Ragionamento Automatico

Esercitazione 6

LTL e CTL

- ♢ Rewriting: un ultimo esercizio
- ♢ LTL
- ♢ CTL

1. Rewriting

Lemma di Knuth-Bendix - ripasso

$\diamondsuit$ **Lemma [Knuth-Bendix]:** *Un sistema di riscrittura è localmente confluente se tutte le coppie critiche sono unibili.*

Ad esempio date le seguenti regole:

$$\begin{array}{rcl} max(0, x) & \rightarrow & x \\ max(x, 0) & \rightarrow & x \end{array}$$

Il mgu σ è $\{0/x\}$; la coppia critica, $0 = 0$, formata da loro è banalmente unibile.

Esercizio 1.1

♢ Sia dato il seguente sistema di riscrittura R:

$$\begin{aligned} f(x,a) &\rightarrow x \\ f(a,x) &\rightarrow x \\ f(z,g(x,y)) &\rightarrow g(f(z,x),f(z,y)) \end{aligned}$$

determinare se è localmente confluente, esplicitando le coppie critiche.

Esercizio 1.1 — soluzione

Consideriamo le **coppie critiche** del sistema:

$$
\begin{aligned}
a &= a && (1)\\
g(f(a,x), f(a,y)) &= g(x,y) && (2)
\end{aligned}
$$

Per quel che rigurda la coppia (1), è banalmente unibile.
La coppia (2) invece risulta unibile dalla riduzione:

$$g(f(a,x), f(a,y)) \to g(x, f(a,y)) \to g(x,y)$$

Per il lemma di **Knuth-Bendix** abbiamo che il sistema è localmente confluente.

2. LTL e CTL

Esercizio 2.1

Tradurre in logica LTL o CTL le seguenti frasi del linguaggio naturale:

1. Un certo processo può raggiungere uno stato dove ”iniziato“ vale mentre ”pronto“ non vale.

2. Considerato un qualunque stato di un processo, se occorre una richiesta di una risorsa, allora prima o poi tale richiesta verrà servita.

3. Un certo processo é abilitato infinitamente spesso su ciascun cammino computazionale.

4. Qualunque cosa accada, un certo processo un certo processo alla fine si troverà permanentemente in stallo.

Esercizio 2.1 — Soluzione

1. $\mathbf{EF}(iniziato \wedge \neg pronto)$

2. $\mathbf{AG}(richiesta \to \mathbf{AF}\ riconsciuta)$

3. $\mathbf{AG}(\mathbf{AF}\ abilitato)$

4. $\mathbf{AF}(\mathbf{AG}\ stallo)$

Esercizio 2.2

Tradurre in logica LTL o CTL le seguenti frasi del linguaggio naturale:

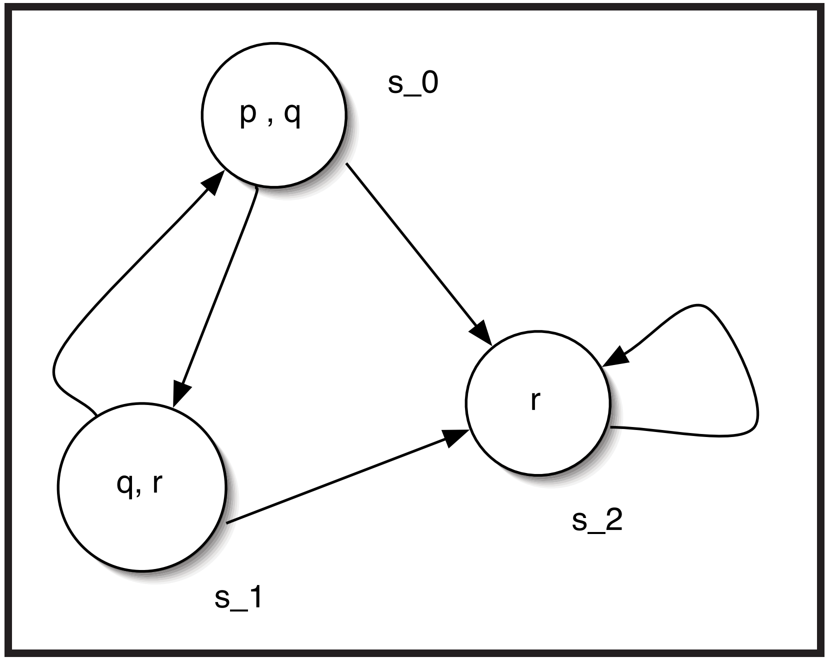
1. Da ogni stato di un processo è possibile andare in uno stato di riavvio.

2. Un processo che è abilitato infinitamente spesso, è eseguito infinitamente spesso.

3. Un ascensore che sta andando verso l'alto e si trova al secondo piano non cambia direzione se viene premuto il tasto del quinto piano.

