



---

## *Corso di Robotica 2*

# Controllo Adattativo

Prof. Alessandro De Luca

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA  
E SISTEMISTICA ANTONIO RUBERTI



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA



# Motivazioni e approccio

---

- necessità dell'adattamento nella legge di controllo
  - incertezza sui parametri dinamici del robot
  - scarsa conoscenza del carico
- caratteristiche del controllo adattativo
  - riduzione a zero dell'errore di traiettoria
  - senza necessaria identificazione dei parametri  
(= controllo adattativo diretto)
- metodologia
  - parametrizzazione lineare della dinamica del robot
  - legge di controllo non lineare di tipo dinamico



# Parametri meccanici del robot

- parametri assunti **noti**
  - descrizione cinematica con i parametri di Denavit-Hartenberg  $\{\alpha_i, d_i, a_i, i = 1, \dots, N\}$  (caso giunti tutti rotatori), tra cui le lunghezze dei bracci (calibrazione cinematica)
- parametri **incerti identificabili** fuori linea
  - masse  $m_i$ , posizioni  $r_{ci}$  dei baricentri e matrici d'inerzia  $I_i$  dei singoli bracci nelle loro combinazioni (coefficienti)  $\Rightarrow 10 \times N$
- parametri **variabili (lentamente)** nel funzionamento
  - attrito viscoso  $F_{vi}$ , secco  $F_{si}$ , di primo distacco  $F_{Di}$  per ogni giunto  $\Rightarrow 1 \div 3 \times N$
- parametri **incogniti**
  - massa, baricentro, momenti d'inerzia del carico rispetto alla pinza



quando il carico è **solidale** con l'ultimo braccio, si modificano solo i 10 parametri ad esso relativi (con influenza però su tutta la dinamica!)



# Obiettivi del controllo adattativo

- data un'arbitraria traiettoria  $q_d(t)$  desiderata
  - eventuale inversione cinematica + interpolazione ai giunti
  - note anche velocità  $\dot{q}_d(t)$  ed accelerazione  $\ddot{q}_d(t)$  desiderate
- si vuole eseguire la traiettoria
  - con un errore transitorio che si annulla **asintoticamente**

$$e = q_d - q \rightarrow 0 \quad \dot{e} = \dot{q}_d - \dot{q} \rightarrow 0$$

- garantendo **globalmente** tale comportamento, con stime iniziali dei parametri incogniti ed errore di stato iniziale entrambi arbitrari
- non sempre interessa identificare i parametri
- se la traiettoria è a **eccitazione persistente**, si ha anche identificazione
- con schemi di controllo adattativo **indiretto** si può garantire la convergenza dei coefficienti dinamici ai valori veri



# Parametrizzazione lineare

$$B(q)\ddot{q} + S(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + F_v\dot{q} + F_s \operatorname{sgn}(\dot{q}) = u$$

trascurato  
nel seguito

- esiste sempre un **vettore  $a$**  (p-dimensionale) di **coefficienti dinamici** rispetto ai quali il modello è **lineare**

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) a = u$$

- il vettore  **$a$**  contiene solo parametri incogniti o incerti
- le componenti di  **$a$**  sono in generale **combinazioni** dei parametri fisici (non necessariamente tutti)
- dipendenza della **matrice  $Y$  di regressione**: lineare da  $\ddot{q}$ , quadratico da  $\dot{q}$ , trigonometrico (nonlineare) da  $q$



# Controllori di traiettoria basati su stime

- controllo (**lineare**) in avanti a dinamica inversa + PD

$$u = \widehat{B}(q_d)\ddot{q}_d + \widehat{S}(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + \widehat{g}(q_d) + \widehat{F}_v\dot{q}_d + K_P e + K_D \dot{e}$$

- controllo (**non lineare**) con feedback linearization

$$u = \widehat{B}(q)(\ddot{q}_d + K_P e + K_D \dot{e}) + \widehat{S}(q, \dot{q})\dot{q} + \widehat{g}(q) + \widehat{F}_v\dot{q}$$

$$\widehat{B}, \widehat{S}, \widehat{g}, \widehat{F}_v \iff \text{stima } \widehat{a}$$

