Prova Scritta di Robotica II

10 Settembre 2009

Esercizio 1

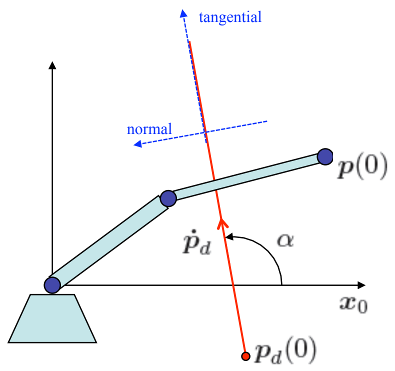

Figura 1: Inseguimento di traiettoria rettilinea cartesiana con un robot $2R$

Sia dato un robot $2R$ in moto su un piano verticale, il cui modello dinamico è nella forma usuale

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau}.$$

Con riferimento alla Figura 1, alla posizione $\boldsymbol{p}$ dell'organo terminale è assegnato un moto desiderato $\boldsymbol{p}_d(t)$ su traiettoria rettilinea con legge oraria trapezoidale in velocità. Il cammino rettilineo, considerato nel verso della velocità desiderata $\dot{\boldsymbol{p}}_d(t)$, forma un angolo α rispetto all'asse $\boldsymbol{x}_0$. In $t = 0$ il robot è fermo e la posizione iniziale dell'organo terminale non è agganciata alla traiettoria desiderata, $\boldsymbol{p}(0) \neq \boldsymbol{p}_d(0)$. Progettare una legge di controllo in feedback per $\boldsymbol{\tau}$ con le seguenti caratteristiche: *i)* l'errore di traiettoria converge *esponenzialmente* a zero; *ii)* la dinamica di tale errore risulta *disaccoppiata* nelle direzioni tangenziale e normale rispetto al cammino desiderato.

Esercizio 2

Si richiede ad un robot planare a n giunti disposto sul piano orizzontale di eseguire una traiettoria di giunto $\boldsymbol{q}_d(t) \in C^2$ di durata pari a T secondi. Le coppie necessarie $\boldsymbol{\tau}_d(t)$, definite per $t \in [0, T]$, risultano però eccessive rispetto ai limiti imposti dagli attuatori, che sono espressi dalle $|\tau_i| \leq U_i$, $i = 1, \ldots, n$. La massima violazione avviene in un istante $\bar{t} \in [0, T]$ al giunto j, con $j \in \{1, \ldots, n\}$, e tale coppia è superiore del 50% rispetto al limite ammissibile: $|\tau_{d,j}(\bar{t})| = 1.5\, U_j$. La legge oraria della traiettoria originale può però essere *uniformemente scalata* nel tempo, $t \to t' = kt$ con $k > 1$, ottenendo una nuova traiettoria $\boldsymbol{q}'(t')$ di durata $T' = kT > T$. La nuova traiettoria traccerà la stessa sequenza di configurazioni (cammino nei giunti) ma in istanti ritardati, ossia si avrà

$$\boldsymbol{q}'(t') = \boldsymbol{q}_d(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Qual è il minimo fattore $k > 1$ di scalatura uniforme della legge oraria che permette di recuperare l'ammissibilità delle nuove coppie $\boldsymbol{\tau}'(t')$ su tutto l'intervallo $[0, T']$ di moto? Motivare la risposta tenendo conto che la scalatura uniforme rende le nuove velocità pari a

$$\dot{\boldsymbol{q}}'(t') = \frac{d\boldsymbol{q}'}{dt'} = \frac{d\boldsymbol{q}'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{k}\frac{d\boldsymbol{q}_d}{dt} = \frac{1}{k}\dot{\boldsymbol{q}}_d(t), \quad \forall t \in [0, T],$$

e sfruttando inoltre le proprietà del modello dinamico dei robot.

[120 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzioni

10 Settembre 2009

Esercizio 1

In linea di principio occorre definire il modello dinamico del robot nello spazio del compito, che è quello planare cartesiano ruotato dell'angolo costante α. Si utilizzano quindi le coordinate generalizzate (valide eccetto nelle configurazioni singolari del manipolatore)

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{R}^T(\alpha)\,\boldsymbol{p}, \qquad \text{con} \quad \boldsymbol{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Le due componenti di $\boldsymbol{t}$ sono infatti quelle posizionali dell'organo terminale lette lungo la tangente e la normale al cammino rettilineo. In modo analogo, si utilizza l'espressione della traiettoria desiderata in tali coordinate

$$\boldsymbol{t}_d(t) = \boldsymbol{R}^T(\alpha)\,\boldsymbol{p}_d(t)$$

e il relativo errore

$$\boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{t}_d - \boldsymbol{t} = \boldsymbol{R}^T(\alpha)(\boldsymbol{p}_d - \boldsymbol{p}),$$

le cui componenti sono rispettivamente l'errore di posizione tangenziale e quello normale al cammino rettilineo. Si procede quindi applicando un controllo nonlineare disaccoppiante e linearizzante in tali coordinate ottenendo il risultato cercato.