4. Un ascensore può rimanere inattivo al terzo piano con le porte chiuse.

Esercizio 2.3



Esercizio 2.3 — continua

1 Dato il sistema descritto nella figura precedente, si costruisca la versione ad albero corrispondente.

Si consideri la seguente formula: **GF**p. Essa significa che p occorre **infinitamente spesso** lungo il cammino su cui la formula è valutata.

Un cammino dove essa vale è : $s_0 \to s_1 \to s_2 \dots$. Come si vede considerando questo cammino, non importa da quale stato di esso si parta, prima o poi si incontra comunque p, cioè p si incontra **infinitamente spesso**.

Un cammino dove non vale è : $s_0 \to s_2 \to s_2 \dots$

Esercizio 2.3 — continua

2 $\mathcal{M}, s_0 \not\models \mathbf{GF}p$

$\mathcal{M}, s_0 \models \mathbf{GF}p \rightarrow \mathbf{GF}r$

$\mathcal{M}, s_0 \not\models \mathbf{GF}r \rightarrow \mathbf{GF}p$

Esercizio 2.4

Disegnare i “parse tree” per le seguenti formule:

1. $\mathbf{F}p \wedge \mathbf{G}q \rightarrow p\mathbf{W}r$

2. $\mathbf{F}(p \rightarrow \mathbf{G}r) \vee \neg q\mathbf{U}p$

3. $p\mathbf{W}(q\mathbf{W}r)$

4. $\mathbf{GF}p \rightarrow \mathbf{F}(q \vee s)$

Esercizio 2.4 — soluzione

Versione delle precedenti formule con le parentesi:

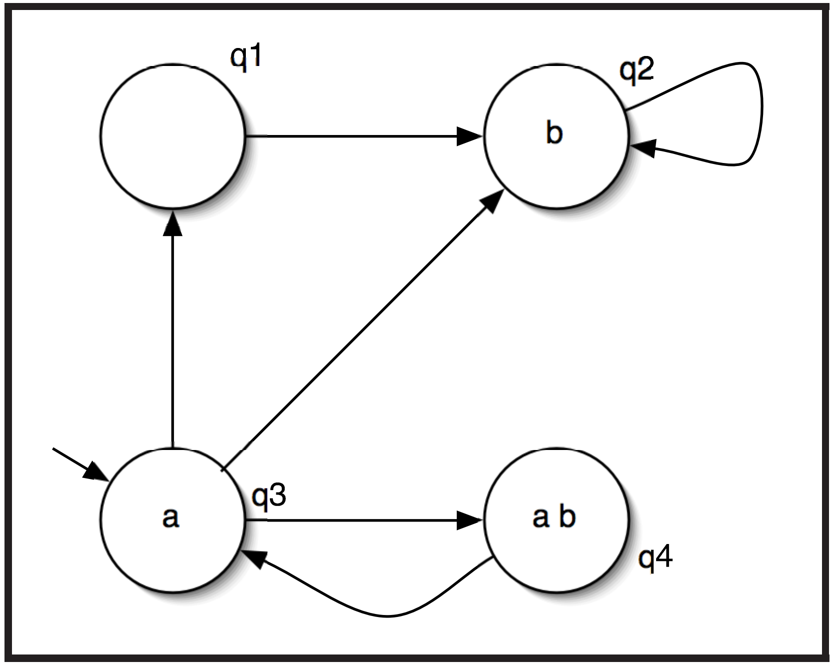
1. $(((\mathbf{F}p) \wedge (\mathbf{G}q)) \rightarrow (p\mathbf{W}r))$

2. $((\mathbf{F}(p \rightarrow (\mathbf{G}r))) \vee ((\neg q)\mathbf{U}p))$

3. $(p\mathbf{W}(q\mathbf{W}r))$

4. $(\mathbf{G}(\mathbf{F}p)) \rightarrow (\mathbf{F}(q \vee s))$

Esercizio 2.5



Esercizio 2.5 — continua

Dato il modello del lucido precedente, per ciascuna delle formule φ che seguono determinare:

(i) un percorso a partire da $q3$ dove esse valgono,

(ii) se $\mathcal{M}, q3 \models \varphi$.

Formule:

a. $\mathbf{G}a$

b. $a\mathbf{U}b$

c. $a\mathbf{U}\ \mathbf{X}(a \wedge \neg b)$

d. $\mathbf{X}\neg b \wedge \mathbf{G}(\neg a \vee \neg b)$

e. $\mathbf{X}(a \wedge b) \wedge \mathbf{F}(\neg a \wedge \neg b)$

Esercizio 2.6

Costruire il parse tree delle seguenti formule:

1. $\mathbf{EG}r$
2. $\mathbf{AG}(q \rightarrow \mathbf{EG}r)$
3. $\mathbf{A}[p\mathbf{U}\mathbf{EF}r]$
4. $\mathbf{EFEG}p \rightarrow \mathbf{AF}r$
5. $\mathbf{A}[p\mathbf{U}\mathbf{A}[q\mathbf{U}r]]$
6. $\mathbf{E}[\mathbf{A}[p\mathbf{U}q]\mathbf{U}r]$
7. $\mathbf{A}[\mathbf{AX}\neg p\mathbf{U}\mathbf{E}[\mathbf{EX}(p \wedge q)\mathbf{U}\neg p]]$
8. $\mathbf{AG}(p \rightarrow \mathbf{A}[p\mathbf{U}(\neg p \wedge \mathbf{A}[\neg p\mathbf{U}q])])$

Esercizio 2.7

Individuare se le seguenti formule sono ben formate e, se no, spiegare perché .

