ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A (bianco)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2º anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4: ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO e ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO), nessuna risposta vale **0** PUNTI. Per gli esercizi 5,6,7: ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI e ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO), nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min \ f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è strettamente convessa in R^2.

   VERO **X** FALSO

2. Il punto $(1/2, \ -1/2, \ 0)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

   VERO **X** FALSO

3. Il punto $(1/2, \ -1/2, \ 0)^T$ è minimo globale unico.

   VERO **X** FALSO

4. Le direzioni $d^1 = (0, \ -5, \ 0)^T$, $d^2 = (3, \ -1, \ 0)^T$ sono mutuamente coniugate tra loro.

   VERO **X** FALSO

5. A partire dal punto iniziale $x^0 = (0, \ 0, \ 0)^T$, il metodo del gradiente con una ricerca di linea esatta determina un punto x^1 con valore della funzione obiettivo inferiore rispetto quello in x^0.

   VERO **X** FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min\ & x^3 - 2y^2 \\ & x^2 + y^2 = 4 \\ & x - y \geq -2 \\ & x + 2y \geq -2 \\ & 3x + y \leq 2 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

   VERO ☐ FALSO **X**

2. È possibile affermare che il problema ammette soluzione globale.

   VERO **X** FALSO ☐

3. Nel punto $(0,\ 2)^T$ i vincoli sono regolari .

   VERO ☐ FALSO **X**

4. Il punto $(0,\ 2)^T$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

   VERO **X** FALSO ☐

5. La funzione

   $$P = x^3 - 2y^2 + \frac{1}{\varepsilon}\Big(\big(x^2 + y^2 - 4\big)^2 + \max\{x - y + 2, 0\}^2 \max\{x + 2y + 2, 0\}^2 + \min\{3x + y - 2, 0\}^2\Big)$$

   è una funzione di penalità sequenziale esterna per il problema.

   VERO ☐ FALSO **X**

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min\ & -3x_1 - 6x_2 - 3x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste). Sia $\bar{x} = (0,\ 3/2,\ 1)$ un punto ammissibile per il primale e sia $\bar{u} = (6,\ 0)^T$ un punto ammissibile per il duale.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \min\ & 3u_1 + 4u_2 \\ & u_1 + u_2 \geq 6 \\ & u_1 + 2u_2 \geq 3 \\ & u_1 + u_2 \geq 3 \\ & u_1 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO ☐ FALSO ☒ **X**

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & -3u_1 + 4u_2 \\ & -u_1 + u_2 \leq -6 \\ & -u_1 + 2u_2 \leq -3 \\ & -u_1 + u_2 \leq -3 \\ & u_1 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO ☐ FALSO **X**

3. Sia u^* la soluzione ottima del duale se esiste. Si ha $12 \leq |b^T u^*| \leq 18$.

VERO **X** FALSO ☐

4. Il punto $x^* = (0,\ 2,\ 0)^T$ è ottimo per il problema primale.

VERO **X** FALSO ☐

5. Esiste una soluzione per il problema duale.

VERO **X** FALSO ☐

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Sia dato il seguente problema di Ottimizzazione non lineare:

$$\begin{array}{l} \min \ \ \sin(\sum_{i=1}^{n} x_i) \\ c_{ij} x_i \leq d_j \ \ i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m \end{array} \tag{1}$$

Dove x_i sono le variabili del problema mentre c_{ij}, e d_j con $i = 1, \ldots, n$ $j = 1, \ldots, m$ sono parametri del problema. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La seguente dichiarazione di parametri e variabili è corretta:

```
param n;
param m;
param c{1..n,1..m};
var y{1..m};
var x{1..n};
```

VERO ☐ FALSO **X**

2. La seguente dichiarazione della funzione obiettivo è esatta:

```
minimize obiettivo{i in 1..n}:  sin(sum{i in 1..n}x[i])
```

VERO ☐ FALSO **X**

3. La seguente dichiarazione dei vincoli è corretta:

```
s.t.  v1{i in 1..n,j in 1..m}:  c[i,j]*x[i]<=d[j];
```

VERO **X**	FALSO

Esercizio 5. (*punteggio massimo = 1, punteggio minimo =-1*)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata

$$\min_{x \in R^n} \frac{1}{2} x^T Q x + C\|x\|^2$$

con Q matrice simmetrica $n \times n$ e C costante strettamente positiva, $x \in R^n$.

