

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A (giallo)Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2° anno**

Cognome :

Nome :

VALUTAZIONE

Per gli esercizi 1,2,3,4:

ogni risposta CORRETTA vale **1 PUNTO** eogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5 PUNTI** (VALORE NEGATIVO),nessuna risposta vale **0 PUNTI**.

Per gli esercizi 5,6,7:

ogni risposta CORRETTA vale **0,25 PUNTI** eogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25 PUNTI** (VALORE NEGATIVO),nessuna risposta vale **0 PUNTI**.**Esercizio 1.** (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + x_1x_2 + \sqrt{3}x_1x_3 + \sqrt{3}x_2x_3 + x_1 + x_2 + \sqrt{3}x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è strettamente convessa in
- \mathbb{R}^3
- .

VERO FALSO

2. Il punto
- $(0, -1, 0)^T$
- soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

VERO FALSO

3. Il punto
- $(0, -1, 0)^T$
- è un minimo locale non globale.

VERO FALSO

4. Nel punto
- $x^0 = (-1, 0, 0)^T$
- il passo ottenuto con una ricerca di linea esatta lungo la direzione del metodo del gradiente è
- $\alpha^* = \frac{1}{2}$

VERO FALSO

5. Nel punto
- $x^0 = (-1, 0, 0)^T$
- la direzione
- $d = (-1, 1, 0)^T$
- è di discesa per
- f
- .

VERO FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ & (x_1 + \frac{1}{2})^2 + x_2^2 \geq 1 \\ & (x_1 - \frac{1}{2})^2 + x_2^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso (utilizzare, se necessario, la rappresentazione grafica).

VERO FALSO

2. L'insieme ammissibile è regolare.

VERO FALSO

3. I moltiplicatori $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = 0$ associati rispettivamente al primo e secondo vincolo soddisfano con opportuni valori di x_1, x_2 le condizioni di KKT.

VERO FALSO

4. Il punto $x_1^* = \frac{1}{2}$, $x_2^* = 0$ NON soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.

VERO FALSO

5. Il punto $x^0 = (0, 0)^T$ può essere scelto come punto iniziale per un algoritmo risolutivo basato su una funzione di penalità sequenziale interna.

VERO FALSO

Esercizio 3 . (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & -6x_1 + 12x_2 + 6x_3 \\ & -2x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ & 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con u^* la soluzione ottima del problema duale (se esiste) e sia $\bar{x} = (0, 1, 1)^T$.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & u_1 + 2u_2 \\ & -2u_1 + 3u_2 \leq -6 \\ & 4u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & -u_2 \leq 6 \\ & u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO FALSO

2. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & u_1 + 2u_2 \\ & -2u_1 + 3u_2 \leq -6 \\ & 4u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & u_2 \geq -6 \\ & u_1 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO FALSO

3. Se esiste la soluzione ottima x^* del problema primale, si ha $c^T x^* \leq 18$.

VERO FALSO

4. Il problema duale è vuoto ed il problema primale è illimitato.

VERO FALSO

5. Il punto $u = (3, 0)^T$ è ammissibile e ottimo per il problema duale.

VERO FALSO

Esercizio 4. (Punteggio massimo = 3) Sia data la seguente funzione obiettivo

$$\min_{x_i} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} x_i \cdot x_j \cdot a_{i,j} - \sum_{i \in N} b_i \cdot x_i$$

dove N è un generico insieme, x_i costituiscono le variabili del problema mentre $a_{i,j}, b_i$ sono parametri. Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Una possibile dichiarazione dei parametri e delle variabili in AMPL è la seguente:

```
param N;  
param a{N,N};  
param b{N};  
var x{N};
```

VERO FALSO

2. Una possibile traduzione AMPL della funzione obiettivo è la seguente:

```
minimize obiettivo:sum{i in N,j in N}x[i]*x[j]*a[i,j]-sum{i in N}b[i]*x[i];
```

VERO FALSO

3. Supponiamo che l'insieme N abbia i seguenti elementi

$$N = \{g, h, f\}$$

e che la matrice a e il vettore b siano costituiti dai seguenti elementi:

allora una possibile definizione nel file `.dat` di a e b potrebbe essere la seguente:

a	g	h	f
g	5	1	3
h	2	4	7
f	2	0	0

b	g	h	f
	5	4	1

```
param a:= gg 5 gh 1 gf 3
          hg 2 hh 4 hf 7
          fg 2 fh 0 ff 0;
```

```
param b:= g 5 h 4 f 1;
```

VERO FALSO

Esercizio 5. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione

$$\min_{R^n} f(x).$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se l'insieme $\{x : f(x) \leq f(\bar{x})\}$ è compatto, esiste sempre una soluzione per il problema $\min_{R^n} f(x)$.

