ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A (giallo)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2º anno

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4:
ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.
Per gli esercizi 5,6,7:
ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_1 - 2x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa.

   VERO ☐ FALSO **X**

2. La funzione ammette minimo.

   VERO ☐ FALSO **X**

3. Il punto $(-1,\ 1,\ 0)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine

   VERO **X** FALSO ☐

4. È possibile affermare che il punto $(-1,\ 1,\ 0)^T$ è un minimo globale.

   VERO ☐ FALSO **X**

5. Il passo $\alpha = \frac{1}{3}$ soddisfa una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente nel punto $x^0 = (\frac{1}{2},\ 1,\ 0)^T$ (valore di $\gamma = \frac{1}{4}$).

   VERO **X** FALSO ☐

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \\ & 0 \le x_1 \le x_2^2 \\ & 0 \le x_2 \le 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema non è convesso.

   VERO **X** FALSO

2. Per questo problema si può utilizzare il teorema di Weierstrass per garantire l'esistenza di una soluzione globale.

   VERO **X** FALSO

3. Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

   VERO FALSO **X**

4. L'insieme ammissibile non è regolare.

   VERO **X** FALSO

5. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

   VERO **X** FALSO

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{array}{ll} \max & -10x_1 - 6x_2 + 12x_3 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 \\ & -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

1. Il problema

$$\begin{array}{ll} \min & 8u_1 + 6u_2 \\ & 2u_1 - 5u_2 \geq -10 \\ & 3u_1 - 2u_2 \geq -6 \\ & 4u_1 + 3u_2 \leq 12 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO	FALSO **X**

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \min & 8u_1 + 6u_2 \\ & 2u_1 - 5u_2 \geq -10 \\ & 3u_1 - 2u_2 \geq -6 \\ & 4u_1 + 3u_2 \geq 12 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO **X**	FALSO

3. Il punto $(2,\ 2)^T$ è ammissibile per il duale e si ha $c^T x^* \leq 24$.

VERO **X**	FALSO

4. I punti $x^* = (0,\ 0,\ 2)^T$ e $u^* = (0,\ 4)^T$ sono ottimi rispettivamente per il problema primale e per il problema duale.

VERO	FALSO **X**

5. Il problema duale è vuoto

VERO	FALSO **X**

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Sia dato il seguente problema di Ottimizzazione non lineare:

$$\begin{array}{l} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{5} c_i x_i^2 + \sum_{j=1}^{6} d_j y_j \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{5} t_{ij} x_i^2 - y_j \leq d_j \quad j = 1, \dots, 6 \\ 0 \leq x_i \leq u_i \quad i = 1, \dots, 5 \\ lb_j \leq y_j \leq ub_j \quad j = 1, \dots, 6 \end{array}$$

Dove x_i e y_j sono le variabili del problema mentre $c_i, u_i,\ lb_j, ub_j, d_j\ t_{ij}$ con $i = 1, \dots, 5\ j = 1, \dots, 6$ sono parametri del problema. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La seguente dichiarazione di parametri e variabili è corretta:

```
param c{5};
param d{6};
param u{5};
param lb{6};
param ub{6};
param t{5,6};
var x{5};
var y{6};
```

VERO ☐ FALSO **X**

2. La seguente dichiarazione della funzione obiettivo è errata:

```
minimize obiettivo:  sum{i in 1..5}(c[i]*x[i]**2)+sum{j in 1..6}d[j]*y[j];
```

VERO ☐ FALSO **X**

3. La seguente dichiarazione dei vincoli è corretta:

```
s.t.  v1{j in 1..6}:  sum{i=1..5}(t[i,j]*x[i]**2)-y[j]<=d[j];
s.t.  box1{i in 1..5}:  x[i]>=0;
s.t.  box2{i in 1..5}:  x[i]<=u[i];
s.t.  box3{j in 1..6}:  y[j]>=lb[j];
s.t.  box4{j in 1..6}:  y[j]<=ub[j];
```

VERO ☐ FALSO **X**

Esercizio 5.(**Punteggio massimo = 1**)

Data un una funzione $f(x) : R^n \to R$ con $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in R^n$ si consideri il problema (P) di minimizzazione non vincolata della

$$\min_{R^n} \; f(x). \qquad (P)$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Un punto $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) = 0$ è un minimo globale.