- stime approssimate dei coefficienti dinamici possono anche indurre **instabilità** per una parziale o inappropriata cancellazione delle nonlinearità
- rendere **adattativi** questi due schemi **non è banale**



# Uno schema più semplice da "adattare"

- controllo (non lineare) di traiettoria senza cancellazioni e con caratteristiche di globale asintotica stabilizzazione

$$u = \hat{B}(q)\ddot{q}_d + \hat{S}(q, \dot{q})\dot{q}_d + \hat{g}(q) + \hat{F}_v\dot{q}_d + K_P e + K_D \dot{e}$$

- una naturale **versione adattativa** richiederebbe

$$\dot{\hat{a}} = \text{un'opportuna legge di aggiornamento...}$$

(a tempo continuo)

- è facile mostrare che si riesce ad "agganciare" la traiettoria desiderata (errore nullo **in velocità**), ma in generale può rimanere un errore residuo **in posizione**
- **modifica in linea del riferimento di velocità**

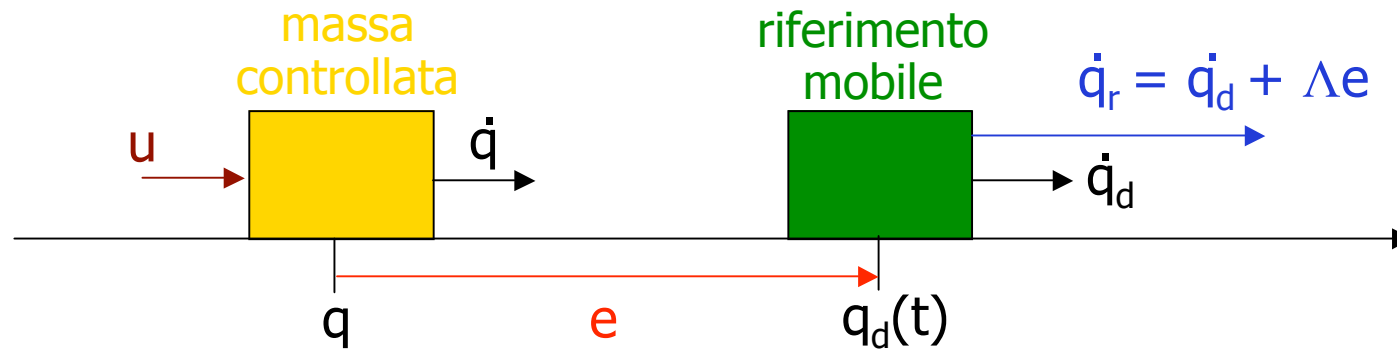
$$\dot{q}_d \longrightarrow \boxed{\dot{q}_r = \dot{q}_d + \Lambda(q_d - q)} \quad \Lambda > 0$$

tipicamente  $\Lambda = K_D^{-1} K_P$  (tutte matrici **diagonali**)



# Interpretazione di $\dot{q}_r$

- caso elementare
  - massa in moto lineare *'in ritardo'*



➔ errore *'amplificato'* di velocità  $s = \dot{q}_r - \dot{q} > \dot{q}_d - \dot{q} = \dot{e}$

$$u = K_D s = K_D (\dot{q}_r - \dot{q}) = K_D (\dot{q}_d + \Lambda e - \dot{q}) = K_D \dot{e} + \underbrace{K_D \Lambda e}_{K_P}$$

- massa in moto lineare *'in anticipo'*

➔ in modo speculare, ci sarà un errore *'ridotto'* di velocità ( $s < \dot{e}$ )





# Legge di controllo adattativa

- sostituendo  $\dot{q}_r = \dot{q}_d + \Lambda e$ ,  $\ddot{q}_r = \ddot{q}_d + \Lambda \dot{e}$  nella precedente espressione del controllore di traiettoria

$$\begin{aligned} u &= \widehat{B}(q)\ddot{q}_r + \widehat{S}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \widehat{g}(q) + \widehat{F}_v\dot{q}_r + K_P e + K_D \dot{e} \\ &= Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \widehat{a} + K_P e + K_D \dot{e} \end{aligned}$$

dinamica parametrica  
con le stime correnti  
(notare i 4 argomenti in Y!)

