ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A (bianco)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2º anno

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4:
ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.
Per gli esercizi 5,6,7:
ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min \; x_1(x_2-2)(x_3-1) + x_2x_3^2 + x_2^2x_3 + x_1^2(x_3+x_2) - 6x_1x_3 - 6x_1 - 9x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa.

   VERO ☐ FALSO **X**

2. Il punto $(2,\ 2,\ 1)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

   VERO **X** FALSO ☐

3. Si può escludere che il punto $(2,\ 2,\ 1)^T$ sia un minimo.

   VERO **X** FALSO ☐

4. La direzione $d = (6,\ 3,\ -3)^T$ corrisponde alla direzione usata dal metodo del gradiente nel punto $x^0 = (1,\ 2,\ 1)^T$, è di discesa in tal punto e una ricerca di linea esatta produce un valore del passo α non negativo.

   VERO **X** FALSO ☐

5. Nel punto $(1,\ 2,\ 1)^T$ è possibile definire la direzione del metodo di Newton puro.

   VERO **X** FALSO ☐

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & y - x^2 \\ & 3x^2 + y^2 = 4 \\ & -x \le y \le x \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

VERO	FALSO **X**

2. Esiste un punto di KKT in cui è attivo solo il vincolo di uguaglianza.

VERO	FALSO **X**

3. Il punto $(1, \ -1)^T$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

VERO **X**	FALSO

4. Il punto $(1, \ -1)^T$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni sufficienti del secondo ordine per problemi vincolati.

VERO **X**	FALSO

5. Per la soluzione del problema si può utilizzare un metodo di penalità sequenziale esterna.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*)Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \qquad & 10x_2 + 6x_3 \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ & -x_1 + 5x_2 - 2x_3 \ge 10 \\ & x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste). Sia $\bar{x} = (3, \ 7/2, \ 0)$ un punto ammissibile.

1. Il problema

   $$\begin{aligned} \max \quad & 4u_1 + 10u_2 \\ & -u_1 - u_2 \le 0 \\ & 2u_1 + 5u_2 \le 10 \\ & 3u_1 - 2u_2 \le 6 \\ & u_1 \ge 0 \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO	FALSO **X**

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & 4u_1 + 10u_2 \\ & -u_1 - u_2 \leq 0 \\ & 2u_1 + 5u_2 \leq 10 \\ & 3u_1 - 2u_2 \leq 6 \\ & u_2 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO **X**	FALSO

3. Sia u^* la soluzione ottima del duale se esiste. Si ha $b^T u^* \geq 35$.

VERO	FALSO **X**

4. Entrambi i punti $u^* = (-10/3,\ 10/3)^T$ e $u^* = (-1,\ 12/5)^T$ sono ottimi per il problema duale.

VERO **X**	FALSO

5. La funzione obiettivo all'ottimo vale 20.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Sia dato il seguente problema di Ottimizzazione non lineare:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i \in S} x_i^4 \sum_{j \in T} d_j * cos(y_j) \\ & \sum_{i \in S} t_{ij} x_i^3 - sin(y_j) \leq d_j \quad j \in T \\ & 0 \leq x_i \leq u_i \quad i \in S \\ & lb_j \leq y_j \leq ub_j \quad j \in T \end{aligned} \tag{1}$$

Dove x_i e y_j sono le variabili del problema mentre u_i, lb_j, ub_j, d_j t_{ij} con $i \in S$ e $j \in T$ sono parametri del problema. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La seguente dichiarazione di parametri e variabili è corretta:

```
param d{j in T};
param u{i in S};
param lb{T};
set S;
set T;
param ub{T};
param t{S,T};
var x{S};
var y{T};
```

VERO	FALSO **X**

2. La seguente dichiarazione della funzione obiettivo è errata:

```
minimize obiettivo:  sum{i in S}x[i]**4* sum{j in T}d[j]*cos(y[j]);
```

VERO	FALSO **X**

3. La seguente dichiarazione dei vincoli è errata:

```
s.t.  v1{j in T}:  sum{i in S}(t[i,j]*x[i]**3)-sin(y[j])<=d[j];
s.t.  box1{i in S}:  x[i]>=0;
s.t.  box2{i in S}:  x[i]<=u[i];
s.t.  box3{j in T}:  y[j]>=lb[j];
s.t.  box4{j in T}:  y[j]<=ub[j];
```

VERO	FALSO **X**

Esercizio 5.(**Punteggio massimo = 1**)

Sia dato il problema di minimizzazione non vincolata

$$\min_{R^n} \ f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + c^T x.$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è strettamente convessa.

