ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A (giallo)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2º anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4:
ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.
Per gli esercizi 5,6,7:
ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ \frac{1}{3}x_1^3 + 2x_2^4 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - \frac{1}{4}x_1 - x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il punto $(0,\ \frac{1}{2})^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

   VERO **X** FALSO

2. Il punto $(0,\ \frac{1}{2})^T$ soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine

   VERO **X** FALSO

3. È possibile affermare che il punto $(0,\ \frac{1}{2})^T$ è un minimo locale stretto.

   VERO **X** FALSO

4. L'approssimazione quadratica della funzione nell'intorno del punto $x^0 = (1,\ 1)^T$ ammette un unico punto di minimo.

   VERO **X** FALSO

5. Nel punto $x^0 = (1,\ 1)^T$ il metodo di Newton puro definisce una direzione di discesa.

   VERO **X** FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & 0 \leq x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

   VERO ☐ FALSO **X**

2. Per questo problema non si può utilizzare il teorema di Weierstrass per garantire l'esistenza di una soluzione globale.

   VERO **X** FALSO ☐

3. Le condizioni necessarie di KKT NON richiedono la regolarità dei vincoli.

   VERO ☐ FALSO **X**

4. Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT

   VERO **X** FALSO ☐

5. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT

   VERO ☐ FALSO **X**

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 + 12x_2 + 12x_3 \\ & -2x_1 + 4x_2 - x_3 \geq -1 \\ & -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste) e sia $\bar{x} = (1,\ 1,\ 2)^t$.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & -u_1 + 2u_2 \\ & -2u_1 - u_2 \leq 4 \\ & 4u_1 - 3u_2 \leq 12 \\ & -u_1 + 3u_2 \leq 12 \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

   VERO ☐ FALSO **X**

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & -u_1 + 2u_2 \\ & -2u_1 - u_2 \leq 4 \\ & 4u_1 - 3u_2 \leq 12 \\ & -u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & u_1 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO **X** FALSO

3. Il punto $(2,\ 2)^T$ è ammissibile per il duale e si ha $c^T x^* \leq 2$.

VERO FALSO **X**

4. Si ha $c^T x^* \leq 40$

VERO **X** FALSO

5. I punti $x^* = (0,\ 0,\ \frac{2}{3})^T$ e $u^* = (0,\ 4)^T$ sono ottimi rispettivamente per il problema primale e per il problema duale.

VERO **X** FALSO

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Sia dato il seguente problema di Ottimizzazione non lineare:

$$\begin{array}{l} \min \ \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_i^2 y_j + \sum_{j=1}^{3} p_j y_j \\ \sum_{j=1}^{3} t_{ij}(x_i - y_j) \leq d_i \quad i = 1, \ldots, 5 \\ 0 \leq x_i \leq u_i \quad i = 1, \ldots, 5 \end{array}$$

Dove x_i e y_j sono le variabili del problema mentre $d_i, u_i, p_j\ c_{ij}, t_{ij}$ con $i = 1, \ldots, 5$ $j = 1, \ldots, 3$ sono parametri del problema. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La seguente dichiarazione di parametri e variabili è corretta:

```
param c{12345, 123};
param d{12345};
param u{12345};
param t{12345, 123};
param p{123};
var x{12345};
var y{123};
```

VERO FALSO **X**

2. La seguente dichiarazione della funzione obiettivo è corretta:

```
minimize obiettivo:  sum{i in 1..5}sum{j in 1..3}(c[i,j]*x[i]**2*y[j])
                      +sum{j in 1..3}p[j]*y[j];
```

VERO **X** FALSO

3. La seguente dichiarazione dei vincoli è corretta:

```
s.t.  v1:  sum{i=1..5}sum{j in 1..3}t[i,j]*(x[i]-y[j])<=d[i];
s.t.  box1{i in 1..5}:  x[i]>=0;
s.t.  box2{i in 1..5}:  x[i]<=u[i];
```

VERO	FALSO **X**

Esercizio 5. (**Punteggio massimo = 1**)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata della una funzione $f(x) = \frac{1}{2}x^T A^T Ax + c^T x$ ovvero si consideri il problema

$$\min_{R^n} \frac{1}{2}x^T A^T Ax + c^T x.$$

con $x \in R^n$, A matrice $m \times n$ e c vettore di R^n.

