punto $\bar{u} = (\bar{u}_1^T, \bar{u}_2^T)^T \in R^{m_1+m_2}$ tale che $A_1^T \bar{u}_1 + A_2^T \bar{u}_2 \leq c$, $\bar{u}_1 \geq 0$, è ammissibile per il duale.

VERO FALSO **X**

3. Se $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile per il primale e $\bar{u}$ è una soluzione ammissibile per il duale e risulta $c^T \bar{x} = b_1^T \bar{u}$, allora $\bar{x}$, $\bar{u}$ sono ottimi.

VERO FALSO **X**

4. Se $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile per il primale e $\bar{u} = (\bar{u}_1^T, \bar{u}_2^T)^T \in R^{m_1+m_2}$ è una soluzione ammissibile per il duale e risulta $\bar{u}_1^T(b_1 - A_1^T x) = 0$ e $\bar{x}^T(A_1^T \bar{u}_1 + A_2^T \bar{u}_2 - c) = 0$, allora $\bar{x}$ e $\bar{u}$ sono ottimi.

VERO FALSO **X**