stabilizzazione PD  
(matrici diagonali,  $>0$ )

- legge di aggiornamento dei coefficienti dinamici ( $\widehat{a}$  è lo stato  $p$ -dimensionale del controllore dinamico)

$$\dot{\widehat{a}} = \Gamma Y^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) (\dot{q}_r - \dot{q})$$

$\Gamma > 0$  (diagonale)

guadagni dello stimatore  
(rapidità di variazione delle stime)



# Stabilità asintotica dell'errore di traiettoria

## Teorema

con il controllore adattativo precedente, l'errore di inseguimento della traiettoria desiderata è **globalmente asintoticamente stabile**

$$e = q_d - q \rightarrow 0, \quad \dot{e} = \dot{q}_d - \dot{q} \rightarrow 0$$

## Dimostrazione

- **candidata di Lyapunov** per lo stato del sistema ad anello chiuso (robot + controllore dinamico)

$$V = \frac{1}{2} s^T B(q) s + \frac{1}{2} e^T R e + \frac{1}{2} \tilde{a}^T \Gamma^{-1} \tilde{a} \geq 0$$

$$s = \dot{q}_r - \dot{q} (= \dot{e} + \Lambda e) \quad R > 0 \quad \tilde{a} = a - \hat{a}$$

errore 'modificato' di velocità      matrice costante  
(ancora da specificare)      errore di stima  
parametrica

$$V = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{a} = a \quad \& \quad q = q_d, \quad s = 0 \quad (\Rightarrow \quad \dot{q} = \dot{q}_d)$$



## Dimostrazione (cont)

- la **derivata** temporale di  $V$  è

$$\dot{V} = \frac{1}{2} s^T \dot{B}(q) s + s^T \underbrace{B(q) \dot{s}} + e^T R \dot{e} - \tilde{a}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{a}}$$

essendo  $\dot{\tilde{a}} = -\dot{\hat{a}}$  ( $\dot{a} = 0$ )

- ad anello chiuso**, si ha la dinamica

$$\begin{aligned} B(q) \ddot{q} + S(q, \dot{q}) \dot{q} + F_v \dot{q} + g(q) &= \\ &= \hat{B}(q) \ddot{q}_r + \hat{S}(q, \dot{q}) \dot{q}_r + \hat{F}_v \dot{q}_r + \hat{g}(q) + K_P e + K_D \dot{e} \end{aligned}$$

e **sottraendo** i due membri **da**  $B(q) \ddot{q}_r + S(q, \dot{q}) \dot{q}_r + F_v \dot{q}_r + g(q)$  si ottiene

$$\begin{aligned} \underbrace{B(q) \dot{s}} + (S(q, \dot{q}) + F_v) s &= \\ = \tilde{B}(q) \ddot{q}_r + \tilde{S}(q, \dot{q}) \dot{q}_r + \tilde{F}_v \dot{q}_r + \tilde{g}(q) - K_P e - K_D \dot{e} \end{aligned}$$

con  $\tilde{B} = B - \hat{B}$ ,  $\tilde{S} = S - \hat{S}$ ,  $\tilde{F}_v = F_v - \hat{F}_v$ ,  $\tilde{g} = g - \hat{g}$



## Dimostrazione (cont)

- per la linearità nei coefficienti dinamici, segue che

$$B(q)\dot{s} + (S(q, \dot{q}) + F_v)s = Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\tilde{a} - K_P e - K_D \dot{e}$$

- sostituendo in  $V$ , assieme a  $\dot{\hat{a}} = \Gamma Y^T s$ , e per l'antisimmetria della matrice  $\dot{B} - 2S$  si ha

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{1}{2}s^T [\dot{B}(q) - 2S(q, \dot{q})]s - s^T F_v s + s^T Y \tilde{a} \\ &\quad - s^T (K_P e + K_D \dot{e}) + e^T R \dot{e} - \tilde{a}^T Y^T s \\ &= -s^T F_v s - s^T (K_P e + K_D \dot{e}) + e^T R \dot{e}\end{aligned}$$