Allo stesso risultato si arriva però in maniera più diretta considerando dapprima la legge di controllo disaccoppiante e linearizzante nello spazio dei giunti

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}),$$

con $\boldsymbol{a}$ da determinare. Il sistema è così reso equivalente a $\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{a}$, dove si è cancellata la presenza di tutti i termini dinamici. Si ha poi

$$\dot{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{R}^T(\alpha)\,\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{R}^T(\alpha)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}, \qquad \ddot{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{R}^T(\alpha)\,\ddot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{R}^T(\alpha)\left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{a} + \dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\right),$$

dove $\boldsymbol{J}$ è lo Jacobiano del robot. Posto allora

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q})\left(\boldsymbol{R}(\alpha)\boldsymbol{a}_t - \dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\right),$$

si ottiene $\ddot{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{a}_t$. La sintesi del controllore si completa scegliendo

$$\boldsymbol{a}_t = \ddot{\boldsymbol{t}}_d + \boldsymbol{K}_D(\dot{\boldsymbol{t}}_d - \dot{\boldsymbol{t}}) + \boldsymbol{K}_P(\boldsymbol{t}_d - \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{R}^T(\alpha)\ddot{\boldsymbol{p}}_d + \boldsymbol{K}_D\boldsymbol{R}^T(\alpha)(\dot{\boldsymbol{p}}_d - \dot{\boldsymbol{p}}) + \boldsymbol{K}_P\boldsymbol{R}^T(\alpha)(\boldsymbol{p}_d - \boldsymbol{p})$$

con $\boldsymbol{K}_P$ e $\boldsymbol{K}_D$ matrici *diagonali* definite positive. La dinamica risultante per l'errore di traiettoria nello spazio del compito

$$\ddot{\boldsymbol{e}}_t + \boldsymbol{K}_D\dot{\boldsymbol{e}}_t + \boldsymbol{K}_P\boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{0}$$

è lineare e converge esponenzialmente a zero in modo disaccoppiato sulle componenti. La legge di controllo complessiva è dunque:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} \; = \; & \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\left(\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q})\left(\ddot{\boldsymbol{p}}_d + \boldsymbol{R}(\alpha)\boldsymbol{K}_D\boldsymbol{R}^T(\alpha)(\dot{\boldsymbol{p}}_d - \dot{\boldsymbol{p}}) + \boldsymbol{R}(\alpha)\boldsymbol{K}_P\boldsymbol{R}^T(\alpha)(\boldsymbol{p}_d - \boldsymbol{p}) - \dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\right)\right) \\ & + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}). \end{aligned} \tag{1}$$

Si noti che l'accelerazione desiderata non deve essere modificata, a differenza di quanto avviene per gli *errori* cartesiani di posizione e velocità. Senza l'introduzione della rotazione con $\boldsymbol{R}^T(\alpha)$ si sarebbe ottenuto lo stesso risultato di disaccoppiamento *solamente* se si fosse scelto

$$\boldsymbol{K}_P = k_P \cdot \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{K}_D = k_D \cdot \boldsymbol{I},$$

ossia con guadagni uguali in tutte le direzioni (isotropia). Nella (1) è invece possibile assegnare guadagni e quindi dinamiche di errore diverse nelle direzioni tangenziale e normale al cammino.

Esercizio 2

Il fattore di scalatura è $k = 1.225$ (arrotondato per eccesso). Infatti, a partire dalla formula sulle velocità fornita nel testo, per le nuove accelerazioni si ha

$$\ddot{\boldsymbol{q}}'(t') = \frac{d}{dt'}\left(\frac{d\boldsymbol{q}'}{dt'}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{k}\,\dot{\boldsymbol{q}}_d(t)\right)\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{k^2}\,\ddot{\boldsymbol{q}}_d(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Dalla dinamica inversa, la coppia necessaria per eseguire la traiettoria originale $\boldsymbol{q}_d(t)$ è data da

$$\boldsymbol{\tau}_d(t) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}_d(t))\,\ddot{\boldsymbol{q}}_d(t) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{q}_d(t), \dot{\boldsymbol{q}}_d(t)), \qquad t \in [0, T],$$

essendo $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \equiv \boldsymbol{0}$ per un moto nel piano orizzontale. Poichè il modello dinamico dei robot dipende linearmente dalle accelerazioni e in modo quadratico dalle velocità (nei termini di Coriolis/centrifughi $\boldsymbol{c}$), per eseguire la nuova traiettoria scalata $\boldsymbol{q}'(t')$ per $t' \in [0, kT]$ sarà necessaria la coppia

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}'(t') &= \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}'(t'))\,\ddot{\boldsymbol{q}}'(t') + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{q}'(t'), \dot{\boldsymbol{q}}'(t')) \\
&= \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}_d(t))\,\frac{1}{k^2}\,\ddot{\boldsymbol{q}}_d(t) + \boldsymbol{c}(\dot{\boldsymbol{q}}_d(t), \frac{1}{k}\,\dot{\boldsymbol{q}}_d(t)) \\
&= \frac{1}{k^2}\left(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}_d(t))\ddot{\boldsymbol{q}}_d(t) + \boldsymbol{c}(\dot{\boldsymbol{q}}_d(t), \dot{\boldsymbol{q}}_d(t))\right) = \frac{1}{k^2}\,\boldsymbol{\tau}_d(t), \qquad t \in [0, T].
\end{aligned}$$

I valori di tutte le componenti della nuova coppia nell'istante $t' = kt$ saranno uniformemente scalate (ridotte) del fattore k^2 rispetto a quelli originari nell'istante t. Poiché la massima violazione dei vincoli di coppia si aveva al giunto j nell'istante $\bar{t}$, basterà far rientrare nel limite di saturazione la nuova coppia al giunto j (in corrispondenza dell'istante scalato $\bar{t}' = k\bar{t}$) per ottenere l'ammissibilità di tutte le coppie in tutti gli istanti. Imponendo quindi

$$|\tau_j'(\bar{t}')| = \frac{1}{k^2}\,|\tau_j(\bar{t})| = \frac{1}{k^2}\cdot 1.5\,U_j = U_j,$$

ne segue che $k = \sqrt{1.5} \approx 1.225$.

* * * * *