Ragionamento Automatico

Esercitazione 2

La deduzione naturale

- ◊ La deduzione naturale in logica proposizionale
- ◊ La deduzione naturale in logica del primo ordine

1. DN in Logica Proposizionale

Esercizio 1.1

Dimostriamo che: $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash_{DN} \neg\neg p \wedge r$.

1.	p	$Premessa$	()
2.	$\neg\neg(q \wedge r)$	$Premessa$	()
3.	$\neg\neg p$	$(\neg\neg i)$ da 1	()
4.	$q \wedge r$	$(\neg\neg e)$ da 2	()
5.	r	$(\wedge e)$ da 4	()
6.	$\neg\neg p \wedge r$	$(\wedge i)$ da 3 e 5	()

Esercizio 1.2

Dimostriamo che: $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash_{DN} q \wedge s$.

1.	$(p \wedge q) \wedge r$	$Premessa$	()
2.	$s \wedge t$	$Premessa$	()
3.	$p \wedge q$	$(\wedge e)$ da 1	()
4.	q	$(\wedge e)$ da 3	()
5.	s	$(\wedge e)$ da 2	()
6.	$q \wedge s$	$(\wedge i)$ da 4 e 5	()

Esercizio 1.3

Dimostriamo che: $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash_{DN} \neg q$.

1.	$p \to (q \to r)$	$Premessa$	()
2.	p	$Premessa$	()
3.	$\neg r$	$Premessa$	()
4.	$q \to r$	$(\to e)$ *da* 1 *e* 2	()
5.	$\neg q$	MT *da* 3 *e* 4	()

Esercizio 1.4

Dimostriamo che: $\neg q \rightarrow \neg p \vdash_{DN} p \rightarrow \neg\neg q$.

1.	$\neg q \rightarrow \neg p$	*Premessa*	()
2.	p	*Assunzione*	(2)
3.	$\neg\neg p$	$(\neg\neg i)$ *da* 2	(2)
4.	$\neg\neg q$	*MT da* 1 *e* 3	(2)
5.	$p \rightarrow \neg\neg q$	$(\rightarrow i)$ *da* 2 *e* 4 *scarto* 2	()

Esercizio 1.5

Dimostriamo che: $(A \wedge B) \rightarrow C \vdash_{DN} A \rightarrow B \rightarrow C$.

1.	A	*Assunzione*	(1)
2.	B	*Assunzione*	(2)
3.	$(A \wedge B) \rightarrow C$	*Premessa*	(3)
4.	$A \wedge B$	$(\wedge i)$ *da* 1 *e* 2	$(1, 2)$
5.	C	$(\rightarrow e)$ *da* 3 *e* 4	$(1, 2, 3)$
6.	$B \rightarrow C$	$(\rightarrow i)$ *da* 2 *e* 5 *scarto* 2	$(1, 3)$
7.	$A \rightarrow B \rightarrow C$	$(\rightarrow i)$ *da* 1 *e* 6 *scarto* 1	(3)

Esercizio 1.6

Dimostriamo che: $\vdash_{DN} (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$.

1.	$q \rightarrow r$	$Assunzione$	(1)
2.	$\neg q \rightarrow \neg p$	$Assunzione$	(2)
3.	p	$Assunzione$	(3)
4.	$\neg\neg p$	$(\neg\neg i)$ da 3	(3)
5.	$\neg\neg q$	MT da 2 e 4	(2, 3)
6.	q	$(\neg\neg e)$ da 5	(2, 3)
7.	r	$(\rightarrow e)$ da 1 e 6	(1, 2, 3)
8.	$p \rightarrow r$	$(\rightarrow i)$ da 3 e 7 $sc.$ 3	(1, 2)
9.	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$(\rightarrow i)$ da 2 e 8 $sc.$ 2	(1)
10.	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$(\rightarrow i)$ da 1 e 9 $sc.$ 1	()

Esercizio 1.6 — Continua

Si osservi la struttura della derivazione: una parte è strettamente determinata dalla struttura della formula (passi 1–2 e 7–8–9–10), mentre un'altra (passi 3–4–5–6) è più creativa. Consideriamo la derivazione guidata dalla struttura: vogliamo dimostrare un'implicazione quindi dobbiamo usare una regola di ($\rightarrow i$). Perciò assumiamo la premessa (riga 1) e cerchiamo di derivare la conseguenza (riga 9). Ma la conseguenza è a sua volta un'implicazione e così procediamo analogamente: assumiamo la premessa (riga 2) e cerchiamo una derivazione per la conseguenza (riga 8). Un analogo ragionamento ci porta a dover derivare r. Da qui inizia la parte creativa. I passi 3–4–5–6 ci portano alla derivazione di r tramite l'uso della regola ($\neg\neg e$) e del modus tollens.