VERO **X** FALSO ☐

2. Se in un punto $\bar{x}$ risulta $\nabla^2 f(\bar{x})$ semidefinita positiva, allora la funzione è convessa in R^n.

VERO ☐ FALSO **X**

3. La funzione può avere minimi locali non globali.

VERO **X** FALSO ☐

4. Dato un punto x^0, il metodo di Newton puro genera il punto

$$x^1 = x^0 - \nabla^2 f(x^0)^{-1} \nabla f(x^0)$$

VERO **X**	FALSO

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

con $f : R^n \rightarrow R$, A matrice $m \times n$ e $b \in R^m$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa allora il problema è convesso.

VERO **X**	FALSO

2. È possibile definire una funzione di penalità esterna per il problema dato.

VERO **X**	FALSO

3. Se $\bar{x}$ è un minimo locale allora soddisfa le condizioni di KKT.

VERO **X**	FALSO

4. Le condizioni di KKT sono condizioni necessarie di ottimo senza ipotesi di regolarità.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & A_1 x \geq b_1 \\ & A_2 x = b_2 \end{array} \qquad (P)$$

con A_1 matrice $m_1 \times n$, A_2 matrice $m_2 \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono $m_1 + m_2$ tutte vincolate ad essere non negative.

VERO	FALSO **X**

2. Se il problema duale ammette soluzione ottima finita u^*, allora esiste una soluzione ammissibile $\bar{x}$ del problema primale (P) tale che $c^T \bar{x} = b^T u^*$.

VERO **X**	FALSO

3. Se $\bar{u} = (\bar{u}_1,\ \bar{u}_2) \in R^{m_1} \times R^{m_2}$ è un punto tale che $A_1^T \bar{u}_1 + A_2^T \bar{u}_2 = c$, allora $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$.

VERO	FALSO **X**

4. Se il problema primale è vuoto, allora il problema duale deve avere insieme ammissibile vuoto.

VERO	FALSO **X**

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B (rosa)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2º anno

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4: ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO e ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO), nessuna risposta vale **0** PUNTI. Per gli esercizi 5,6,7: ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI e ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO), nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1 - x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa.

   VERO **X** FALSO

2. La funzione ammette un unico punto di minimo globale.

   VERO **X** FALSO

3. Il punto $(-1,\ 1,\ 0)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine

   VERO **X** FALSO

4. È possibile affermare che il punto $(-1,\ 1,\ 0)^T$ è un minimo globale.

   VERO **X** FALSO

5. Il passo $\alpha = \frac{1}{4}$ soddisfa una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente nel punto $x^0 = (1,\ 1,\ 0)^T$ (valore di $\gamma = \frac{1}{4}$).

   VERO **X** FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max\ & (x_1-1)^2 + x_2^2 \\ & 0 \le x_1 \le 1 \\ & 0 \le x_2 \le x_1^2 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema non è convesso.

VERO **X**	FALSO

2. Per questo problema si può utilizzare il teorema di Weierstrass per garantire l'esistenza di una soluzione globale.

VERO **X**	FALSO

3. Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

VERO	FALSO **X**

4. L'insieme ammissibile non è regolare.

VERO **X**	FALSO

5. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min\quad & 10x_1 + 6x_2 + 12x_3 \\ & -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ge -1 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste) e sia $\bar{x} = (0,\ 0,\ 1/4)$.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max\ & u_1 - u_2 \\ & -2u_1 + 5u_2 \le 10 \\ & 3u_1 - 2u_2 \le 6 \\ & 4u_1 + 3u_2 \le 12 \\ & u_2 \ge 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO **X**	FALSO

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \min & u_1 - u_2 \\ & -2u_1 + 5u_2 \leq 10 \\ & 3u_1 - 2u_2 \leq 6 \\ & 4u_1 + 3u_2 \leq 12 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO | FALSO **X**

3. Si ha $c^T x^* \geq 3$.

VERO | FALSO **X**

4. Il problema duale è vuoto

VERO | FALSO **X**

5. I punti $(0,\ 1/3,\ 0)^T$ e $(2,\ 0)^T$ sono ottimi rispettivamente per il problema primale e per il problema duale.

VERO **X** | FALSO

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Sia dato il seguente problema di Ottimizzazione non lineare:

$$\begin{array}{l} \min \ \sum_{i=1}^{5} c_i x_i^2 + \sum_{j=1}^{6} d_j y_j \\ \sum_{i=1}^{5} t_{ij} x_i^2 - y_j \leq d_j \quad j = 1, \ldots, 6 \\ 0 \leq x_i \leq u_i \quad i = 1, \ldots, 5 \\ lb_j \leq y_j \leq ub_j \quad j = 1, \ldots, 6 \end{array}$$