- esplicitando  $s = \dot{e} + \Lambda e$  ed essendo  $F_v = F_v^T \geq 0$  diagonale

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -e^T (\Lambda^T F_v \Lambda + \Lambda^T K_P) e \\ &\quad - e^T (2\Lambda^T F_v + \Lambda^T K_D + K_P - R) \dot{e} \\ &\quad - \dot{e}^T (F_v + K_D) \dot{e}\end{aligned}$$



## Dimostrazione (fine)

- posto infine (tutte le matrici sono **diagonali**)

$$\Lambda = K_D^{-1} K_P \quad R = 2K_P(I + K_D^{-1} F_v)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T K_P K_D^{-1} (F_v + K_D^{-1}) K_D^{-1} K_P e \\ & - \dot{e}^T (F_v + K_D) \dot{e} \leq 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\dot{V} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e = \dot{e} = 0$$

e la tesi segue da LaSalle



l'insieme degli stati a cui si converge ha **errore nullo di traiettoria** e **stima**  $\hat{a}$  ad un **valore costante** non necessariamente esatto ( $\tilde{a} \neq 0$ )

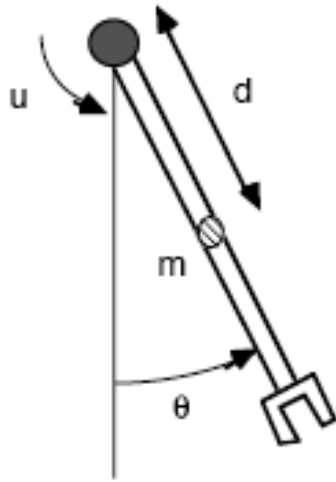


# Commenti

- se la traiettoria desiderata  $q_d(t)$  è a **eccitazione persistente**, si ha anche che convergenza della stima al valore vero
- **condizione** di eccitazione
  - per un sistema **lineare**: # di componenti frequenziali nella traiettoria desiderata pari ad almeno al doppio del # di coefficienti incogniti
  - per un sistema **non lineare**: la verifica si può fare solo a posteriori (su un opportuno integrale temporale)
- in caso di assenza nota di attrito viscoso ( $F_v \equiv 0$ ), vale la stessa dimostrazione (più semplice nella parte finale)
- il controllore adattativo **non usa** né l'inversa della matrice di inerzia (vera o stimata) né l'accelerazione attuale (solo quella desiderata)
- la versione **non adattativa** (con stime esatte) è un controllore che sfrutta la proprietà di **passività** dei robot



# Esempio: singolo braccio



modello

$$I\ddot{\theta} + mgd \sin \theta + f_v \dot{\theta} = u$$

parametrizzazione

$$Y(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) a = \begin{bmatrix} \ddot{\theta} & \sin \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ mgd \\ f_v \end{bmatrix} = u$$

controllore adattativo

$$e = \theta_d - \theta$$

$$\dot{\theta}_r = \dot{\theta}_d + \frac{k_P}{k_D} e$$

$$\gamma_i > 0$$

$$u = \hat{I}\ddot{\theta}_r + \widehat{mgd} \sin \theta + \hat{f}_v \dot{\theta}_r + k_P e + k_D \dot{e}$$

$$\dot{\hat{a}} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{I}} \\ \dot{\widehat{mgd}} \\ \dot{\hat{f}_v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \ddot{\theta}_r \\ \gamma_2 \sin \theta \\ \gamma_3 \dot{\theta}_r \end{bmatrix} (\dot{\theta}_r - \dot{\theta})$$



# Simulazione dinamica

- coefficienti effettivi

$$I = 7.5, \quad mgd = 6, \quad f_v = 1$$

- stime iniziali

$$\hat{I} = 5, \quad \widehat{mgd} = 5, \quad \hat{f}_v = 2$$

- parametri del controllore

$$k_P = 25, \quad k_D = 10, \quad \gamma_i = 5, \quad i = 1, \dots, 3$$

- **traiettorie** di test (a partire da  $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$ )