1. $\mathbf{FG}r$
2. $\mathbf{XX}r$
3. $\mathbf{A}\neg\mathbf{G}\neg p$
4. $\mathbf{F}[r\mathbf{U}q]$
5. $\mathbf{EXX}r$
6. $\mathbf{AEF}r$
7. $\mathbf{AF}[(r\mathbf{U}q) \wedge (p\mathbf{U}r)]$

Esercizio 2.7 — soluzione

Le formule 1,2,e 4 sono ben formate; le formule 3, 5, 6 e 7 non lo sono.

Esercizio 2.8

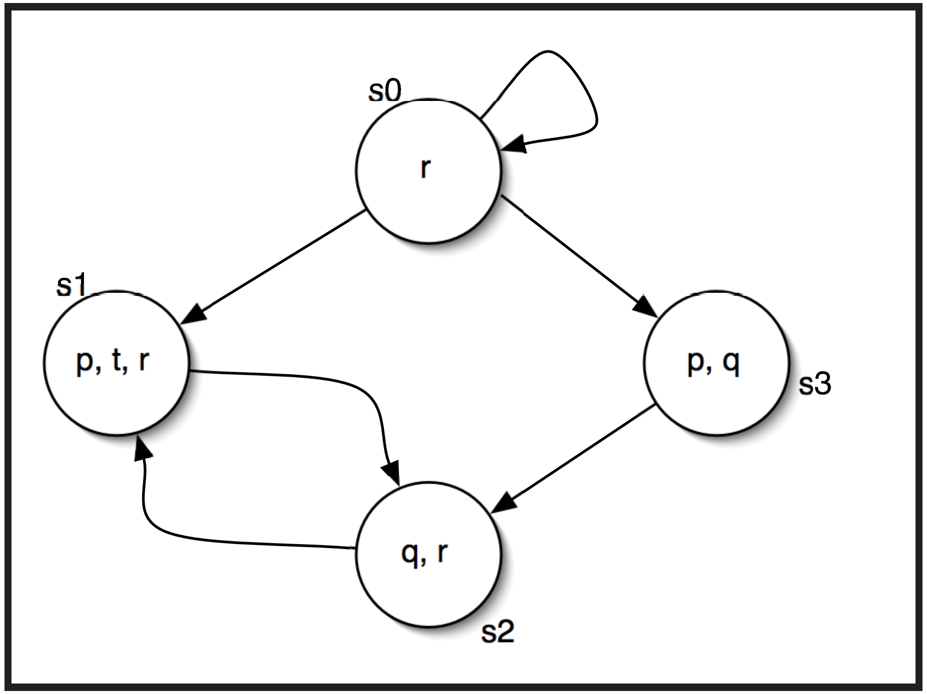
Individuare se le seguenti formule CTL sono ben formate. Se no, spiegare perché , mentre se si, disegnare il parse tree.

1. $\neg(\neg p) \vee (r \wedge s)$
2. $\mathbf{X}q$
3. $\neg\mathbf{AX}q$
4. $p\mathbf{U}(\mathbf{AX}\bot)$
5. $\mathbf{E}[(\mathbf{AX}q)\mathbf{U}(\neg(\neg p) \vee (\top \wedge s))]$
6. $(\mathbf{F}r) \wedge (\mathbf{AG}q)$
7. $\neg(\mathbf{AG}q) \vee (\mathbf{EG}q)$

Esercizio 2.8 — soluzione

Le formule 1, 3, 5 e 7 sono ben formate, le altre non lo sono.

Esercizio 2.9



Esercizio 2.9 — continua

Dato il modello del lucido precedente, costruirne la versione ad albero e per ciascuna delle formule φ che seguono determinare se:

(i) $\mathcal{M}, s0 \models \varphi$

(ii) $\mathcal{M}, s2 \models \varphi$.

Formule:

1. $\neg p \rightarrow r$
2. $\mathbf{F}t$
3. $\neg\mathbf{EG}r$
4. $\mathbf{E}(t\mathbf{U}q)$
5. $\mathbf{EF}q$
6. $\mathbf{F}q$
7. $\mathbf{EG}r$
8. $\mathbf{G}(r \vee q)$

Esercizio 2.10

Verificare se vale

$\neg \mathbf{A}(\neg p \mathbf{R} \neg r) \equiv \mathbf{A}(p \mathbf{R} r)$

e

$\neg \mathbf{A}(\neg p \mathbf{R} \neg r) \equiv \mathbf{A}(p \mathbf{U} r)$

o se vale qualche variante di esse.