Dove x_i e y_j sono le variabili del problema mentre $c_i, u_i,\ d_j, lb_j, ub_j\ t_{ij}$ con $i = 1, \ldots, 5\ j = 1, \ldots, 6$ sono parametri del problema. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La seguente dichiarazione di parametri e variabili è corretta:

```
param c{1..5};
param d{1..6};
param u{1..5};
param lb{1..6};
param ub{1..6};
param t{1..5, 1..6};
var x{1..5}>=0;
var y{1..6};
```

VERO **X** | FALSO

2. La seguente dichiarazione della funzione obiettivo è corretta:

```
minimize obiettivo{j in 1..6}:  sum{i in 1..5}(c[i]*x[i]**2)+d[j]*y[j];
```

VERO | FALSO **X**

3. La seguente dichiarazione dei vincoli è corretta:

```
s.t.  v1{j in 1..6}:  sum{i=1..5}t[i,j]*x[i]**2-y[j]<=d[j];
s.t.  box1:  sum{i in 1..5}x[i]>=0;
s.t.  box2:sum{i in 1..5} x[i]<=u[i];
s.t.  box3:sum{j in 1..6}y[j]>=lb[j];
s.t.  box4:sum{j in 1..6}y[j]<=ub[j];
```

VERO ☐ FALSO **X**

Esercizio 5.(**Punteggio massimo = 1**)

Data un una funzione $f(x) : R^n \to R$ con $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in R^n$ si consideri il problema (P) di minimizzazione non vincolata della

$$\min_{R^n} \ f(x). \qquad (P)$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Un punto $\bar{x}$ tale che $\nabla f(\bar{x}) = 0$ è un minimo globale.

VERO ☐ FALSO **X**

2. Se risulta $\nabla^2 f(x)$ definita positiva per ogni $x \in R^n$, allora la funzione è convessa in R^n.

VERO **X** FALSO ☐

3. La funzione ammette sempre un minimo.

VERO ☐ FALSO **X**

4. A partire da un punto x^0, se $\nabla^2 f(x^k)$ è non singolare, il metodo di Newton puro genera un successione di punti

$$x^{k+1} = x^k - \nabla^2 f(x^k)^{-1} \nabla f(x^k), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

VERO **X** FALSO ☐

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & h(x) = 0 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

con $f : R^n \to \ R$, $h : R^n \to \ R^p$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e $h_i(x)$ sono convesse per ogni $i = 1, \ldots, p$ allora il problema è convesso.

VERO ☐ FALSO **X**

2. È possibile definire una funzione di penalità interna per il problema dato.

VERO	FALSO **X**

3. Sia $\bar{x}$ un punto ammissibile regolare. Se $\bar{x}$ è un minimo locale allora soddisfa le condizioni di KKT.

VERO **X**	FALSO

4. Le condizioni di KKT sono condizioni necessarie di ottimo senza ipotesi di regolarità.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & A_1 x \leq b_1 \\ & A_2 x = b_2 \end{array} \qquad (P)$$

con A_1 matrice $m_1 \times n$, A_2 matrice $m_2 \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono $m_1 + m_2$, e le prime m_1 sono vincolate ad essere non negative.

VERO **X**	FALSO

2. Se il problema duale ammette soluzione ottima finita u^*, allora esiste una soluzione ammissibile $\bar{x}$ del problema primale.

VERO **X**	FALSO

3. Se $\bar{u} = (\bar{u}_1,\ \bar{u}_2) \in R^{m_1} \times R^{m_2}$ è un punto tale che $A_1^T \bar{u}_1 + A_2^T \bar{u}_2 \bar{u} = c$, allora $b^T \bar{u} \geq c^T x^*$.

VERO	FALSO **X**

4. Se il problema primale è illimitato, allora il problema duale deve avere insieme ammissibile vuoto.

VERO **X**	FALSO

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito C (verde)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2º anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4:
ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.
Per gli esercizi 5,6,7:
ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ 2x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + x_2x_3 + 2x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa.