Esercizio 1.7

Dimostriamo che: $p \wedge q \rightarrow r \vdash_{DN} p \rightarrow (q \rightarrow r)$.

1.	$p \wedge q \rightarrow r$	$Premessa$	(1)
2.	p	$Assunzione$	(2)
3.	q	$Assunzione$	(3)
4.	$p \wedge q$	$(\wedge i)$ da 2 e 3	$(2,3)$
5.	r	$(\rightarrow e)$ da 1 e 4	$(1,2,3)$
6.	$q \rightarrow r$	$(\rightarrow i)$ da 3 e 5 $scarto$ 3	$(1,2)$
7.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(\rightarrow i)$ da 2 e 6 $scarto$ 2	(1)

Esercizio 1.8

Dimostriamo che: $p \to (q \to r) \vdash_{DN} p \land q \to r$.

1.	$p \to (q \to r)$	$Premessa$	(1)
2.	$p \land q$	$Assunzione$	(2)
3.	p	$(\land e)$ da 2	(2)
4.	q	$(\land e)$ da 2	(2)
5.	$q \to r$	$(\to e)$ da 1 e 3	$(1, 2)$
6.	r	$(\to e)$ da 4 e 5	$(1, 2)$
7.	$p \land q \to r$	$(\to i)$ da 2 e 6 $scarto$ 2	(1)

Esercizio 1.9

Dimostriamo che: $p \to q \vdash_{DN} p \wedge r \to q \wedge r$.

1.	$p \to q$	$Premessa$	(1)
2.	$p \wedge r$	$Assunzione$	(2)
3.	p	$(\wedge e)$ da 2	(2)
4.	r	$(\wedge e)$ da 2	(2)
5.	q	$(\to e)$ da 1 e 3	$(1, 2)$
6.	$q \wedge r$	$(\wedge i)$ da 4 e 5	$(1, 2)$
7.	$p \wedge r \to q \wedge r$	$(\to i)$ da 2 e 6 $scarto$ 2	(1)

Esercizio 1.10

Dimostriamo che: $q \to r \vdash_{DN} p \vee q \to p \vee r$.

1.	$q \to r$	$Premessa$	(1)
2.	$p \vee q$	$Assunzione$	(2)
3.	p	$Assunzione$	(3)
4.	$p \vee r$	$(\vee i)$ da 3	(3)
5.	q	$Assunzione$	(5)
6.	r	$(\to e)$ da 1 e 5	$(1,5)$
7.	$p \vee r$	$(\vee i)$ da 6	$(1,5)$
8.	$p \vee r$	$(\vee e)$ da 2, 3, 4, 5 e 7 $scarto$ 3 e 5	$(1,2)$
9.	$p \vee q \to p \vee r$	$(\to i)$ da 2 e 8 $scarto$ 2	(1)

Esercizio 1.11

Dimostriamo che: $(p \vee q) \vee r \vdash_{DN} p \vee (q \vee r)$.

1.	$(p \vee q) \vee r$	*Premessa*	(1)
2.	$p \vee q$	*Assunzione*	(2)
3.	p	*Assunzione*	(3)
4.	$p \vee (q \vee r)$	$(\vee i)$ *da* 3	(3)
5.	q	*Assunzione*	(5)
6.	$q \vee r$	$(\vee i)$ *da* 5	(5)
7.	$p \vee (q \vee r)$	$(\vee i)$ *da* 6	(5)
8.	$p \vee (q \vee r)$	$(\vee e)$ *da* 2, 3, 4, 5 *e* 7 *scarto* 3 *e* 5	(2)
9.	r	*Assunzione*	(9)
10.	$q \vee r$	$(\vee i)$ *da* 9	(9)
11.	$p \vee (q \vee r)$	$(\vee i)$ *da* 10	(9)
12.	$p \vee (q \vee r)$	$(\vee e)$ *da* 1, 2, 8, 9 *e* 11 *scarto* 2 *e* 9	(1)

Esercizio 1.12

Dimostriamo che: $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash_{DN} \neg p$.