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il punto $\bar{x} = 0$ è sempre un punto stazionario.

VERO **X**	FALSO

2. La funzione è quadratica con matrice hessiana è $Q + 2CI$ dove I indica la matrice identità $n \times n$.

VERO **X**	FALSO

3. Se Q è semidefinita positiva, la funzione ammette minimo per ogni valore di $C > 0$.

VERO **X**	FALSO

4. Se Q è definita positiva, il metodo del gradiente con ricerca di linea di Armijo converge al minimo della funzione.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & Ax \geq b \end{array}$$

con $f : R^n \to R$, A matrice $m \times n$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è coerciva ed esiste un punto ammissibile, allora il problema ammette soluzione globale.

VERO **X**	FALSO

2. Se $f(x)$ è convessa le condizioni di KKT sono necessarie e sufficienti.

VERO **X**	FALSO

3. Il problema non si può risolvere con un metodo di penalità interna.

VERO	FALSO **X**

4. Il problema si può risolvere con un metodo di penalità esterna.

VERO **X** | FALSO

Esercizio 7. (*punteggio massimo = 1, punteggio minimo =-1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\min \quad [c_1\ c_2]^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$[A_1 \quad A_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq b \qquad (P)$$

$$x_1 \geq 0$$

con $A = [A_1 \quad A_2]$ e A_1 matrice $m \times n_1$, A_2 matrice $m \times n_2$ e $x = [x_1\ x_2]^T \in R^n$. Si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Il problema duale ha m variabili duali di cui solo n_1 sono vincolate in segno.

   VERO | FALSO **X**

2. Se esiste una soluzione ottima x^* e risulta $x_1^* > 0$ allora esiste un punto ammissibile duale $\bar{u}$ tale che $A_1^T \bar{u} = c_1$.

   VERO **X** | FALSO

3. Un punto $\bar{u} \in R^m$ tale che $A_1^T \bar{u} \leq c_1$ $A_2^T \bar{u} = c_2$, $\bar{u} \geq 0$, è ammissibile per il duale.

   VERO **X** | FALSO

4. Se $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile per il primale e $\bar{u} =\in R^m$ è una soluzione ammissibile per il duale e risulta $c^T \bar{x} = b^T \bar{u}$, allora $\bar{x}$, $\bar{u}$ sono ottimi.

   VERO **X** | FALSO

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B (azzurro)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2° anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4:
ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.
Per gli esercizi 5,6,7:
ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min \ f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 - 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa in R^2.

   VERO **X** FALSO

2. Il punto $(1/2, \ -1/2, \ 0)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

   VERO FALSO **X**

3. Il punto $(1/2, \ -1/2, \ 0)^T$ è minimo globale unico.

   VERO FALSO **X**

4. Le direzioni $d^1 = (0, \ -5, \ 0)^T$, $d^2 = (-3, \ 1, \ 0)^T$ non sono mutuamente coniugate tra loro.

   VERO FALSO **X**

5. A partire dal punto iniziale $x^0 = (0, \ 0, \ 0)^T$, il metodo del gradiente con una ricerca di linea esatta determina un punto x^1 con valore della funzione obiettivo inferiore rispetto quello in x^0.

   VERO **X** FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min\ & x^3 - 2y^2 \\ & x^2 + y^2 = 4 \\ & x - y \geq -2 \\ & x + 2y \geq -2 \\ & 3x + y \leq 2 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema non è convesso.

   VERO **X** FALSO

2. È possibile affermare che il problema ammette soluzione globale.

   VERO **X** FALSO

3. Nel punto $(0,\ 2)^T$ i vincoli sono regolari .

   VERO FALSO **X**

4. Il punto $(0,\ 2)^T$ non soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

   VERO FALSO **X**

5. La funzione

   $$P = x^3 - 2y^2 + \frac{1}{\varepsilon}\Big(\Big(x^2 + y^2 - 4\Big)^2 + \min\{x - y + 2, 0\}^2 \min\{x + 2y + 2, 0\}^2 + \max\{3x + y - 2, 0\}^2\Big)$$

   è una funzione di penalità sequenziale esterna per il problema.