   VERO | FALSO **X**

2. La funzione è coerciva.

   VERO | FALSO **X**

3. Il punto $(1,\ -2,\ 0)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine

   VERO **X** | FALSO

4. È possibile affermare che il punto $(1,\ -2,\ 0)^T$ è un minimo globale.

   VERO | FALSO **X**

5. Il passo $\alpha = \frac{1}{3}$ soddisfa una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente nel punto $x^0 = (1,\ 1,\ 0)^T$ (valore di $\gamma = \frac{1}{3}$).

   VERO | FALSO **X**

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1^2 + (x_2-1)^2 \\ & 0 \le x_1 \le x_2^2 \\ & 0 \le x_2 \le 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

   VERO **X** FALSO

2. Per questo problema non si può utilizzare il teorema di Weierstrass per garantire l'esistenza di una soluzione globale.

   VERO FALSO **X**

3. Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

   VERO **X** FALSO

4. L'insieme ammissibile non è regolare.

   VERO **X** FALSO

5. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

   VERO FALSO **X**

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & 10x_1 - 6x_2 + 12x_3 \\ & -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \le 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste) e sia $\bar{x} = (1/5,\ 0,\ 0)$.

1. Il problema

   $$\begin{aligned} \min \quad & 10u_1 + u_2 \\ & -2u_1 + 5u_2 \ge 10 \\ & -3u_1 + 2u_2 \ge -6 \\ & 4u_1 + 3u_2 \ge 12 \\ & u_1 \ge 0 \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

   VERO **X** FALSO

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & 10u_1 + u_2 \\ & -2u_1 + 5u_2 \geq 10 \\ & -3u_1 + 2u_2 \geq -6 \\ & 4u_1 + 3u_2 \geq 12 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO | FALSO **X**

3. Si ha $c^T x^* \geq 2$.

VERO **X** | FALSO

4. Il problema duale è vuoto

VERO | FALSO **X**

5. I punti $(0,\ 0,\ 1/3)^T$ e $(0,\ 4)^T$ sono ottimi rispettivamente per il problema primale e per il problema duale.

VERO **X** | FALSO

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Sia dato il seguente problema di Ottimizzazione non lineare:

$$\begin{array}{l} \min \ \sum_{i=1}^{5} c_i x_i^2 + \sum_{j=1}^{6} d_j y_j \\ \sum_{i=1}^{5} t_{ij} x_i^2 - y_j \leq d_j \quad j = 1, \ldots, 6 \\ 0 \leq x_i \leq u_i \quad i = 1, \ldots, 5 \\ lb_j \leq y_j \leq ub_j \quad j = 1, \ldots, 6 \end{array}$$

Dove x_i e y_j sono le variabili del problema mentre $c_i, u_i,\ lb_j, ub_j, d_j\ t_{ij}$ con $i = 1, \ldots, 5\ j = 1, \ldots, 6$ sono parametri del problema. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La seguente dichiarazione di parametri e variabili è corretta (supponendo di assegnare in seguito N=5, M=6):

```
param N;
param M;
param c{1..N};
param d{1..M};
param u{1..N};
param lb{1..M};
param ub{1..M};
param t{1..N,1..M};
var x{1..N}>=0;
var y{1..M};
```

VERO **X** | FALSO

2. La seguente dichiarazione della funzione obiettivo è corretta:

```
minimize obiettivo:  sum{i in 1..N}(c[i]*x[i]**2)+sum{j in 1..M}d[j]*y[j];
```

VERO **X**	FALSO

3. La seguente dichiarazione dei vincoli è corretta:

```
s.t.  v1:  sum{i=1..N,j in 1..M}t[i,j]*x[i]**2-y[j]<=d[j];
s.t.  box1:  sum{i in 1..N}x[i]>=0;
s.t.  box2:sum{i in 1..N} x[i]<=u[i];
s.t.  box3:sum{j in 1..M}y[j]>=lb[j];
s.t.  box4:sum{j in 1..M}y[j]<=ub[j];
```

VERO	FALSO **X**

Esercizio 5.(**Punteggio massimo = 1**)

Data un una funzione $f(x) : R^n \to R$ con $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in R^n$ si consideri il problema (P) di minimizzazione non vincolata della

$$\min_{R^n} \; f(x). \tag{P}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $\bar{x}$ è un minimo locale, allora $\nabla f(\bar{x}) = 0$ e $\nabla f^2(\bar{x}) \succeq 0$.

