



Corso di Robotica 2

Controllo di impedenza

Prof. Alessandro De Luca

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA
E SISTEMISTICA ANTONIO RUBERTI



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Controllo di impedenza

- assegna un **comportamento dinamico** desiderato all'interazione fra end-effector e ambiente
- le prestazioni sono specificate mediante un'**impedenza dinamica generalizzata**, ossia un set completo di equazioni **massa-molla-smorzatore** (di solito lineari e disaccoppiate, ma anche nonlineari)
- non richiede un modello esplicito delle forze di reazione dovute alla deformazione dell'ambiente al contatto
- adatto a compiti in cui **le forze di contatto devono essere mantenute "piccole"**, ma non ne è richiesta una regolazione accurata
- in assenza di un anello di controreazione di **forza**, quest'ultima è **controllata indirettamente, controllando la posizione**
- la scelta della rigidezza nel modello di impedenza porta a un compromesso fra forza di contatto e accuratezza del posizionamento



Modello dinamico di robot in contatto

$$N = M$$

$$B(q)\ddot{q} + S(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = u + J^T(q)F$$

forza generalizzata
cartesiana

forze lineari

$$F = \begin{pmatrix} \gamma \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^M$$

momenti angolari

$$J_a(q) = \frac{df(q)}{dq}$$

$$= T_a(\phi)J(q) \Rightarrow \dot{x} = T_a(\phi)v$$

Jacobiano
"geometrico"

$$v = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{pmatrix}$$

velocità angolare

Jacobiano
"analitico"

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = J_a(q)\dot{q}$$

derivata angoli
Eulero

$$B(q)\ddot{q} + S(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = u + J_a^T(q)F_a$$

$$\text{con } F_a = T_a^{-T}(\phi)F$$

forze generalizzate che compiono lavoro sulle \dot{x}

Modello dinamico in coordinate cartesiane



$$B_x(q)\ddot{x} + S_x(q, \dot{q})\dot{x} + g_x(q) = J_a^{-T}(q)u + F_a$$

con

$$B_x(q) = J_a^{-T}(q)B(q)J_a^{-1}(q)$$

$$S_x(q, \dot{q}) = J_a^{-T}(q)S(q, \dot{q})J_a^{-1}(q) - B_x(q)J_a(q, \dot{q})J_a^{-1}(q)$$

$$g_x(q) = J_a^{-T}(q)g(q)$$

...e le usuali proprietà strutturali

- $B_x(q) > 0$ se $J_a(q)$ è non singolare
- $\dot{B}_x - 2S_x$ antisimmetrica, se lo è $\dot{B} - 2S$
- il modello dinamico è lineare rispetto a un set di coefficienti dinamici



Legge di controllo

disegnata in **due passi**:

1. **feedback linearizzazione** nello spazio cartesiano

$$u = J_a^T(q) [B_x(q)a + S_x(q, \dot{q})\dot{x} + g_x(q) - F_a]$$

→ $\ddot{x} = a$ modello ad anello chiuso

2. imposizione di un **modello di impedenza** dinamica

tipicamente è
disaccoppiato
(matrici diagonali)

$$B_m(\ddot{x} - \ddot{x}_d) + D_m(\dot{x} - \dot{x}_d) + K_m(x - x_d) = F_a$$

↑
inerzia
apparente (> 0)

↑
smorzamento
desiderato (≥ 0)

↑
rigidezza
desiderata (> 0)

←
forze esterne
dall'ambiente

ottenuto con

$$a = \ddot{x}_d + B_m^{-1} [D_m(\dot{x}_d - \dot{x}) + K_m(x_d - x) + F_a]$$

N.B. $x_d(t)$ è un moto desiderato che tipicamente "entra di poco"
nell'ambiente **cedevole** (mantenendo così il contatto)...