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è quadratica e convessa.

VERO **X**	FALSO

2. La funzione ammette minimo se e solo se esiste una soluzione del sistema $A^T Ax = -c$.

VERO **X**	FALSO

3. La funzione può non avere minimi.

VERO **X**	FALSO

4. Il metodo del gradiente determina il minimo della funzione con rapidità di convergenza lineare.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & h(x) = 0 \end{array}$$

con $f : R^n \to R$, $h : R^n \to R^p$, A matrice $m \times n$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e $h_i(x)$ sono lineari per ogni $i = 1, \ldots, p$ allora il problema è convesso.

VERO **X**	FALSO

2. È possibile definire una funzione di penalità interna per il problema dato.

VERO	FALSO **X**

3. Sia $\bar{x}$ un punto ammissibile NON regolare. Se $\bar{x}$ è un minimo locale allora soddisfa le condizioni di KKT.

VERO	FALSO **X**

4. Sia $\bar{x}$ un punto regolare che soddisfa le condizioni di KKT. Se l'insieme

$$\{d \in R^n : \ d \neq 0 \ \nabla h(\bar{x})^T d = 0\}$$

è vuoto, allora $\bar{x}$ soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & c_1^T x_1 + c_2^T x_2 \\ & A_1 x_1 + A_2 x_2 = b \\ & x_1 \geq 0 \end{array} \qquad (P)$$

con A_1 matrice $m \times n_1$, A_2 matrice $m \times n_2$ e $x = (x_1, \ x_2) \in R^{n_1} \times R^{n_2}$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono $n_1 + n_2$ tutte vincolate ad essere non negative.

VERO	FALSO **X**

2. Se il problema duale ammette soluzione ottima finita, allora anche il problema primale ammette soluzione ottima finita.

VERO **X**	FALSO

3. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A_1^T \bar{u} \geq c_1$ and $A_2^T \bar{u} = c_2$, allora $b^T \bar{u} \geq c^T x^*$.

VERO **X**	FALSO

4. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A_1^T \bar{u} \leq c_1$ and $A_2^T \bar{u} = c_2$, $\bar{u} \geq 0$, allora $b^T \bar{u} \leq b^T u^*$.

VERO	FALSO **X**

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B (bianco)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2° anno

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4: ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO e ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO), nessuna risposta vale **0** PUNTI. Per gli esercizi 5,6,7: ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI e ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO), nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min \ \frac{1}{3}x_1^3 + 2x_2^4 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 - x_1 - x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il punto $(1,\ 0)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

   VERO **X** FALSO

2. Il punto $(1,\ 0)^T$ soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine

   VERO FALSO **X**

3. È possibile affermare che il punto $(1,\ 0)^T$ è un minimo globale.

   VERO FALSO **X**

4. L'approssimazione quadratica della funzione nell'intorno del punto $(0,\ \frac{1}{2})^T$ è indefinita.

   VERO FALSO **X**

5. Nel punto $(0,\ \frac{1}{2})^T$ è possibile definire la direzione di Newton.

   VERO **X** FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & 0 \leq x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema non è convesso.

   VERO **X** | FALSO

2. Per questo problema si può utilizzare il teorema di Weierstrass per garantire l'esistenza di una soluzione globale.

   VERO | FALSO **X**

3. L'insieme ammissibile non è regolare.

   VERO **X** | FALSO

4. Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT

   VERO | FALSO **X**

5. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT

   VERO **X** | FALSO

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 + 12x_2 + 12x_3 \\ & -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ & -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste) e sia $\bar{x} = (0,\ 0,\ 1/4)$.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 3u_1 + 2u_2 \\ & -2u_1 - u_2 \leq 4 \\ & 4u_1 - 3u_2 \leq 12 \\ & -u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

   VERO | FALSO **X**

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & 3u_1 + 2u_2 \\ & -2u_1 - u_2 \leq 4 \\ & 4u_1 - 3u_2 \leq 12 \\ & -u_1 + 3u_2 \leq 12 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO ☐ FALSO **X**

3. Il punto $\bar{u} = (0, 0)$ è ammissibile per il duale e si ha $c^T x^* \geq 0$.

VERO **X** FALSO ☐

4. Il problema duale è vuoto

VERO ☐ FALSO **X**

5. I punti $(0,\ 11/9,\ 17/9)^T$ e $(8,\ 20/3)^T$ sono ottimi rispettivamente per il problema primale e per il problema duale.

