ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2º anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4:
ogni risposta CORRETTA vale **+1** PUNTO e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.
Per gli esercizi 5,6,7:
ogni risposta CORRETTA vale **0,25** PUNTI e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ \frac{4}{3}x_1^3 - x_1^2 x_3 + \frac{11}{6}x_3^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il punto $(1,\ -5,\ 3)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

   VERO **X** FALSO

2. Il punto $(1,\ -5,\ 3)^T$ è un punto di minimo locale.

   VERO FALSO **X**

3. L'approssimazione quadratica nell'intorno del punto $x^0 = (0,\ 0,\ -1)^T$ ammette un unico punto di minimo.

   VERO **X** FALSO

4. Il passo $\alpha = \frac{1}{10}$ soddisfa una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente nel punto $x^0 = (1,\ 0,\ 3)^T$ (valore di $\gamma = \frac{1}{2}$).

   VERO FALSO **X**

5. La direzione di Newton nel punto $x^0 = (0,\ 0,\ -1)^T$ è $d = (-1,\ 0,\ 1)^T$.

   VERO FALSO **X**

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 \\ & x_1^2 + x_2^2 \le 1 \\ & x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \le 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

   VERO **X** FALSO

2. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di NON regolarità per i vincoli

   VERO FALSO **X**

3. Il punto $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

   VERO **X** FALSO

4. Il punto $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ NON è l'unico punto di KKT.

   VERO FALSO **X**

5. Se nel secondo vincolo il membro di destra varia da 1 a $1 + \epsilon$ con $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo la soluzione ottima NON migliora.

   VERO FALSO **X**

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ & x_1 - x_2 \le 3 \\ & x_2 \le 4, \\ & x_1 \ge 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

1. Il problema

   $$\begin{aligned} \min \quad & -2u_1 + 3u_2 + 4u_3 \\ & -u_1 + u_2 \ge 1 \\ & -2u_1 - u_2 + u_3 = 1 \\ & u_1 \ge 0, \quad u_2 \ge 0, \quad u_3 \ge 0 \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

   VERO **X** FALSO

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \min & -2u_1 + 3u_2 + 4u_3 \\ & -u_1 + u_2 \geq 1 \\ & -2u_1 - u_2 + u_3 \geq 1 \\ & u_1 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO | FALSO **X**

3. I punti $\bar{x} = (2,\ 2)^T$ e $\bar{u} = (0,\ 1,\ 2)^T$ sono ammissibili rispettivamente per il problema primale e per il duale e risulta $4 \leq c^T x^* \leq 11$.

N.B. Considerare il problema primale nella forma di max **corrispondente al duale del punto 1**

VERO **X** | FALSO

4. Il problema duale non può essere illimitato inferiormente

VERO **X** | FALSO

5. Il punto $x^* = (7,\ 4)^T$ è ottimo per il problema primale.

VERO **X** | FALSO

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**)Sia dato il seguente problema di programmazione quadratica:

$$\begin{array}{l} \min\limits_{x} \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(y_i y_j x_i x_j q_{ij}) - \sum_{k=1}^{N} x_k \\ \sum_{i=1}^{N} y_i x_i = 0 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, N \\ x_i \leq C_i,\ i = 1, \ldots, N \end{array} \tag{1}$$

dove x_i sono variabili, mentre y_i, q_{ij} e C_i sono parametri del problema.
Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Una possibile dichiarazione delle variabili e dei parametri del problema in AMPL è la seguente:

```
param N;
param y{1..N};
param C{1..N};
param q{1..N,1..N};
var x{1..N};
```

VERO **X** | FALSO

```
minimize obiettivo:   sum{i in 1..N}(sum{j in 1..N } (y[i]*y[j]*x[i]*x[j]*q[i,j]- x[j]);
```

2. Una possibile dichiarazione della funzione obiettivo in AMPL è la seguente:

VERO	FALSO **X**

3. Una possibile dichiarazione dei vincoli del problema in AMPL è la seguente:

```
subj to uguaglianza {i in 1..N}:  y[i]*x[i]=0;
subj to box1{i in 1..N}:  x[i]>=0;
subj to box2{i in 1..N}:x[i]<=C[i];
```

VERO	FALSO **X**

Esercizio 5. (**Punteggio massimo = 1**)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione $f(x)$ del tipo

$$\min_{R^n} \frac{1}{2} x^T Q x + \|x\|^2.$$

con Q matrice simmetrica $n \times n$ semidefinita positiva.