VERO **X**	FALSO

2. Esiste un'unica soluzione al problema $\min_{R^n} \ f(x)$e vale $x^* = -c$.

VERO **X**	FALSO

3. Il metodo delle gradiente converge all'unico punto di minimo della funzione.

VERO **X**	FALSO

4. Se $\mathbf{Q} \succeq \mathbf{0}$[1], il metodo del gradiente coniugato converge alla soluzione ottima in n passi.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & g(x) \geq 0 \end{array}$$

con $f : R^n \rightarrow \ R$ e $g : R^n \rightarrow \ R^m$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e le funzioni $-g_j(x)$ sono convesse per ogni $j = 1, \ldots, m$, allora il problema è convesso.

VERO **X**	FALSO

2. Se il problema è convesso, ammette certamente soluzione globale.

VERO	FALSO **X**

[1] imprecisione nel testo

3. Se in un punto ammissibile $\bar{x}$ i gradienti dei vincoli attivi $\nabla g_j(\bar{x}),\ j:\ g_j(\bar{x}) = 0$, sono linearmente indipendenti, i vincoli sono regolari in $\bar{x}$.

VERO **X**	FALSO

4. La funzione

$$f(x) + \frac{1}{\epsilon}\sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x)\}^2$$

è una funzione di penalità esterna per il problema.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & A_1 x \geq b_1 \\ & A_2 x = b_2 \end{aligned} \qquad (P)$$

con A_1 matrice $m_1 \times n$, A_2 matrice $m_2 \times n$ e $x \in R^n$, $c \in R^n$; si indichi con $x^* \in R^n$ la soluzione ottima, se esiste.

1. I vincoli del problema duale sono n tutti di disuguaglianza.

VERO	FALSO **X**

2. Se il problema primale ammette soluzione ottima finita x^*, allora esiste una soluzione ammissibile $\bar{u}$ del problema duale.

VERO **X**	FALSO

3. Se $\bar{u} \in R^{m_1+m_2}$ è un punto tale che $\begin{pmatrix} A_1^T & A_2^T \end{pmatrix}\bar{u} = c$, allora $(b_1^T \ \ b_2^T)\bar{u} = c^T x^*$.

VERO	FALSO **X**

4. Se il problema primale è illimitato, allora sicuramente non esistono soluzioni ammissibili per il problema duale.

VERO **X**	FALSO

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B (colore)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2^o anno

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE

Per gli esercizi 1,2,3,4:
ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Per gli esercizi 5,6,7:
ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min \; x_1(x_2-2)(x_3-1)+x_2x_3^2+x_2^2x_3+x_1^2(x_3+x_2)-6x_1x_3-6x_1-9x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione NON è convessa.

VERO **X** FALSO

2. Il punto $(2,\ 2,\ 1)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

VERO **X** FALSO

3. Il punto $(2,\ 2,\ 1)^T$ è un minimo locale stretto.

VERO FALSO **X**

4. La direzione $d=(-6,\ -3,\ 3)^T$ nel punto $x^0=(1,\ 2,\ 1)^T$, è di salita in tal punto.

VERO **X** FALSO

5. Nel punto $(1,\ 2,\ 1)^T$ è possibile definire la direzione del metodo di Newton puro.

VERO **X** FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & y-x^2 \\ & 3x^2+y^2=4 \\ & -x\le y\le x \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema NON è convesso.

VERO X	FALSO

2. NON esiste un punto di KKT in cui è attivo solo il vincolo di uguaglianza.

VERO X	FALSO

3. Il punto $(1, \ -1)^T$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

VERO X	FALSO

4. Il punto $(1, \ -1)^T$ NON soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine per problemi vincolati.

VERO	FALSO X

5. Per la soluzione del problema si può utilizzare un metodo di penalità sequenziale interna.

VERO	FALSO X

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*)Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{array}{ll} \min & 10x_2 + 6x_3 \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ & -x_1 + 5x_2 - 2x_3 \geq 10 \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0 \end{array}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste). Sia $\bar{x} = (3, \ 7/2, \ 0)$ un punto ammissibile.

1. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & 4u_1 + 10u_2 \\ & -u_1 - u_2 \leq 0 \\ & 2u_1 + 5u_2 \leq 10 \\ & 3u_1 - 2u_2 \leq 6 \\ & u_2 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO X	FALSO

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & 4u_1 + 10u_2 \\ & -u_1 - u_2 \leq 0 \\ & 2u_1 + 5u_2 \leq 10 \\ & 3u_1 - 2u_2 \leq 6 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO	FALSO X

3. Sia u^* la soluzione ottima del duale se esiste. Si ha $b^T u^* \geq 35$.

VERO	FALSO X

4. Il punto $u^* = (-1,\ 12/5)^T$ è ottimi per il problema duale.

VERO **X** | FALSO

5. La funzione obiettivo all'ottimo vale 20.

VERO **X** | FALSO

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Sia dato il seguente problema di Ottimizzazione non lineare:

$$\begin{aligned} &\min \ \sum_{i \in S} x_i^4 \sum_{j \in T} d_j * cos(y_j) \\ &\sum_{i \in S} t_{ij} x_i^3 - sin(y_j) \leq d_j \quad j \in T \\ &0 \leq x_i \leq u_i \quad i \in S \\ &lb_j \leq y_j \leq ub_j \quad j \in T \end{aligned} \tag{2}$$

Dove x_i e y_j sono le variabili del problema mentre u_i, lb_j, ub_j, d_j t_{ij} con $i \in S$ e $j \in T$ sono parametri del problema. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La seguente dichiarazione di parametri e variabili è errata:

```
param d{j in T};
param u{i in S};
param lb{T};
set S;
set T;
param ub{T};
param t{S,T};
var x{S};
var y{T};
```

VERO **X** | FALSO

2. La seguente dichiarazione della funzione obiettivo è corretta:

```
minimize obiettivo:  sum{i in S}x[i]**4* sum{j in T}d[j]*cos(y[j]);
```

VERO **X** | FALSO

3. La seguente dichiarazione dei vincoli è errata:

```
s.t.  v1{j in T}:  sum{i in S}(t[i,j]*x[i]**3)-sin(y[j])<=d[j];
s.t.  box1{i in S}:  x[i]>=0;
s.t.  box2{i in S}:  x[i]<=u[i];
s.t.  box3{j in T}:  y[j]>=lb[j];
s.t.  box4{j in T}:  y[j]<=ub[j];
```

VERO | FALSO **X**

Esercizio 5.(**Punteggio massimo = 1**)

Sia dato il problema di minimizzazione non vincolata

$$\min_{R^n} \; f(x) = -\frac{1}{2}\|x\|^2 + c^T x.$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa.

   VERO | FALSO **X**

2. Esiste un'unico punto stazionario $\bar{x} = -c$ che non è minimo.

   VERO | FALSO **X**

3. Il metodo delle gradiente converge all'unico punto di minimo della funzione.

   VERO | FALSO **X**

4. In ogni punto $\hat{x}$ tale che $\nabla f(\hat{x}) \neq 0$ esiste una direzione di discesa.

   VERO **X** | FALSO

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \end{array}$$

con $f : R^n \to R$ e $g : R^n \to R^m$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e le funzioni $-g_j(x)$ sono convesse per ogni $j = 1, \ldots, m$, allora il problema è convesso.

   VERO | FALSO **X**

2. Se il problema è convesso, può non ammettere soluzione globale.

   VERO **X** | FALSO

3. Se in un punto ammissibile $\bar{x}$ i gradienti dei vincoli attivi $\nabla g_j(\bar{x})$, $j : g_j(\bar{x}) = 0$, sono linearmente indipendenti, i vincoli sono regolari in $\bar{x}$.

   VERO **X** | FALSO

4. La funzione

$$-f(x) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{m} \min\{0, g_i(x)\}^2$$

   è una funzione di penalità esterna per il problema.

   VERO | FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & A_1 x = b_1 \\ & A_2 x \geq b_2 \end{array} \qquad (P)$$

con A_1 matrice $m_1 \times n$, A_2 matrice $m_2 \times n$ e $x \in R^n$, $c \in R^n$; si indichi con $x^* \in R^n$ la soluzione ottima, se esiste.

1. I vincoli del problema duale sono n tutti di uguaglianza.

   VERO **X** | FALSO

2. Le variabili duali sono $m_1 + m_2$. Le prime m_1 sono non negative.

   VERO | FALSO **X**

3. Se $\bar{u} \in R^{m_1+m_2}$ è un punto tale che $\begin{pmatrix} A_1^T & A_2^T \end{pmatrix} \bar{u} = c$, allora $(b_1^T \;\; b_2^T)\bar{u} = c^T x^*$.

   VERO | FALSO **X**

4. Se il problema primale è vuoto, allora sicuramente non esistono soluzioni ammissibili per il problema duale.

   VERO | FALSO **X**