Controllo in coordinate di giunto

sostituendo e semplificando...

$$u = B(q)J_a^{-1}(q)\left\{\ddot{x}_d - \dot{J}_a(q)\dot{q} + B_m^{-1}\left[D_m(\dot{x}_d - \dot{x}) + K_m(x_d - x)\right]\right\} \\ + S(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + J_a^T(q)\underbrace{\left[B_x(q)B_m^{-1} - I\right]}_{\text{matrice di peso delle forze di contatto}}F_a$$

matrice di peso delle forze di contatto

N.B.1 vale inoltre l'identità sul termine con la misura delle forze di contatto

$$J_a^T(q)\left[B_x(q)B_m^{-1} - I\right]F_a = \left[B(q)J_a^{-1}(q)B_m^{-1} - J_a^T(q)\right]F_a$$

che **elimina** dalla legge di controllo la restante matrice di inerzia cartesiana del modello (cfr. l'espressione sul libro di testo)

N.B.2 il **progetto** si basa sull'analisi della dinamica e del comportamento desiderato (impedenza) descritte nello **spazio cartesiano**, ma **l'implementazione** finale del controllo è sempre **a livello dei giunti**



Scelta del modello di impedenza

fatta in modo da...

- evitare elevate forze d'impatto dovute all'incertezza nelle caratteristiche geometriche (posizione, orientamento) dell'ambiente
- adattarsi alle caratteristiche dinamiche (in particolare, la rigidità) dell'ambiente in modo "complementare"
- imitare il comportamento di un "braccio umano"
 - veloce e rigido nel moto libero, lento e cedevole nel moto "prudente"



- grandi $B_{m,i}$ e piccole $K_{m,i}$ nelle direzioni cartesiane dove è previsto il contatto (→ basse forze)
- grandi $K_{m,i}$ e basse $B_{m,i}$ nelle direzioni cartesiane che sono supposte libere (→ buon inseguimento di traiettoria)
- più è rigido l'ambiente, più basso si sceglie il coefficiente di rigidità
- i coefficienti di smorzamento $D_{m,i}$ modificano solo il regime transitorio



Una notevole semplificazione - 1

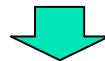
si scelga l'inerzia apparente pari alla naturale inerzia cartesiana del robot

$$B_m = B_x(q) = J_a^T(q)B(q)J_a^{-1}(q)$$

la legge di controllo diventa

$$u = B(q)J_a^{-1}(q)\left[\ddot{x}_d - \dot{J}_a(q)\dot{q}\right] + S(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) \\ + J_a^T(q)\left[D_m(\dot{x}_d - \dot{x}) + K_m(x_d - x)\right]$$

SENZA retroazione di forza! (non serve un sensore...)



di fatto è puro controllo del moto nell'interazione, finalizzato a mantenere limitate forze di contatto all'end-effector (come prima, K_m scelta in funzione dell'ambiente)



Una notevole semplificazione - 2

affinché il modello di impedenza (ora non lineare) rappresenti ancora un sistema meccanico **reale**, ad una matrice d'inerzia **non costante** ($B_x(q)$) devono essere associati i relativi termini di **Coriolis e centrifughi** ...

$$\rightarrow B_x(q) (\ddot{x} - \ddot{x}_d) + (S_x(q, \dot{q}) + D_m)(\dot{x} - \dot{x}_d) + K_m(x - x_d) = F_a$$

modello **non lineare** di impedenza (scompaiono "solo" i termini di gravità)

ripetendo i calcoli, la legge di controllo diventa allora

$$u = B(q) J_a^{-1}(q) \left[\ddot{x}_d - \dot{J}_a(q) J_a^{-1}(q) \dot{x}_d \right] + S(q, \dot{q}) J_a^{-1}(q) \dot{x}_d + g(q) + J_a^T(q) \left[D_m(\dot{x}_d - \dot{x}) + K_m(x_d - x) \right]$$

che risulta leggermente più complessa, ma con i seguenti vantaggi:

- garanzia di convergenza asintotica ad **errore nullo di traiettoria** (su $x_d(t)$) **quando** $F_a = 0$ (distacco dal contatto) \Rightarrow Lyapunov + anti-simmetria $\dot{B}_x - 2S_x$
- semplificazione ulteriore **quando** x_d è costante

