Compito di Robotica II

Origine: Automazione Industriale, 15 Luglio 1991

[1] ...

[2] A partire dalle equazioni non lineari che descrivono la dinamica di un robot

$$M(q)\ddot{q} + S(q,\dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + e(q) = \tau,$$

ricavare la forma simbolica delle matrici $A(t)$ e $B(t)$ che compaiono nel modello (non stazionario) alle variazioni

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \qquad x = \begin{bmatrix} \Delta q \\ \Delta\dot{q} \end{bmatrix}, \qquad u = \Delta\tau,$$

ottenuto per linearizzazione intorno ad una *traiettoria nominale* $q = q_d(t)$, percorsa con un ingresso $\tau = \tau_d(t)$. Dare inoltre l'espressione delle matrici (costanti) A e B nel caso particolare in cui la traiettoria si riduca ad una configurazione q_d *costante*.

[90 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzione

La linearizzazione del modello dinamico si può effettuare direttamente a partire dalle equazioni differenziali del secondo ordine ponendo, nell'intorno di una traiettoria $q = q_d(t)$,

$$q = q_d + \Delta q, \qquad \dot{q} = \dot{q}_d + \dot{\Delta q}, \qquad \ddot{q} = \ddot{q}_d + \ddot{\Delta q},$$

e

$$\tau = \tau_d + \Delta\tau.$$

Si ha quindi

$$M(q_d+\Delta q)(\ddot{q}_d+\ddot{\Delta q})+S(q_d+\Delta q, \dot{q}_d+\dot{\Delta q})(\dot{q}_d+\dot{\Delta q})+F(\dot{q}_d+\dot{\Delta q})+e(q_d+\Delta q) = \tau_d+\Delta\tau, \quad (1)$$

ed in condizioni nominali, ossia sulla traiettoria desiderata, vale inoltre la relazione

$$M(q_d)\ddot{q}_d + S(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + F\dot{q}_d + e(q_d) = \tau_d. \quad (2)$$

Per un generico vettore z che sia il prodotto di una matrice $A(x)$, di dimensione $n \times n$, per un altro vettore y, è comodo servirsi della cosiddetta forma diadica

$$z = A(x)y = \sum_{i=1}^{n} \left[a_i(x)e_i^{\mathrm{T}}\right] y = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)y_i,$$

dove $a_i(x)$ è l'i-esima colonna di $A(x)$ ed e_i è l'i-esima colonna della matrice identità. La derivata parziale di z rispetto al vettore m-dimensionale x si può allora esprimere come

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i(x)}{\partial x} y_i$$

che risulta essere una matrice $n \times m$. Siano dunque m_i ed s_i le colonne i-esime rispettivamente di $M(q)$ ed $S(q, \dot{q})$. Sviluppando in serie la (1) e trascurando i termini del secondo ordine nelle variazioni si ottiene

$$M(q_d)(\ddot{q}_d + \ddot{\Delta q}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial m_i(q_d)}{\partial q}\ddot{q}_{d,i}\,\Delta q + S(q_d, \dot{q}_d)(\dot{q}_d + \dot{\Delta q}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_i(q_d, \dot{q}_d)}{\partial q}\dot{q}_{d,i}\,\Delta q$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_i(q_d, \dot{q}_d)}{\partial \dot{q}}\dot{q}_{d,i}\,\dot{\Delta q} + F(\dot{q}_d + \dot{\Delta q}) + e(q_d) + \frac{\partial e(q_d)}{\partial q}\Delta q = \tau_d + \Delta\tau,$$

da cui, utilizzando la (2) e raggruppando i termini,

$$M(q_d)\ddot{\Delta q} + \left[F + S(q_d, \dot{q}_d) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_i(q_d, \dot{q}_d)}{\partial \dot{q}}\dot{q}_{d,i}\right]\dot{\Delta q}$$
$$+ \left[\frac{\partial e(q_d)}{\partial q} + \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial s_i(q_d, \dot{q}_d)}{\partial q}\dot{q}_{d,i} + \frac{\partial m_i(q_d)}{\partial q}\ddot{q}_{d,i}\Big)\right]\Delta q = \Delta\tau.$$

Posto

$$x = \begin{bmatrix} \Delta q \\ \dot{\Delta q} \end{bmatrix}, \qquad u = \Delta\tau,$$

si ottengono le equazioni lineari tempo-varianti (non stazionarie)

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2(t) \end{bmatrix} u, \tag{3}$$

dove

$$\begin{aligned}
A_{21}(t) &= -M^{-1}(q_d(t)) \left[\frac{\partial e(q_d(t))}{\partial q} + \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial s_i(q_d(t), \dot{q}_d(t))}{\partial q} \dot{q}_{d,i}(t) + \frac{\partial m_i(q_d(t))}{\partial q} \ddot{q}_{d,i}(t) \Big) \right], \\
A_{22}(t) &= -M^{-1}(q_d(t)) \left[F + S(q_d(t), \dot{q}_d(t)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_i(q_d(t), \dot{q}_d(t))}{\partial \dot{q}} \dot{q}_{d,i}(t) \right], \\
B_2(t) &= M^{-1}(q_d(t)).
\end{aligned}$$

Nel caso di linearizzazione intorno ad un punto $q = q_d$, si ha $\dot{q}_d = \ddot{q}_d \equiv 0$ e la (3) si semplifica in

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}(q_d) \dfrac{\partial e(q_d)}{\partial q} & -M^{-1}(q_d) F \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q_d) \end{bmatrix} u, \tag{4}$$

ossia in un sistema lineare stazionario.

Un procedimento alternativo è quello di porre le equazioni non lineari originarie in forma di spazio di stato, con

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \qquad u = \tau,$$

da cui

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -M^{-1}(x_1) \big[S(x_1, x_2) x_2 + F x_2 + e(x_1) \big] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(x_1) \end{bmatrix} u = f(x) + g(x)u. \tag{5}$$

Posto quindi

$$x = x_d + \Delta x, \qquad u = u_d + \Delta u, \qquad \dot{x}_d = f(x_d) + g(x_d) u_d,$$

lo sviluppo linearizzato di (5) fornisce

$$\dot{\Delta x} = \left[\frac{\partial f(x_d)}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i(x_d)}{\partial x} u_{d,i} \right] \Delta x + g(x_d) \Delta u. \tag{6}$$

Si noti che le equazioni lineari (6) sono identiche alle (3). Tuttavia la loro esplicitazione in termini di elementi del modello dinamico del robot risulta notevolmente più complessa. Per ritrovare le espressioni in (3) a partire dalla (6), si ricordi che sussiste la seguente identità tra derivate di una matrice e della sua inversa

$$\frac{\partial A^{-1}(x)}{\partial x_i} = -A^{-1}(x) \frac{\partial A(x)}{\partial x_i} A^{-1}(x).$$

■