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $\bar{x}$ è un punto tale che $\nabla f(\bar{x}) = 0$, allora $\bar{x}$ è un minimo.

VERO **X**	FALSO

2. La funzione è quadratica e coerciva.

VERO **X**	FALSO

3. La funzione è strettamente convessa.

VERO **X**	FALSO

4. Il metodo del gradiente coniugato determina il minimo della funzione in al più n passi.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \\ & Ax = b \end{array}$$

con $f : R^n \to R$, $g : R^n \to R^m$, A matrice $p \times n$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e $g_i(x)$ sono convesse per ogni $i = 1, \ldots, m$ allora il problema è convesso.

VERO **X**	FALSO

2. È possibile definire una funzione di pensalità interna per il problema dato.

VERO	FALSO **X**

3. Sia $\bar{x}$ un punto ammissibile regolare. Se soddisfa le condizioni di KKT, allora $\bar{x}$ è un minimo locale.

VERO	FALSO **X**

4. L'insieme ammissibile è regolare.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (P)$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono m tutte vincolate ad essere non negative.

VERO **X**	FALSO

2. Se il problema duale ammette soluzione ottima finita u^*, allora esiste una soluzione ammissibile $\bar{x}$ del problema primale (P) tale che $c^T\bar{x} = b^T u^*$.

VERO	FALSO **X**

3. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A^T\bar{u} \geq -c$ e $\bar{u} \geq 0$, allora $-b^T\bar{u} \leq c^T x^*$.

VERO **X**	FALSO

4. Se il problema primale è illimitato, allora il problema duale deve avere insieme ammissibile vuoto.

VERO **X**	FALSO

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2º anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4: ogni risposta CORRETTA vale **1** PUNTO e ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO), nessuna risposta vale **0** PUNTI. Per gli esercizi 5,6,7: ogni risposta CORRETTA vale **0,25** PUNTI e ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO), nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ \frac{4}{3}x_1^3 - x_1^2x_3 + \frac{11}{6}x_3^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il punto $(1,\ -10,\ 3)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

   VERO **X** FALSO

2. Il punto $(1,\ -10,\ 3)^T$ soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.

   VERO FALSO **X**

3. L'approssimazione quadratica nell'intorno del punto $x^0 = (1,\ 0,\ 0)^T$ è strettamente convessa.

   VERO **X** FALSO

4. Il passo $\alpha = \frac{1}{5}$ soddisfa una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente nel punto $x^0 = (1,\ 0,\ 3)^T$ (valore di $\gamma = \frac{1}{4}$).

   VERO **X** FALSO

5. La direzione di Newton nel punto $x^0 = (1,\ 0,\ 0)^T$ è $d = (-1,\ -2,\ 1)^T$.

   VERO FALSO **X**

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ & x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \geq 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

   VERO   FALSO **X**

2. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di NON regolarità per i vincoli

   VERO   FALSO **X**

3. Il punto $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

   VERO   FALSO **X**

4. Nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è soddisfatta la condizione di stretta complementarità.

   VERO **X**   FALSO

5. Se nel secondo vincolo il membro di destra varia da 1 a $1+\epsilon$ con $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo la soluzione ottima NON migliora.