1.	$p \rightarrow q$	*Premessa*	(1)
2.	$p \rightarrow \neg q$	*Premessa*	(2)
3.	p	*Assunzione*	(3)
4.	q	$(\rightarrow e)$ *da* 1 *e* 3	$(1, 3)$
5.	$\neg q$	$(\rightarrow e)$ *da* 2 *e* 3	$(2, 3)$
6.	$\perp$	$(\neg e)$ *da* 4 *e* 5	$(1, 2, 3)$
7.	$\neg p$	$(\neg i)$ *da* 3 *e* 6 *scarto* 3	$(1, 2)$

Esercizio 1.13

Dimostriamo che: $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash_{DN} \neg q$.

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$Premessa$	(1)
2.	p	$Premessa$	(2)
3.	$\neg r$	$Premessa$	(3)
4.	q	$Assunzione$	(4)
5.	$q \rightarrow r$	$(\rightarrow e)$ da 1 e 2	$(1, 2)$
6.	r	$(\rightarrow e)$ da 4 e 5	$(1, 2, 4)$
7.	$\perp$	$(\neg e)$ da 3 e 6	$(1, 2, 3, 4)$
8.	$\neg q$	$(\neg i)$ da 4 e 7 $scarto$ 4	$(1, 2, 3)$

Esercizio 1.14

Dimostriamo che: $p \land \neg q \to r, \neg r, p \vdash_{DN} q$.

1.	$p \land \neg q \to r$	$Premessa$	(1)
2.	$\neg r$	$Premessa$	(2)
3.	p	$Premessa$	(3)
4.	$\neg q$	$Assunzione$	(4)
5.	$p \land \neg q$	$(\land i)$ da 3 e 4	$(3, 4)$
6.	r	$(\to e)$ da 1 e 5	$(1, 3, 4)$
7.	$\perp$	$(\neg e)$ da 2 e 6	$(1, 2, 3, 4)$
8.	$\neg\neg q$	$(\neg i)$ da 4 e 7 $scarto$ 4	$(1, 2, 3)$
9.	q	$(\neg\neg e)$ da 8	$(1, 2, 3)$

2. DN in Logica del Primo Ordine

Esercizio 2.1

Dimostriamo, usando la deduzione naturale che:
$\vdash_{DN} \forall x(P(x) \rightarrow Q) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow Q)$

1.	$\forall x(P(x) \rightarrow Q)$	$Assunzione$	(1)
2.	$P(x) \rightarrow Q$	$(\forall e)$ da 1	(1)
3.	$\exists x(P(x) \rightarrow Q)$	$(\exists i)$ da 2	(1)
4.	$\forall x(P(x) \rightarrow Q) \rightarrow \exists x(P(x) \rightarrow Q)$	$(\rightarrow i)$ da 1 e 3 $scarto$ 1	()

Esercizio 2.2

Dimostriamo, usando la deduzione naturale che:

$\vdash_{DN} \neg\exists x P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$

1.	$P(x_0)$	*Assunzione*	(1)
2.	$\exists x P(x)$	$(\exists i)$ *da* 1	(1)
3.	$\neg\exists x P(x)$	*Assunzione*	(3)
4.	$\perp$	$(\neg e)$ *da* 2 *e* 3	(1, 3)
5.	$\neg P(x_0)$	$(\neg i)$ *da* 1 *e* 4 *con scarto di* 1	(3)
6.	$\forall x \neg P(x)$	$(\forall i)$ *da* 5	(3)
7.	$\neg\exists x P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$	$(\rightarrow i)$ *da* 3 *e* 6 *con scarto di* 3	()

Esercizio 2.3

Dimostriamo, usando la deduzione naturale che:
$\vdash_{DN} \neg\forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)$