VERO FALSO

2. Se esiste una soluzione \bar{x} per il problema $\min_{R^n} f(x)$, allora $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$.

VERO FALSO

3. Se in \bar{x} risulta $\nabla f(\bar{x}) = 0$, si può sempre definire la direzione del metodo di Newton.

VERO FALSO

4. Se un algoritmo per la minimizzazione non vincolata converge con rapidità di convergenza superlineare, allora converge anche con rapidità lineare.

VERO FALSO

Esercizio 6. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ & Ax = b \\ & l \leq x \leq U \end{aligned}$$

con A matrice $m \times n$, b vettore in R^m , $l < U$ vettori di R^n entrambi finiti. Si supponga che il sistema $Ax = b$ ammetta soluzione. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema può NON avere soluzione

VERO FALSO

2. Se $f(x)$ è convessa, allora il problema è convesso.

VERO

FALSO **X**

3. Per il problema le condizioni di KKT si applicano solo nell'ipotesi di regolarità dei vincoli.

VERO

FALSO **X**

4. Per la soluzione del problema si può utilizzare un metodi di penalità sequenziale interna.

VERO

FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono m tutte vincolate ad essere non negative.

VERO

FALSO **X**

2. Se il problema duale ammette soluzione ottima finita u^* , allora il valore ottimo della funzione obiettivo del problema duale soddisfa $c^T \bar{x} \leq b^T u^* \leq b^T \bar{u}$, per ogni \bar{x}, \bar{u} ammissibile rispettivamente per il problema primale e per il duale.

VERO

FALSO **X**

3. Se $\bar{x} \in R^n$ ammissibile per il primale e $\bar{u} \in R^m$ tale che $A^T \bar{u} \geq c$, sono tali che $b^T \bar{u} = c^T \bar{x}$, allora \bar{x}, \bar{u} sono soluzioni ottime rispettivamente per il problema primale e per il duale.

VERO

FALSO **X**

4. Se il problema primale è illimitato, allora il problema duale ha insieme ammissibile vuoto.

VERO

X

FALSO

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B (azzurro)Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2° anno**

Cognome :

Nome :

VALUTAZIONE

Per gli esercizi 1,2,3,4:

ogni risposta CORRETTA vale **1 PUNTO** eogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5 PUNTI** (VALORE NEGATIVO),nessuna risposta vale **0 PUNTI**.

Per gli esercizi 5,6,7:

ogni risposta CORRETTA vale **0,25 PUNTI** eogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25 PUNTI** (VALORE NEGATIVO),nessuna risposta vale **0 PUNTI**.**Esercizio 1.** (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + x_1x_2 + \sqrt{3}x_1x_3 + x_1 + x_2 + \sqrt{3}x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa in
- \mathfrak{R}^3
- .

VERO	X	FALSO
------	----------	-------

2. Il punto
- $(0, -1, 0)^T$
- soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

VERO	FALSO	X
------	-------	----------

3. La funzione non ammette minimo.

VERO	X	FALSO
------	----------	-------

4. Nel punto
- $x^0 = (-1, 0, 0)^T$
- una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente accetta passo
- $\alpha = \frac{1}{2}$
- per qualunque valore di
- $\gamma \in (0, \frac{1}{2}]$
- .

VERO	X	FALSO
------	----------	-------

5. Nel punto
- $x^0 = (-1, 0, 0)^T$
- la direzione
- $d = (-1, 1, 0)^T$
- è di discesa per
- f
- .

VERO	FALSO	X
------	-------	----------

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ & x_1^2 + (x_2 + \frac{1}{2})^2 \geq 1 \\ & x_1^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema non è convesso (utilizzare, se necessario, la rappresentazione grafica).

VERO FALSO

2. L'insieme ammissibile non è regolare.

VERO FALSO

3. I moltiplicatori $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = 0$ associati rispettivamente al primo e secondo vincolo NON soddisfano con opportuni valori di x_1, x_2 le condizioni di KKT.

VERO FALSO

4. Il punto $x_1^* = 0, x_2^* = \frac{1}{2}$ soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.

VERO FALSO

5. Il punto $x^0 = (0, 0)^T$ può essere scelto come punto iniziale per un algoritmo risolutivo basato su una funzione di penalità sequenziale interna.

