

Bozza di soluzione - Appello 2 Giugno 2000

- [1] Essendo il sistema a fase minima con $n - m = 2$ e centro degli asintoti in $s_0 = 1$, è sufficiente spostare il centro degli asintoti a sinistra di -1 (per sicurezza è anche opportuno non scegliere lo zero a destra di -1) ad esempio in $s'_0 = -2$. La coppia polo (in $s = -p$)/zero (in $s = -z$) deve quindi essere tale che

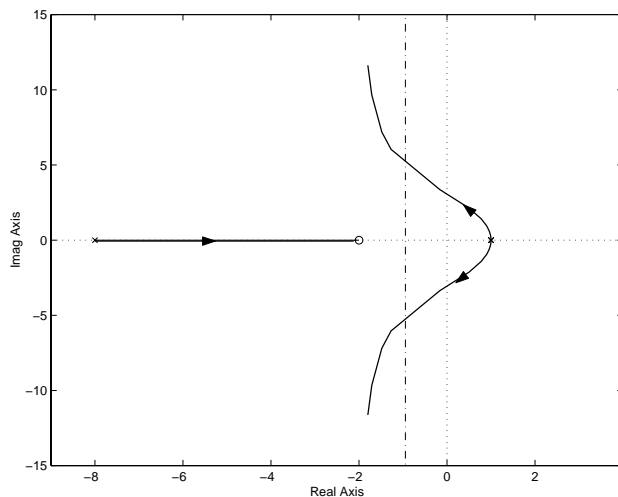
$$\frac{-p + z}{2} + s_0 = s'_0 \quad \implies \quad -p + z = -6$$

Si sceglie ad esempio $z = 2$ e $p = 8$. Dal luogo delle radici risultante, sicuramente esiste un valore del guadagno K positivo tale da assicurare che tutti i poli del sistema ad anello chiuso siano a parte reale strettamente minore di -1 . Tale valore è determinabile tramite il criterio di Routh applicato al denominatore della funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso

$$p(s, K) = (s + 8)(s - 1)^2 + K(s + 2) = p(s', K) = (s' + 7)(s' - 2)^2 + K(s' + 1)$$

con la sostituzione $s = s' - 1$. Tale criterio porta alla condizione $K > 50$. Il controllore finale sarà pertanto

$$C(s) = K \frac{s + 2}{s + 8}, \quad K > 50$$



Luogo delle radici con il controllore prescelto

Essendo il sistema ad anello aperto provvisto di 2 poli a parte reale positiva, il diagramma di Nyquist, per assicurare la stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso deve compiere 2 giri in senso antiorario intorno al punto $(-1, 0)$ (questo avviene per $K > 49/2$).

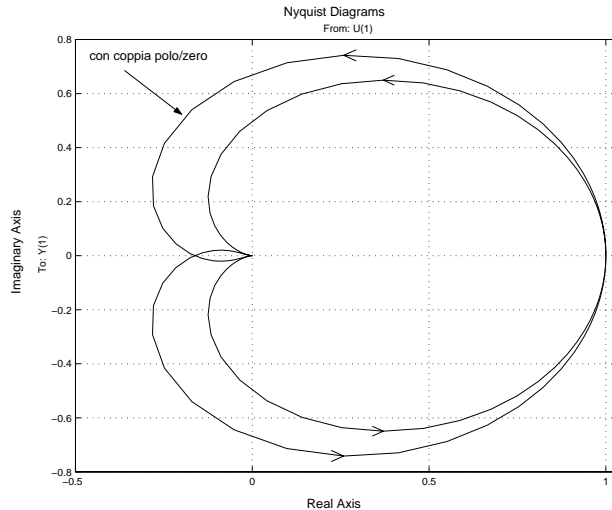


Diagramma di Nyquist prima e dopo l'introduzione della coppia polo/zero (con $K = 4$)