1.	$P(x_0)$	*Assunzione*	(1)
2.	$\neg\forall x P(x)$	*Assunzione*	(2)
3.	$\forall x P(x)$	$(\forall i)$ *da* 1	(1)
4.	$\perp$	$(\neg e)$ *da* 2 *e* 3	$(1, 2)$
5.	$\neg P(x_0)$	$(\neg i)$ *da* 1 *e* 4 *scarto* 1	(2)
6.	$\exists x \neg P(x)$	$(\exists i)$ *da* 5	(2)
7.	$\neg\forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)$	$(\rightarrow i)$ *da* 2 *e* 6	()

Esercizio 2.4

Dimostriamo che: $\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x P(x) \vdash_{DN} \forall x Q(x)$.

1.	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	$Premessa$	(1)
2.	$\forall x P(x)$	$Premessa$	(2)
3.	$(P(x_0) \to Q(x_0))$	$(\forall e)$ da 1	(1)
4.	$P(x_0)$	$(\forall e)$ da 2	(2)
5.	$Q(x_0)$	$(\to e)$ da 3 e 4	$(1,2)$
6.	$\forall x Q(x)$	$(\forall i)$ da 5	$(1,2)$

Esercizio 2.5

Dimostriamo che: $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)), P(t) \vdash_{DN} \neg Q(t)$.

1.	$P(t)$	$Premessa$	(1)
2.	$\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	$Premessa$	(2)
3.	$P(t) \rightarrow \neg Q(t)$	$(\forall e)$ *da* 2	(2)
4.	$\neg Q(t)$	$(\rightarrow e)$ *da* 3 *e* 1	$(1, 2)$

Esercizio 2.6

Dimostriamo che: $\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x P(x) \vdash_{DN} \exists x Q(x)$.

1.	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	*Premessa*	(1)
2.	$\exists x P(x)$	*Premessa*	(2)
3.	$P(x_0)$	*Assunzione*	(3)
4.	$P(x_0) \to Q(x_0)$	$(\forall e)$ *da* 1	(1)
5.	$Q(x_0)$	$(\to e)$ *da* 4 *e* 3	$(3, 1)$
6.	$\exists x Q(x)$	$(\exists i)$ *da* 5	$(3, 1)$
7.	$\exists x Q(x)$	$(\exists e)$ *da* 2, 3 *e* 6 *scarto* 3	$(1, 2)$

Esercizio 2.6 — Un procedimento sbagliato

Dimostriamo che: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x P(x) \vdash_{DN} \exists x Q(x)$.

1.	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	*Premessa*	(1)
2.	$\exists x P(x)$	*Premessa*	(2)
3.	$P(x_0)$	*Assunzione*	(3)
4.	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$(\forall e)$ *da* 1	(1)
5.	$Q(x_0)$	$(\rightarrow e)$ *da* 4 *e* 3	(3, 1)
6.	$Q(x_0)$	$(\exists e)$ *da* 2, 3 *e* 5 *scarto* 3	(1, 2)
7.	$\exists x Q(x)$	$(\exists i)$ *da* 6	(1, 2)

Il passaggio che porta allo step 6 viola la condizione di applicazione della regola $(\exists e)$!!

Esercizio 2.7

Dimostriamo che: $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x)), \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash_{DN} \exists x(P(x) \wedge R(x))$.

1.	$\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$	*Premessa*	(1)
2.	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	*Premessa*	(2)
3.	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	*Assunzione*	(3)
4.	$Q(x_0) \rightarrow R(x_0)$	$(\forall e)$ *da* 1	(1)
5.	$Q(x_0)$	$(\wedge e)$ *da* 3	(3)
6.	$R(x_0)$	$(\rightarrow e)$ *da* 4 *e* 5	$(1, 3)$
7.	$P(x_0)$	$(\wedge e)$ *da* 3	(3)
8.	$P(x_0) \wedge R(x_0)$	$(\wedge i)$ *da* 7 *e* 6	$(1, 3)$
9.	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	$(\exists i)$ *da* 8	$(1, 3)$
10.	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	$(\exists e)$ *da* 2, 3 *e* 9 *scarto*3	$(1, 2)$

Esercizio 2.8

Dimostriamo che: $\exists x P(x), \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)) \vdash_{DN} \forall y Q(y)$.