VERO **X**	FALSO

2. Se nel punto $\bar{x}$ risulta $\nabla^2 f(\bar{x})$ definita positiva, allora la funzione è strettamente convessa in R^n.

VERO	FALSO **X**

3. La funzione può non ammettere minimo.

VERO **X**	FALSO

4. A partire da un punto x^0, il metodo del gradiente definisce una direzione di discesa e genera un successione di punti del tipo

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

VERO **X**	FALSO

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & h(x) = 0 \\ & Ax \leq b \end{array}$$

con $f : R^n \to \; R$, $h : R^n \to \; R^p$, A matrice $m \times n$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e $h_i(x)$ sono lineari per ogni $i = 1, \ldots, p$ allora il problema è convesso.

VERO **X**	FALSO

2. È possibile definire una funzione Lagrangiana aumentata per il problema dato.

VERO **X**	FALSO

3. Sia $\bar{x}$ un punto ammissibile NON regolare. Se $\bar{x}$ è un minimo locale allora soddisfa le condizioni di KKT.

VERO	FALSO **X**

4. L'insieme ammissibile non è mai regolare.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & A_1 x = b_1 \\ & A_2 x \geq b_2 \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (P)$$

con A_1 matrice $m_1 \times n$, A_2 matrice $m_2 \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono $m_1 + m_2$ di cui m_1 sono vincolate in segno e m_2 sono non vincolate in segno.

VERO	FALSO **X**

2. L'insieme ammissibile del problema duale è dato da $u = (u_1,\ u_2) \in R^{m_1} \times R^{m_2}$ tali che $A_1^T u_1 + A_2^T u_2 \leq c$, $u_2 \geq 0$.

VERO **X**	FALSO

3. Se $\bar{u} = (\bar{u}_1,\ \bar{u}_2) \in R^{m_1} \times R^{m_2}$ è ammissibile per il duale, allora si ha $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$.

VERO **X**	FALSO

4. Se il problema primale è vuoto, allora il problema duale può ammettere soluzione ottima finita.

VERO	FALSO **X**

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito D (bianco)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2º anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4:
ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.
Per gli esercizi 5,6,7:
ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ 2x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + 4x_1 - 2x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa.

   VERO **X** FALSO

2. La funzione ammette un unico punto di minimo globale.

   VERO **X** FALSO

3. Il punto $(-1,\ 0,\ 1)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine

   VERO **X** FALSO

4. È possibile affermare che il punto $(-1,\ 0,\ 1)^T$ è un minimo globale.

   VERO **X** FALSO

5. Il passo $\alpha = \frac{1}{4}$ soddisfa una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente nel punto $x^0 = (1,\ 1,\ 0)^T$ (valore di $\gamma = \frac{1}{4}$).

   VERO **X** FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max\ & (x_1-1)^2 + x_2^2 \\ & 0 \le x_1 \le 1 \\ & 0 \le x_2 \le x_1^2 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

VERO	FALSO **X**

2. Per questo problema non si può utilizzare il teorema di Weierstrass per garantire l'esistenza di una soluzione globale.

VERO	FALSO **X**

3. Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

VERO **X**	FALSO

4. L'insieme ammissibile è regolare.

VERO	FALSO **X**

5. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min\quad & 10x_1 + 6x_2 + 12x_3 \\ & -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge -1 \\ & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ge 1 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste) e sia $\bar{x} = (1/2,\ 0,\ 0)$.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max\ & -u_1 + u_2 \\ & -2u_1 + 5u_2 \le 10 \\ & 3u_1 - 2u_2 \le 6 \\ & 4u_1 + 3u_2 \le 12 \\ & u_1 \ge 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO	FALSO **X**

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & -u_1 + u_2 \\ & -2u_1 + 5u_2 \leq 10 \\ & 3u_1 - 2u_2 \leq 6 \\ & 4u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO **X** FALSO

3. Si ha $c^T x^* \geq 5$.

VERO FALSO **X**

4. Il problema duale è vuoto

VERO FALSO **X**

5. I punti $(1/5,\ 0,\ 0)^T$ e $(0,\ 2)^T$ sono ottimi rispettivamente per il problema primale e per il problema duale.

VERO **X** FALSO

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Sia dato il seguente problema di Ottimizzazione non lineare:

$$\begin{array}{l} \min \ \sum_{i=1}^{5} c_i x_i^2 + \sum_{j=1}^{6} d_j y_j \\ \sum_{i=1}^{5} t_{ij} x_i^2 - y_j \leq d_j \quad j = 1, \ldots, 6 \\ 0 \leq x_i \leq u_i \quad i = 1, \ldots, 5 \\ lb_j \leq y_j \leq ub_j \quad j = 1, \ldots, 6 \end{array}$$