VERO FALSO

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & -6x_1 - 12x_2 + 6x_3 \\ & -2x_1 - 4x_2 \geq 1 \\ & 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 \\ & x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & u_1 + 2u_2 \\ & -2u_1 + 3u_2 = -6 \\ & 4u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & -u_2 \leq -6 \\ & u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO FALSO

2. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & u_1 + 2u_2 \\ & -2u_1 + 3u_2 = -6 \\ & 4u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & -u_2 \leq -6 \\ & u_1 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO

FALSO

3. Il punto $u = (3, 0)^T$ è ammissibile e ottimo per il problema duale.

VERO

FALSO

4. Il problema duale è illimitato superiormente.

VERO

FALSO

5. Il problema primale è illimitato inferiormente.

VERO

FALSO

Esercizio 4. (Punteggio massimo = 3) Sia data la seguente funzione obiettivo

$$\min_{x_i, y_j} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} x_i \cdot x_j \cdot a_{i,j} - \sum_{i \in T} b_i \cdot y_i$$

dove N e T sono due generici insiemi, x_i e y_i costituiscono le variabili del problema mentre $a_{i,j}, b_i$ sono parametri. Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Una possibile dichiarazione dei parametri e delle variabili in AMPL è la seguente:

```
set N;  
set T;  
param a{N,N};  
param b{T};  
var x{N};  
var y{T};
```

VERO

FALSO

2. Una possibile traduzione AMPL della funzione obiettivo è la seguente:

```
minimize obiettivo: sum{i in N, j in N} x[i]*x[j]*a[i,j] - sum{k in T} b[k]*y[k];
```

VERO

FALSO

3. Supponiamo che l'insieme N e l'insieme T abbiano i seguenti elementi

$$N = \{g, h, f\}, \quad T = \{i, l, m, n\}$$

e che la matrice a e il vettore b siano costituiti dai seguenti elementi:

allora una possibile definizione nel file `.dat` di a e b potrebbe essere la seguente:

```
param b:= i 3 l 1 m 2 n 2;
```


a	g	h	f
g	5	2	6
h	2	4	1
f	2	0	1

b	i	l	m	n
	3	1	2	2

```
param a:  g  h  f :=
          g  5  2  6
          h  2  4  1
          f  2  0  1;
```

VERO

FALSO

Esercizio 5. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione

$$\min_{\mathbb{R}^n} f(x).$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se \bar{x} è un punto tale che $\nabla f(\bar{x}) = 0$ e $\nabla^2 f(\bar{x}) \succ 0$, allora \bar{x} è minimo globale.

VERO

FALSO

2. Se $\nabla^2 f(\bar{x}) \not\geq 0$ (non semidefinita positiva), allora \bar{x} non può essere minimo locale.

VERO

FALSO

3. Se in \bar{x} risulta $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$, si può sempre definire la direzione del metodo di Newton ed è di discesa.

VERO

FALSO

4. Se un algoritmo per la minimizzazione non vincolata converge con rapidità di convergenza quadratica, allora converge anche con rapidità superlineare.

VERO

FALSO

Esercizio 6. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ & Ax = b \\ & l \leq x \leq U \end{aligned}$$

con A matrice $m \times n$, b vettore in \mathbb{R}^m , $l < U$ vettori di \mathbb{R}^n entrambi finiti. Si supponga che il sistema $Ax = b$ ammetta soluzione. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema può NON avere soluzione

VERO

FALSO

2. Se $f(x)$ è convessa, allora il problema è convesso.

VERO

FALSO

3. Per il problema le condizioni di KKT si applicano solo nell'ipotesi di regolarità dei vincoli.

VERO

FALSO **X**

4. Per la soluzione del problema NON si può utilizzare un metodi di penalità sequenziale interna.

VERO **X**

FALSO

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con A matrice $m \times n$ e $b, x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono m tutte vincolate ad essere non negative.

VERO **X**

FALSO

2. Se il problema primale ammette soluzione ottima finita x^* , allora il valore ottimo della funzione obiettivo del problema primale soddisfa $c^T \bar{x} \leq c^T x^* \leq b^T \bar{u}$, per ogni \bar{x}, \bar{u} ammissibile rispettivamente per il problema primale e per il duale.

VERO **X**

FALSO

3. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A^T \bar{u} \geq c$, allora $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$.

VERO

FALSO **X**

4. Se il problema duale è vuoto, allora il problema primale ha insieme ammissibile vuoto oppure è illimitato.

VERO **X**

FALSO