1.	$\exists x P(x)$	$Premessa$	(1)
2.	$\forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y))$	$Premessa$	(2)
3.	$P(x_0)$	$Assunzione$	(3)
4.	$\forall y (P(x_0) \rightarrow Q(y))$	$(\forall e)$ da 2	(2)
5.	$P(x_0) \rightarrow Q(y_0)$	$(\forall e)$ da 4	(2)
6.	$Q(y_0)$	$(\rightarrow e)$ da 3 e 5	(2, 3)
7.	$Q(y_0)$	$(\exists e)$ da 1, 3 e 6, $scarto$ 3	(1, 2)
8.	$\forall y Q(y)$	$(\forall i)$ da 7	(1, 2)

Esercizio 2.9

Dimostriamo che: $\neg\forall x P(x) \vdash_{DN} \exists x \neg P(x)$.

1.	$\neg\forall x P(x)$	$Premessa$	(1)
2.	$\neg\exists x \neg P(x)$	$Assunzione$	(2)
3.	$\neg P(x_0)$	$Assunzione$	(3)
4.	$\exists x \neg P(x)$	$(\exists i)$ da 3	(3)
5.	$\perp$	$(\neg e)$ da 2 e 4	$(2,3)$
6.	$P(x_0)$	(RA) da 3 e 5, $scarto$ 3	(2)
7.	$\forall x P(x)$	$(\forall i)$ da 6	(2)
8.	$\perp$	$(\neg e)$ da 1 e 7	$(1,2)$
9.	$\exists x \neg P(x)$	(RA) da 2 e 8, $scarto$ 2	(1)

Esercizio 2.10

Dimostriamo che: $\exists x \neg \varphi \vdash_{DN} \neg \forall x \varphi$.

1.	$\exists x \neg \varphi$	*Premessa*	(1)
2.	$\forall x\ \varphi$	*Assunzione*	(2)
3.	$\neg \varphi[x_0/x]$	*Assunzione*	(3)
4.	$\varphi[x_0/x]$	$(\forall e)$ *da* 2	(2)
5.	$\perp$	$(\neg e)$ *da* 3 *e* 4	$(2,3)$
6.	$\perp$	$(\exists e)$ *da* 1, 3 *e* 5, *scarto* 3	$(1,2)$
7.	$\neg \forall x\ \varphi$	$(\neg i)$ *da* 2 *e* 6, *scarto* 2	(1)

Esercizio 2.11

Dimostriamo: $(\forall x\ \varphi) \wedge \psi \vdash_{DN} \forall x(\varphi \wedge \psi)$. x non libera in ψ

1.	$(\forall x\ \varphi) \wedge \psi$	$Premessa$	(1)
2.	$\forall x\ \varphi$	$(\wedge e) da$ 1	(1)
3.	ψ	$(\wedge e) da$ 1	(1)
4.	$\varphi[x_0/x]$	$(\forall e)\ da$ 2	(1)
5.	$\varphi[x_0/x] \wedge \psi$	$(\wedge i)\ da$ 3 e 4	(1)
6.	$(\varphi \wedge \psi)[x_0/x]$	$riscrittura\ di$ 5	(1)
7.	$\forall x(\varphi \wedge \psi)$	$(\forall i)\ da$ 6	(1)

Esercizio 2.12

Dimostriamo: $\forall x(\varphi \land \psi) \vdash_{DN} \forall x\ \varphi \land \psi$. x non libera in ψ

1.	$\forall x(\varphi \land \psi)$	$Premessa$	(1)
2.	$(\varphi \land \psi)[x_0/x]$	$(\forall e) da$ 1	(1)
3.	$\varphi[x_0/x] \land \psi$	$riscrittura\ di$ 2	(1)
4.	ψ	$(\land e)\ da$ 3	(1)
5.	$\varphi[x_0/x]$	$(\land e)\ da$ 3	(1)
6.	$\forall x\ \varphi$	$(\forall i)\ da$ 5	(1)
7.	$(\forall x\ \varphi) \land \psi$	$(\land i)\ da$ 4 e 6	(1)