Dove x_i e y_j sono le variabili del problema mentre $c_i, u_i,\ lb_j, ub_j, d_j\ t_{ij}$ con $i = 1, \ldots, 5\ j = 1, \ldots, 6$ sono parametri del problema. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La seguente dichiarazione di parametri e variabili è corretta (supponendo di assegnare in seguito N=5, M=6):

```
param N;
param M;
param c{1..N};
param d{1..M};
param u{1..N};
param lb{1..M};
param ub{1..M};
param t{1..N,1..M};
var x{1..N}>=0;
var y{1..M};
```

VERO **X** FALSO

2. La seguente dichiarazione della funzione obiettivo è corretta:

```
minimize obiettivo{i in 1..N, j in 1..M}:  (c[i]*x[i]**2)+d[j]*y[j];
```

VERO | FALSO **X**

3. La seguente dichiarazione dei vincoli è corretta:

```
s.t.  v1{j in 1..M}:  sum{i=1..N}t[i,j]*x[i]**2-y[j]<=d[j];
s.t.  box1{i in 1..N}:x[i]>=0;
s.t.  box2{i in 1..N}:x[i]<=u[i];
s.t.  box3{j in 1..M}:y[j]>=lb[j];
s.t.  box4{j in 1..M}:y[j]<=ub[j];
```

VERO | FALSO **X**

Esercizio 5.(**Punteggio massimo = 1**)

Data un una funzione $f(x) : R^n \to R$ con $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in R^n$ si consideri il problema (P) di minimizzazione non vincolata della

$$\min_{R^n} \; f(x). \tag{P}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se in un punto $\bar{x}$ risulta $\nabla f(\bar{x}) = 0$ e $\nabla f^2(\bar{x}) \not\succeq 0$ allora $\bar{x}$ NON è un minimo locale.

   VERO **X** | FALSO

2. Se nel punto $\bar{x}$ risulta $\nabla^2 f(\bar{x})$ semidefinita positiva, allora la funzione è convessa in R^n.

   VERO | FALSO **X**

3. Se esiste un punto $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) = 0$, allora esiste un minimo.

   VERO **X** | FALSO

4. A partire da un punto x^0, il metodo del gradiente definisce una direzione di discesa e genera un successione di punti del tipo

$$x^{k+1} = x^k - \nabla^2 f(x^k)\nabla f(x^k), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

   VERO | FALSO **X**

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \\ & Ax = b \end{array}$$

con $f : R^n \to \; R$, $g : R^n \to \; R^p$, A matrice $m \times n$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e $g_j(x)$ sono convesse per ogni $j = 1, \ldots, p$ allora il problema è convesso.

VERO **X**	FALSO

2. È possibile definire una funzione di penalità interna per il problema dato.

VERO	FALSO **X**

3. Se $\bar{x}$ è un minimo locale allora soddisfa le condizioni di KKT.

VERO	FALSO **X**

4. Le condizioni di KKT sono condizioni necessarie di ottimo senza ipotesi di regolarità.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & A_1 x = b_1 \\ & A_2 x \leq b_2 \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (P)$$

con A_1 matrice $m_1 \times n$, A_2 matrice $m_2 \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono $m_1 + m_2$ di cui m_1 sono non vincolate in segno e m_2 sono vincolate in segno.

   VERO **X** | FALSO

2. L'insieme ammissibile del problema duale è dato da $u = (u_1,\ u_2) \in R^{m_1} \times R^{m_2}$ tali che $A_1^T u_1 + A_2^T u_2 \geq c$, $u_1 \geq 0$.

   VERO | FALSO **X**

3. Se $\bar{u} = (\bar{u}_1,\ \bar{u}_2) \in R^{m_1} \times R^{m_2}$ è ammissibile per il duale, allora si ha $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$.

   VERO | FALSO **X**

4. Se il problema duale è vuoto, allora il problema primale può ammettere soluzione ottima finita.

   VERO | FALSO **X**