ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2º anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4:
ogni risposta CORRETTA vale **1** PUNTO e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.
Per gli esercizi 5,6,7:
ogni risposta CORRETTA vale **0,25** PUNTI e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ x_1^2x_2^2 + \frac{1}{2}x_2^2x_1 + 2x_1^2x_2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il punto $(1,\ -2)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

   VERO **X** FALSO

2. Il punto $(1,\ -2)^T$ è un minimo locale stretto.

   VERO FALSO **X**

3. L'approssimazione quadratica della funzione nell'intorno del punto $(1,\ 0)^T$ è strettamente convessa.

   VERO FALSO **X**

4. Nel punto $x^0 = (0,\ 0)^T$ il passo $\alpha = \frac{1}{4}$ soddisfa una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente (con parametro $\gamma = \frac{1}{4}$).

   VERO **X** FALSO

5. Nel punto $x^0 = (0,\ 1)^T$ è possibile definire la direzione di Newton.

   VERO **X** FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ & (x_1+1)^2 + x_2^2 \geq 1 \\ & (x_1-1)^2 + x_2^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. L'insieme ammissibile è convesso (utilizzare, se necessario, la rappresentazione grafica)

   VERO **X** | FALSO

2. L'insieme ammissibile è regolare

   VERO | FALSO **X**

3. Il problema non ha una soluzione globale VERO | FALSO **X**

4. Siano λ_1 e λ_2 i moltiplicatori associati al primo e secondo vincolo; i valori $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$ soddisfano le condizioni di KKT.

   VERO **X** | FALSO

5. Se nel primo vincolo al secondo membro si sostituisce $1 + \epsilon$, con $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo rispetto a 1, la soluzione ottima migliora.

   VERO | FALSO **X**

Esercizio 3 . (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & -6x_1 + 12x_2 + 6x_3 \\ & -2x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ & 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichino con x^* e u^* le soluzioni ottime rispettivamente del problema primale e duale (se esistono) e sia $\bar{x} = (0, 1, 1)^T$.

1. Il problema

   $$\begin{aligned} \max \quad & u_1 + 2u_2 \\ & -2u_1 + 3u_2 \leq -6 \\ & 4u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & -u_2 \leq 6 \\ & u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

   VERO | FALSO **X**

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & u_1 + 2u_2 \\ & -2u_1 + 3u_2 \leq -6 \\ & 4u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & u_2 \geq -6 \\ & u_1 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO **X** | FALSO

3. Se esiste u^*, si ha $b^T u^* \leq 18$.

VERO **X** | FALSO

4. Il punto $(0, \ -2)^T$ è ammissibile per il duale e si ha

$$-4 \leq c^T x^* \leq 18$$

VERO **X** | FALSO

5. La coppia $x^* = (\frac{5}{18}, \ \frac{7}{18}, 0)^T$, $u^* = (3, \ 0)^T$ è ottima rispettivamente per il problema primale e per il problema duale.

VERO **X** | FALSO

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Siano dati i seguenti vincoli non lineari

$$\sum_{j=1}^{T} (c_j - a_{i,j})^2 \leq r^2, \quad i = 1, \ldots N$$

dove $c \in R^T, r \in R$ sono variabili del problema mentre $a \in R^{N \times T}$ è una matrice di parametri. Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Una possibile dichiarazione dei parametri e delle variabili in AMPL è la seguente:

```
param T integer;
param a{ 1..N,1..T};
param N integer;
var r;
var c{ 1..T};
```

VERO | FALSO **X**

2. Una possibile traduzione AMPL dei vincoli è la seguente:

```
s.t.  vinc:sum{i in 1..N,j in 1..T}(c[j]-a[i,j])**2<=r**2;
```

VERO | FALSO **X**

3. Supponiamo di avere la seguente matrice a:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1.5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e che nel file `.mod` la matrice a sia dichiarata nel seguente modo:

```
param a{ 1..N,1..T};
```

con `N` e `T` parametri interi, allora una possibile definizione della matrice a nel file .dat è la seguente:

```
param T:=3;
param N:=4;
```

```
param a:  1    2  3:=
       1  1    1  1
       2  0.5  0  0.5
       3  1.5  0  2
       4  2    0  0;
```

VERO **X** | FALSO

Esercizio 5. (Punteggio massimo = 1)

$$\min_{R^n} \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x.$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $\bar{x}$ è un punto tale che $Q \succeq 0$ (semidefinita positiva), allora $\bar{x}$ è un minimo globale.

   VERO | FALSO **X**

2. Se $Q \succ 0$ (definita positiva) il passo di una ricerca di linea esatta ha la forma

$$\alpha^* = -\frac{\nabla f(x^k)^T d^k}{{d^k}^T Q d^k}.$$

   VERO **X** | FALSO

3. Se $Q \succeq 0$ (è semidefinita positiva), esiste sempre una soluzione al problema $\min_{R^n} f(x)$.

   VERO | FALSO **X**

4. Se $Q \succ 0$ (definita positiva) il metodo delle direzioni coniugate determina il minimo in al più n iterazioni.

   VERO **X** | FALSO

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & Ax \geq b \end{array}$$

con A matrice $m \times n$ e b vettore in R^n. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa, allora il problema è convesso.

   VERO **X** | FALSO

2. La funzione

   $$f(x) - \epsilon \sum_{i=1}^{m} log(a_i^T x - b_i)$$

   è una funzione di penalità interna per il problema.

   VERO **X** | FALSO

3. Sia $\bar{x}$ un punto ammissibile che soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine, allora $\bar{x}$ è un minimo locale stretto.

   VERO **X** | FALSO

4. Se $m > n$, allora l'insieme ammissibile non è regolare.

   VERO | FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono m tutte vincolate ad essere non negative.

   VERO | FALSO **X**

2. Se il problema duale ammette soluzione ottima finita u^*, allora il valore ottimo della funzione obiettivo del problema duale soddisfa $c^T\bar{x} \leq b^T u^* \leq b^T\bar{u}$, per ogni $\bar{x}, \bar{u}$ ammissibile rispettivamente per il problema primale e per il duale.

   VERO **X** | FALSO

3. Se $\bar{x} \in R^n$ ammissibile per il primale e $\bar{u} \in R^m$ tale che $A^T\bar{u} \geq c$, sono tali che $b^T\bar{u} = c^T\bar{x}$, allora $\bar{x}, \bar{u}$ sono soluzioni ottime rispettivamente per il problema primale e per il duale.

   VERO **X** | FALSO

4. Se il problema primale è illimitato, allora il problema duale ha insieme ammissibile vuoto.

   VERO **X** | FALSO