Regolazione cartesiana

(in assenza di contatto, $F_a = 0$)



per x_d costante ($\dot{x}_d = 0$, $\ddot{x}_d = 0$), dalla precedente espressione si ottiene la legge di controllo

$$u = g(q) + J_a^T(q) [K_m(x_d - x) - D_m \dot{x}] \quad (*)$$

PD cartesiano con compensazione della gravità...

quando $F_a = 0$ (assenza di contatto), sappiamo che questa legge assicura la **stabilità asintotica di x_d** se $J_a(q)$ ha **rango pieno**

prova
(alternativa)

candidata di Lyapunov $V_1 = \frac{1}{2} \dot{x}^T B_x(q) \dot{x} + \frac{1}{2} (x_d - x)^T K_m (x_d - x)$

$$\dot{V}_1 = \dot{x}^T B_x(q) \ddot{x} + \frac{1}{2} \dot{x}^T \dot{B}_x(q) \dot{x} - \dot{x}^T K_m (x_d - x) = \dots = -\dot{x}^T D_m \dot{x} \leq 0$$

usando l'antisimmetria di $\dot{B}_x - 2S_x$ e $g_x = J_a^{-T} g$

Controllo attivo di cedevolezza (in contatto, $F_a \neq 0$)



se $F_a \neq 0$, la convergenza a x_d non è assicurata
(di fatto non è neanche un punto di equilibrio...)

- per l'analisi, si assuma un **modello elastico** (in contatto) dell'ambiente

$$F_a = K_e(x_e - x) \quad \text{con rigidezza } K_e \geq 0 \text{ e posizione di riposo } x_e$$

- analisi del sistema ad anello chiuso

candidata di Lyapunov

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{2} \dot{x}^T B_x(q) \dot{x} + \frac{1}{2} (x_d - x)^T K_m (x_d - x) + \frac{1}{2} (x_e - x)^T K_e (x_e - x) \\ &= V_1 + \frac{1}{2} (x_e - x)^T K_e (x_e - x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{x}^T B_x(q) \ddot{x} + \frac{1}{2} \dot{x}^T \dot{B}_x(q) \dot{x} - \dot{x}^T K_m (x_d - x) - \dot{x}^T K_e (x_e - x) \\ &= \dots = -\dot{x}^T D_m \dot{x} + \dot{x}^T (F_a - K_e (x_e - x)) = -\dot{x}^T D_m \dot{x} \leq 0 \end{aligned}$$



Analisi della stabilità (con $F_a \neq 0$)

per $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ si ha all'equilibrio ad anello chiuso

$K_m(x_d - x) + K_e(x_e - x) = 0$, che ha l'**unica** soluzione

$$x = (K_m + K_e)^{-1} (K_m x_d + K_e x_e) =: x_E$$

(dove la candidata di Lyapunov V_2 ha un effettivo **minimo!!**)

LaSalle \rightarrow x_E equilibrio **asintoticamente stabile**

$$x_E \approx \begin{cases} x_e \text{ per } K_e \gg K_m \text{ (ambiente rigido)} \\ x_d \text{ per } K_m \gg K_e \text{ (controllore rigido)} \end{cases}$$

N.B. la legge (*) viene chiamata **compliance control** in letteratura



Equivalente "attivo" del RCC

SE ■ gli spostamenti dalla posizione desiderata x_d sono **piccoli**, ovvero

$$(x_d - x) \approx J_a(q_d - q)$$

- $g(q) = 0$ (gravità compensata, ad es. meccanicamente)
- $D_m = 0$

ALLORA

$$u = J_a^T(q) K_m J_a(q) (q_d - q) = K_x(q) (q_d - q)$$



la **rigidezza variabile** $K_x(q)$ ai giunti corrisponde a una **rigidezza cartesiana** K_m **costante** (e **viceversa**)

controparte **attiva** del Remote Center of Compliance (RCC)