- [2] Per assicurare l'astatismo rispetto a un disturbo agente in ingresso al processo è necessaria l'introduzione di un polo in $s = 0$ nel controllore. Essendo il sistema di controllo a controreazione unitaria, per assicurare l'errore a regime permanente rispetto all'ingresso di riferimento $r(t) = t^2/2$ (ingresso canonico di ordine 2) minore o uguale a 0.1 deve essere

$$e_2 = \frac{1}{K_c} \leq 0.1 \implies K_c \geq 10$$

(se il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente). Indicando con $\hat{P}(s)$ il processo e la parte del controllore finora individuata

$$\hat{P}(s) = \frac{10}{s} \frac{1}{s}$$

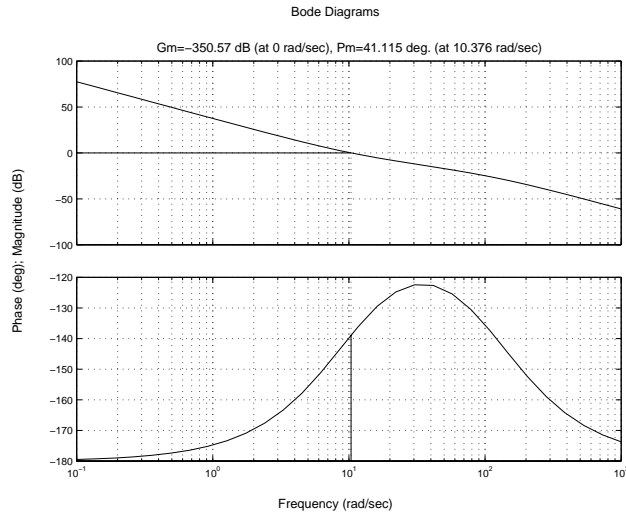
dai diagrammi di Bode della corrispondente risposta armonica si deduce che, alla pulsazione di attraversamento desiderata $\omega_t^* = 10 \text{ rad/sec}$

$$|\hat{P}(j\omega_t^*)|_{dB} = -20dB, \quad \langle \hat{P}(j\omega_t^*) \rangle = -\pi$$

Per ottenere la pulsazione di attraversamento richiesta ed in corrispondenza il margine di fase di almeno 40° si può ad esempio scegliere una funzione anticipatrice $R_a(s)$ con $m_a = 12$ e pulsazione normalizzata $\omega\tau = 1$ (in corrispondenza della quale si hanno 40° e all'incirca 2.5dB) più un ulteriore guadagno di 17.5dB. Complessivamente il controllore è dato da

$$C(s) = \frac{K_c}{s} \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a} s}, \quad K_c|_{dB} = 37.5dB, m_a = 12, \tau_a = 1/10$$

Essendo il sistema in catena diretta privo di poli a parte reale positiva e avendo ottenuto un'unica pulsazione di attraversamento (condizione sufficiente) il margine di fase positivo ottenuto assicura la stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso.



Diagrammi di Bode di $C(j\omega)P(j\omega)$

La funzione di trasferimento riferimento/ingresso di controllo (ingresso al processo) è pari a (funzione di sensitività del controllo)

$$Q(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{sK_c R_a(s)}{s^2 + K_c R_a(s)}$$

A regime permanente si ha (è applicabile il teorema del valore finale)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s u(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s Q(s) r(s) = -3Q(0) = 0$$

[3] Gli autovalori di A sono facilmente calcolabili data la struttura triangolare superiore della matrice e sono pari a

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2/3} = 1$$

e pertanto il sistema è instabile. Per studiare la possibilità di ricostruire asintoticamente lo stato del sistema è necessario studiare l'osservabilità del sistema. La matrice di osservabilità

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

è singolare. In particolare \mathcal{O} ha rango pari a 2 e l'insieme degli stati inosservabili è generato da

$$\mathcal{I} = \text{Ker}(\mathcal{O}) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Per mettere in evidenza la dinamica del sottosistema inosservabile si può scegliere la matrice T , che caratterizza il cambiamento di coordinate, tale che

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dando luogo alle nuove matrici (\tilde{A}, \tilde{C})

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (1 \ 0 \ 0)$$

Essendo la dinamica del sottosistema inosservabile già stabile asintoticamente (autovalore in -1), è possibile individuare un ricostruttore asintotico dello stato. Si noti che era possibile tramite il PBH test effettuare subito questa verifica. Con la nota formula è quindi possibile assegnare gli autovalori desiderati tramite \tilde{G}_1 alla matrice

$$\tilde{A}_{11} - \tilde{G}_1 \tilde{C}_1, \quad \text{con} \quad \tilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_1 = (1 \ 0)$$

e \tilde{A}_{11} e \tilde{C}_1 caratterizzanti il sottosistema osservabile. Ritornando nelle coordinate di partenza si ha

$$G = T^{-1} \tilde{G} = T^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{G}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Infine il ricostruttore asintotico dello stato è caratterizzato dalle equazioni dinamiche

$$\dot{z} = Az + Bu + G(y - Cz) = (A - GC)z + Bu + Gy$$