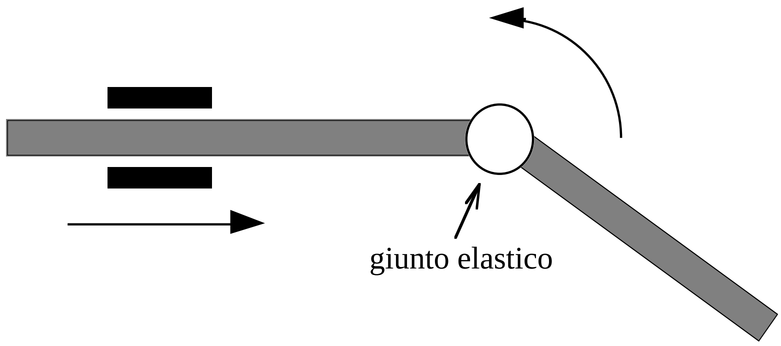
Compito di Robotica II

Origine: Automazione Industriale, 17 Ottobre 1991

Si consideri il robot illustrato in figura, il cui movimento avviene in un piano verticale. Il primo giunto è prismatico con asse parallelo al piano orizzontale, mentre il secondo giunto è rotatorio con accoppiamento elastico tra asse del motore e braccio, caratterizzato da una costante di elasticità k. Si indichi con J_m l'inerzia del secondo motore.



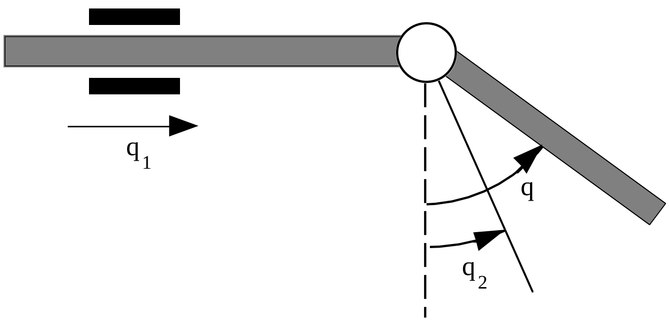
[1] Determinare il modello dinamico del robot in forma lagrangiana.

[2] Individuare il numero minimo e la costituzione dei parametri dinamici rispetto ai quali il modello così ottenuto è lineare.

[90 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzione

Siano m_1 ed m_2 le masse dei due bracci, m_m la massa del secondo motore, d_2 la distanza del baricentro del secondo braccio dall'asse di rotazione dello stesso, J_m l'inerzia del secondo motore rispetto al suo asse di rotazione, I_ℓ l'inerzia del secondo braccio rispetto al proprio baricentro, u_1 e u_2 le forze generalizzate. Le coordinate generalizzate sono definite come in figura.



L'energia cinetica complessiva è pari a

$$T = \frac{1}{2}(m_1+m_m)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}J_m\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{q}_1 + d_2\dot{q}_3\cos q_3)^2 + \frac{1}{2}m_2(d_2\dot{q}_3\sin q_3)^2 + \frac{1}{2}I_\ell\dot{q}_3^2.$$

Indicando con J_ℓ l'inerzia del secondo braccio rispetto al proprio asse di rotazione

$$J_\ell = I_\ell + m_2 d_2^2,$$

l'energia cinetica può essere riscritta come

$$T = \frac{1}{2}\left[(m_1+m_2+m_m)\dot{q}_1^2 + J_m\dot{q}_2^2 + J_\ell\dot{q}_3^2 + 2m_2d_2\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_3\right].$$

Nell'energia potenziale è presente, oltre al contributo della gravità sul secondo braccio, anche un termine di energia potenziale elastica, cioè

$$U = \frac{1}{2}k(q_3 - q_2)^2 - m_2d_2g\cos q_3.$$

Il Lagrangiano è definito come $\mathcal{L} = T - U$. Usando l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = v_i, \qquad i = 1, \ldots, 3,$$

si ottiene il seguente modello dinamico

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{q} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{e}(\mathbf{q}) = \mathbf{v},$$

con

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1+m_2+m_m & 0 & m_2 d_2 \cos q_3 \\ 0 & J_m & 0 \\ m_2 d_2 \cos q_3 & 0 & J_\ell \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -m_2 d_2 \dot{q}_3^2 \sin q_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 d_2 g \sin q_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si scelga come vettore dei parametri

$$\mathbf{a}^T = [\,(m_1+m_2+m_m) \quad m_2 d_2 \quad J_m \quad J_\ell \quad k\,]^T .$$

Il modello dinamico può essere espresso nella forma

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{q} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{e}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{q})\mathbf{a},$$

con

$$\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \ddot{q}_3 \cos q_3 - \dot{q}_3^2 \sin q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{q}_2 & 0 & q_2 - q_3 \\ 0 & \ddot{q}_1 \cos q_3 + g \sin q_3 & 0 & \ddot{q}_3 & q_3 - q_2 \end{bmatrix}.$$