   VERO **X** FALSO

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min\ & -3x_1 - 6x_2 - 3x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste). Sia $\bar{x} = (0,\ 3/2,\ 1)$ un punto ammissibile per il primale e sia $\bar{u} = (6,\ 0)^T$ un punto ammissibile per il duale.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \min\ & 3u_1 + 4u_2 \\ & u_1 + u_2 \geq 6 \\ & u_1 + 2u_2 \geq 3 \\ & u_1 + u_2 \geq 3 \\ & u_1 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO | FALSO **X**

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & -3u_1 + 4u_2 \\ & -u_1 + u_2 \leq -6 \\ & -u_1 + 2u_2 \leq -3 \\ & -u_1 + u_2 \leq -3 \\ & u_1 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO | FALSO **X**

3. Sia u^* la soluzione ottima del duale se esiste. Si ha $12 \leq |b^T u^*| \leq 18$.

VERO **X** | FALSO

4. Il punto $x^* = (0,\ 2,\ 0)^T$ è ottimo per il problema primale.

VERO **X** | FALSO

5. Non esiste una soluzione per il problema duale.

VERO | FALSO **X**

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Sia dato il seguente problema di Ottimizzazione non lineare:

$$\begin{array}{l} \min \ \sin(\sum_{i=1}^{n} x_i) \\ c_{ij}x_i \leq d_j \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m \end{array} \tag{2}$$

Dove x_i sono le variabili del problema mentre c_{ij}, e d_j con $i = 1, \ldots, n$ $j = 1, \ldots, m$ sono parametri del problema. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La seguente dichiarazione di parametri e variabili è corretta:

```
param n;
param m;
param c{1..n,1..m};
param y{1..m};
var x{1..n};
```

VERO **X** | FALSO

2. La seguente dichiarazione della funzione obiettivo è esatta:

```
minimize obiettivo{i in 1..n}:  sin(sum{i in 1..n}x[i])
```

VERO | FALSO **X**

3. La seguente dichiarazione dei vincoli è corretta:

```
s.t.  v1{i in 1..n}:  c[i,j]*x[i]<=d[j];
```

VERO	FALSO X

Esercizio 5. (*punteggio massimo = 1, punteggio minimo =-1*)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata

$$\min_{x \in R^n} \frac{1}{2} x^T Q x + C\|x\|^2$$

con Q matrice simmetrica $n \times n$ e C costante strettamente positiva, $x \in R^n$.

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il punto $\bar{x} = 0$ è sempre un punto stazionario.

VERO X	FALSO

2. La funzione è quadratica con matrice hessiana è $Q + 2CI$ dove I indica la matrice identità $n \times n$.

VERO X	FALSO

3. Se Q è semidefinita positiva, la funzione ammette minimo per ogni valore di $C > 0$.

VERO X	FALSO

4. Se Q è definita positiva, il metodo del gradiente con ricerca di linea di Armijo converge al minimo della funzione.

VERO X	FALSO

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & Ax \geq b \end{array}$$

con $f : R^n \rightarrow R$, A matrice $m \times n$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è coerciva ed esiste un punto ammissibile, allora il problema ammette soluzione globale.

VERO X	FALSO

2. Se $f(x)$ è convessa le condizioni di KKT sono necessarie e sufficienti.

VERO X	FALSO

3. Il problema si può risolvere con un metodo di penalità interna.

VERO X	FALSO

4. Il problema si può risolvere con un metodo di penalità esterna.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 7. (*punteggio massimo = 1, punteggio minimo =-1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} &\min \quad [c_1\ c_2]^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &[A_1 \quad A_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq b \\ &x_1 \geq 0 \end{aligned} \qquad (P)$$

con $A = [A_1 \quad A_2]$ e A_1 matrice $m \times n_1$, A_2 matrice $m \times n_2$ e $x = [x_1\ x_2]^T \in R^n$. Si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Il problema duale ha m variabili duali tutte vincolate in segno.

VERO **X**	FALSO

2. Se esiste una soluzione ottima x^* e risulta $x_1^* > 0$ allora esiste un punto ammissibile duale $\bar{u}$ tale che $A_1^T \bar{u} = c_1$.

VERO **X**	FALSO

3. Un punto $\bar{u} \in R^m$ tale che $A_1^T \bar{u} \leq c_1$ $A_2^T \bar{u} = c_2$, $\bar{u} \geq 0$, è ammissibile per il duale.

VERO **X**	FALSO

4. Se $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile per il primale e $\bar{u} =\in R^m$ è una soluzione ammissibile per il duale e risulta $c^T \bar{x} = b^T \bar{u}$, allora $\bar{x}$, $\bar{u}$ sono ottimi.

VERO **X**	FALSO