1 Introduzione

1.1 Forme standard e prime definizioni

Come messo in luce nel corso di *Ricerca Operativa*, molti problemi dell'Ingegneria Gestionale assumono la forma di un problema di *Ottimizzazione*. Un problema di Ottimizzazione consiste nel determinare il valore di un vettore di *variabili di decisione* $x \in \mathbb{R}^n$ che minimizza una *funzione obiettivo* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, quando x e' vincolato ad appartenere ad un *insieme ammissibile* $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$; cioe' consiste nel problema:

$$\min_{x \in \mathcal{F}} f(x). \tag{1}$$

Osserviamo subito che un problema di massimo si può sempre ricondurre a un problema di minimo, cambiando di segno la funzione obiettivo. Infatti, i punti di massimo (ove esistano) del problema

$$\max_{x \in \mathcal{F}} \ f(x)$$

coincidono con i punti di minimo del problema

$$\min_{x \in \mathcal{F}} \ - f(x)$$

e risulta: $\max_{x \in \mathcal{F}} f(x) = - \min_{x \in \mathcal{F}} (-f(x))$.

In base a tale osservazione ci si può riferire esclusivamente, senza perdita di generalità, a problemi di minimizzazione.

Riportiamo la prima definizione utile.

Definizione 1 (Punto di minimo globale) *Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ si dice* punto di minimo globale (o assoluto) *di f su $\mathcal{F}$ se risulta:*

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathcal{F},$$

e, in tal caso, si dice che $f(x^*)$ è il minimo (o il valore minimo) globale *di f su $\mathcal{F}$, ossia*

$$f(x^*) = \min_{x \in \mathcal{F}} f(x).$$

Si dice che $x^* \in \mathcal{F}$ è un punto di minimo globale stretto *di f su S se risulta:*

$$f(x^*) < f(x), \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathcal{F}, \ x \neq x^*. \quad \Box$$

È opportuno mettere in evidenza che, assegnati $\mathcal{F}$ e $f : \ \mathcal{F} \to R$ potrebbero anche non esistere soluzioni ottime. Una prima possibilità è che l'insieme ammissibile $\mathcal{F}$ sia vuoto; in tal caso non esistono *punti ammissibili* e di conseguenza non esistono soluzioni ottime.

Se $\mathcal{F}$ è non vuoto, possono verificarsi, nel caso generale, le situazioni seguenti:

- la funzione obiettivo è illimitata inferiormente su $\mathcal{F}$ ossia:

$$\inf_{x \in \mathcal{F}} f(x) = -\infty$$

  e, in tal caso, non esiste un valore minimo di f su $\mathcal{F}$;

- la funzione obiettivo è limitata inferiormente su $\mathcal{F}$ ossia:

$$\inf_{x\in\mathcal{F}} f(x) > -\infty,$$

ma tuttavia *non esistono punti di minimo globale* di f su $\mathcal{F}$;

- esistono punti di minimo globale di f su $\mathcal{F}$; in tal caso la funzione obiettivo è necessariamente limitata inferiormente su $\mathcal{F}$ e si ha

$$\inf_{x\in\mathcal{F}} f(x) = \min_{x\in\mathcal{F}} f(x).$$

Solo nell'ultimo caso, ovviamente, ci si può porre il problema della ricerca di una soluzione ottima.
"Risolvere" un problema di ottimizzazione può quindi significare, in pratica:

- stabilire se l'insieme ammissibile è non vuoto, oppure concludere che non esistono soluzioni ammissibili;

- stabilire se esistono soluzioni ottime, oppure dimostrare che il problema non ammette soluzioni ottime;

- determinare (eventualmente in modo approssimato) una soluzione ottima.

Due casi sono di particolare interesse: - l'insieme ammissibile $\mathcal{F}$ coincide con $\mathbb{R}^n$, cosicchè il Problema (1) diviene:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x); \tag{2}$$

in questo caso si dice che il Problema (1) e' *non vincolato*. Piu' in generale, il Problema (1) è non vincolato se $\mathcal{F}$ e' un insieme aperto in $\mathbb{R}^n$. Le condizioni di ottimalità per il Problema (2) considerate nel seguito, non cambiano se $\mathcal{F}$ è un aperto; quindi in queste note, per semplicità assumiamo che $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$.
- l'insieme ammissibile è descritto da *vincoli di disuguaglianza* e/o *vincoli di uguaglianza* sulle variabili di decisione:

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0,\ i = 1,\dots,p;\ h_j(x) = 0,\ j = 1,\dots,m\};$$

in questo caso il Problema (1) diviene:

$$\begin{array}{cl} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0, \end{array} \tag{3}$$

con $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. In questo caso diciamo che il Problema (1) è *vincolato*.