VERO ☐ FALSO **X**

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Sia dato il seguente problema di Ottimizzazione non lineare:

$$\begin{array}{l} \min \ \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_i^2 y_j + \sum_{j=1}^{3} p_j y_j \\ \sum_{j=1}^{3} t_{ij}(x_i - y_j) \leq d_i \quad i = 1, \dots, 5 \\ 0 \leq x_i \leq u_i \quad i = 1, \dots, 5 \end{array}$$

Dove x_i e y_j sono le variabili del problema mentre d_i, u_i, p_j c_{ij}, t_{ij} con $i = 1, \dots, 5$ $j = 1, \dots, 3$ sono parametri del problema. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La seguente dichiarazione di parametri e variabili è corretta:

```
param c{1..5,1..3};
param d{1..5};
param u{1..5};
param t{1..5,1..3};
param p{1..3};
var x{1..5};
var y{1..3};
```

VERO **X** FALSO ☐

2. La seguente dichiarazione della funzione obiettivo è corretta:

```
minimize obiettivo{j in 1..3}:  sum{i in 1..5}(c[i,j]*x[i]**2*y[j])
                               +sum{j in 1..3}p[j]*y[j];
```

VERO ☐ FALSO **X**

3. La seguente dichiarazione dei vincoli è corretta:

```
s.t.  v1{i=1..5}:  sum{j in 1..3}t[i,j]*(x[i]-y[j])<=d[i];
s.t.  box1{i in 1..5}:  x[i]>=0;
s.t.  box2{i in 1..5}:  x[i]<=u[i];
```

VERO	FALSO **X**

Esercizio 5. (**Punteggio massimo = 1**)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata della una funzione $f(x) = \frac{1}{2}x^T A^T Ax + c^T x$ ovvero si consideri il problema

$$\min_{R^n} \frac{1}{2}x^T A^T Ax + c^T x.$$

con $x \in R^n$, A matrice $m \times n$ e c vettore di R^n.

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è quadratica con hessiano $\nabla^2 f(x) = A^T A$.

VERO **X**	FALSO

2. La funzione ammette minimo se e solo se esiste una soluzione del sistema $A^T Ax = -c$.

VERO **X**	FALSO

3. La funzione può avere minimi locali non globali.

VERO	FALSO **X**

4. Il metodo del gradiente determina il minimo della funzione in un numero finito di passi a partire da un qualunque punto iniziale.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & h(x) = 0 \end{aligned}$$

con $f : R^n \rightarrow R$, $h : R^n \rightarrow R^p$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e $h_i(x)$ sono convesse per ogni $j = 1, \dots, p$ allora il problema è convesso.

VERO	FALSO **X**

2. È possibile definire una funzione di penalità esterna per il problema dato.

VERO **X**	FALSO

3. Sia $\bar{x}$ un punto ammissibile regolare. Se $\bar{x}$ è un minimo locale allora soddisfa le condizioni di KKT.

VERO **X**	FALSO

4. Sia $\bar{x}$ un punto che soddisfa le condizioni di KKT. Se l'insieme
$$\{d \in R^n : \ d \neq 0 \ \nabla h(\bar{x})^T d = 0\}$$
è vuoto, allora $\bar{x}$ è un minimo locale stretto.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & c_1^T x_1 + c_2^T x_2 \\ & A_1 x_1 + A_2 x_2 = b \\ & x_2 \geq 0 \end{array} \qquad (P)$$

con A_1 matrice $m \times n_1$, A_2 matrice $m \times n_1$ e $x = (x_1, \ x_2)^T \in R^{n_1} \times R^{n_2}$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono m, e tutte non vincolate in segno.

VERO **X**	FALSO

2. Se il problema duale ammette soluzione ottima finita u^*, allora esiste una soluzione ammissibile $\bar{x}$ del problema primale.

VERO **X**	FALSO

3. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A_1^T \bar{u} = c_1$, $A_2^T \bar{u} \leq c_2$, allora $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$.

VERO **X**	FALSO

4. Se il problema primale è illimitato, allora il problema duale deve avere insieme ammissibile vuoto.

VERO **X**	FALSO