   VERO **X**   FALSO

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_2 \leq 4, \\ & x_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

1. Il problema

   $$\begin{aligned} \max \quad & 2u_1 - 3u_2 - 4u_3 \\ & u_1 - u_2 \leq 1 \\ & 2u_1 + u_2 - u_3 = 1 \\ & u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad u_3 \geq 0 \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

   VERO **X**   FALSO

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & 2u_1 - 3u_2 - 4u_3 \\ & u_1 - u_2 \leq 1 \\ & 2u_1 + u_2 - u_3 = 1 \\ & u_1 \geq 0. \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO | FALSO **X**

3. I punti $\bar{x} = (0,\ 1)^T$ e $\bar{u} = (1,\ 1,\ 2)^T$ sono ammissibili rispettivamente per il problema primale e per il duale e risulta $-9 \leq b^T u^* \leq 1$.

VERO **X** | FALSO

4. Il problema primale non può essere illimitato inferiormente

VERO **X** | FALSO

5. Il punto $u^* = (\frac{1}{2},\ 0,\ 0)^T$ è ottimo per il problema duale.

VERO **X** | FALSO

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Sia dato il seguente problema di programmazione quadratica:

$$\begin{array}{l} \min\limits_{x} \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(y_i y_j x_i x_j q_{ij}) - \sum_{k=1}^{N} x_k \\ \sum_{i=1}^{N} y_i x_i = 0 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, N \\ x_i \leq C_i,\ i = 1, \ldots, N \end{array} \tag{2}$$

dove x_i sono variabili, mentre y_i, q_{ij} e C_i sono parametri del problema.
Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Una possibile dichiarazione delle variabili e dei parametri del problema in AMPL è la seguente:

```
param N;
param y{N};
param C{N};
param q{N,N};
var x{N};
```

VERO | FALSO **X**

```
minimize obiettivo:  sum{i in 1..N, j in 1..N} (y[i]*y[j]*x[i]*x[j]*q[i,j])
                     - sum {k in 1..N} x[k];
```

2. Una possibile dichiarazione della funzione obiettivo in AMPL è la seguente:

VERO **X** FALSO

3. Una possibile dichiarazione dei vincoli del problema in AMPL è la seguente:

```
subj to uguaglianza:  sum{i in 1..N} y[i]*x[i]=0;
subj to box1{i in 1..N}:  x[i]>=0;
subj to box2{i in 1..N}:x[i]<=C[i];
```

VERO **X** FALSO

Esercizio 5. (**Punteggio massimo = 1**)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione $f(x)$ del tipo

$$\min_{R^n} \frac{1}{2}\|Ax\|^2.$$

con A matrice $m \times n$.

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $\bar{x}$ è un punto tale che $A\bar{x} = 0$, allora $\bar{x}$ è un minimo.

VERO **X** FALSO

2. La funzione è quadratica e convessa.

VERO **X** FALSO

3. La matrice hessiana della funzione è $A^T A$.

VERO **X** FALSO

4. Il metodo del gradiente determina il minimo della funzione in al più n passi.

VERO FALSO **X**

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & h(x) = 0 \\ & Ax \leq b \end{array}$$

con $f : R^n \to R$, $h : R^n \to R^p$, A matrice $m \times n$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e $h_j(x)$ sono convesse per ogni $j = 1, \dots, p$ allora il problema è convesso.

VERO	FALSO **X**

2. È possibile definire una funzione di pensalità esterna per il problema dato.

VERO	FALSO **X**

3. Se $\bar{x}$ è un minimo locale soddisfa le condizioni di KKT, senza ipotesi di regolarità.

VERO	FALSO **X**

4. L'insieme ammissibile è regolare.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. I vincoli del problema duale sono n tutti di disuguaglianza

VERO **X**	FALSO

2. Se il problema primale ammette soluzione ottima finita x^*, allora anche il problema duale ammette soluzione ottima u^* e risulta $b^T u^* < c^T x^*$.

VERO	FALSO **X**

3. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A^T \bar{u} \leq c$, allora $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$.

VERO **X**	FALSO

4. Se il problema duale ha insieme ammissibile vuoto, allora il problema primale ha insieme ammissibile vuoto oppure è illimitato.

VERO	FALSO **X**