I problemi di Ottimizzazione vengono anche chiamati problemi di *Programmazione Matematica* quando si vuole mettere l'enfasi sui metodi risolutivi dei problemi stessi.

Nel corso di Ricerca Operativa è stato esemplificato il caso della Programmazione Lineare, che corrisponde al caso in cui tutte le funzioni f, g_i, $i = 1,\dots,p$, h_j, $j = 1,\dots,m$ del Problema (3) sono combinazioni lineari delle variabili di decisione, sono cioè funzioni della forma:

$$v(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n,$$

ove $c_i, i = 1, \dots, n$ sono coefficienti.
Notiamo che un problema di Programmazione Lineare è necessariamente vincolato, poiché altrimenti si tratterebbe sempre di un problema illimitato.

Si dice che il Problema (1) è un problema di *Programmazione Nonlineare* (PNL) se almeno una, tra le funzioni f, $g_i, i = 1, \dots, p$, $h_j, j = 1, \dots, m$, del Problema (2) o del Problema (3) risulta essere non lineare, rispetto ad almeno una delle componenti del vettore delle variabili di decisione x.

Per il problema vincolato (3) si assume usualmente che il numero m di vincoli di uguaglianza non sia maggiore del numero n di variabili di decisione, cioè si assume $m \leq n$. Altrimenti, dovendo le n variabili soddisfare m equazioni, l'insieme ammissibile potrebbe risultare vuoto, a meno che alcuni vincoli non siano tra di loro dipendenti, e quindi ridondanti. Una limitazione analoga non vale invece per i vincoli di disuguaglianza.

A volte, tra i vincoli di disuguaglianza, si mettono in esplicita evidenza i *vincoli semplici* sulle variabili, vincoli che esprimono limitazioni sul valore minimo m_i e massimo M_i che una variabile x_i può assumere. In questo caso, il Problema (3) diviene:

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \\ m & \leq x \leq \; M. \end{array} \tag{4}$$

Se nel Problema (4) la variabile x_i non è limitata inferiormente (superiormente), si assume per convenzione che $m_i = -\infty$ ($M_i = +\infty$).
In generale, in problemi di PNL la ricerca di soluzioni globali può risultare difficile, e può avere interesse anche la ricerca di soluzioni di tipo "locale". Per poter definire il concetto di "punto di minimo locale" occorre introdurre il concetto di *intorno sferico aperto* $\mathcal{S}$ di un punto. In particolare dato x^* , un intorno sferico aperto $\mathcal{S}$ di centro x^* e raggio $\rho > 0$ è definito come

$$\mathcal{S}(x^*, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| < \rho\}.$$

Possiamo allora introdurre la seguente definizione

Definizione 2 (Punto di minimo locale) *Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ si dice* punto di minimo locale (o relativo) *di f su $\mathcal{F}$ se* esiste *un intorno $\mathcal{S}(x^*, \rho)$ di x^* tale che:*

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{S}(x^*, \rho),$$

e, in tal caso, si dice che $f(x^*)$ è un minimo locale *di f su S.*
Si dice che $x^* \in S$ è un punto di minimo locale stretto *di f su S se* esiste *un intorno $\mathcal{S}(x^*, \rho)$ di x^* tale che:*

$$f(x^*) < f(x), \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{S}(x^*, \rho), \; x \neq x^*. \quad \Box$$

È immediato rendersi conto del fatto che *un punto di minimo globale è anche un punto di minimo locale.* Notiamo anche che nella definizione precedente l'intorno $\mathcal{S}(x^*, \rho)$ preso in considerazione *non è necessariamente tutto contenuto* in S. Nel caso particolare in cui $\mathcal{F}$ abbia un interno non vuoto ed esista $\mathcal{S}(x^*, \rho) \subseteq \mathcal{F}$, tale che $f(x^*) \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathcal{S}(x^*, \rho)$, diremo che x^* è un punto di minimo locale *non vincolato* di f su S.

In queste note assumiamo che le funzioni del problema f, g, h siano almeno continuamente differenziabili in $\mathbb{R}^n$; quando richiesto, assumiamo che siano almeno due volte continuamente differenziabili.

Nel seguito diremo che un problema di ottimizzazione è scritto in *forma standard* se è scritto nella forma (2) nel caso non vincolato, nella forma (3) nel caso vincolato.

Domande

1) Come si mette in forma standard un problema non vincolato in cui la funzione obiettivo è da massimizzare?

2) Ogni problema con vincoli di disuguaglianza e uguaglianza può essere trasformato in un problema con soli vincoli di disuguaglianza. Come?

3) Ogni problema con vincoli di disuguaglianza e uguaglianza può essere trasformato in un problema con soli vincoli di uguaglianza. Come?