- **prima**

$$\theta_d(t) = -\sin t$$

- **seconda**

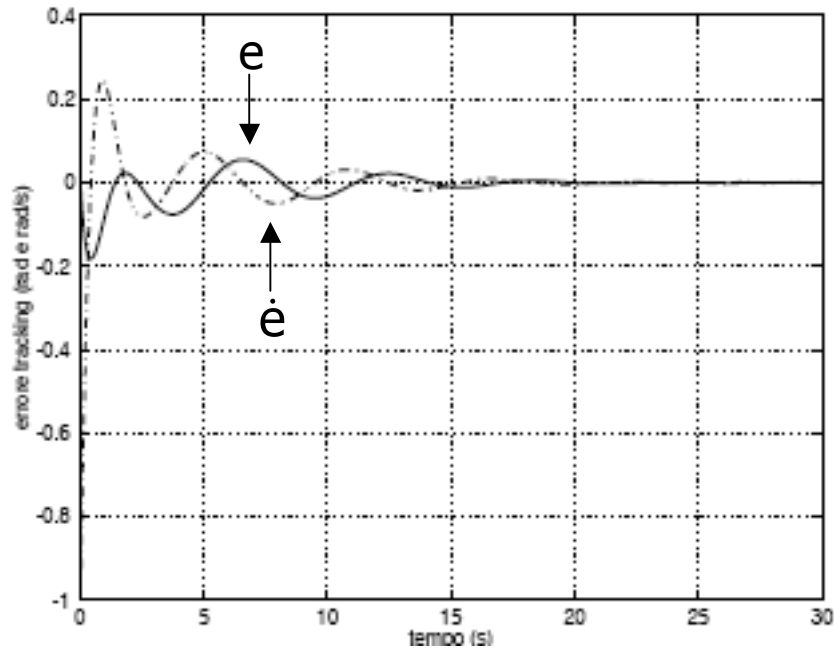
$$\ddot{\theta}_d(t) = \text{onda quadra con } A = 1 \text{ rad/s}^2, \omega = 1 \text{ rad/s}$$



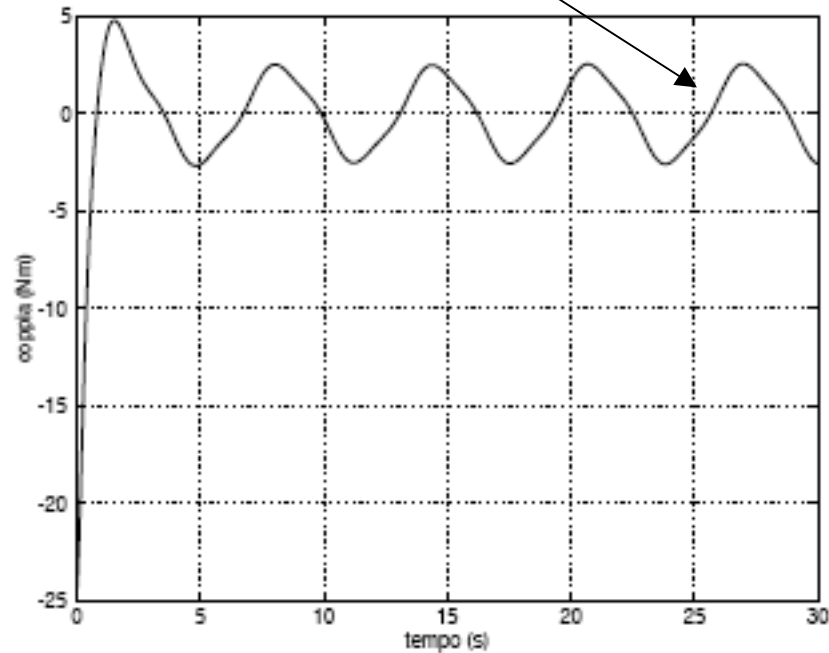
# Risultati prima traiettoria



si nota la dinamica non lineare  
(a regime non è una sinusoide)!



errori di posizione e di velocità



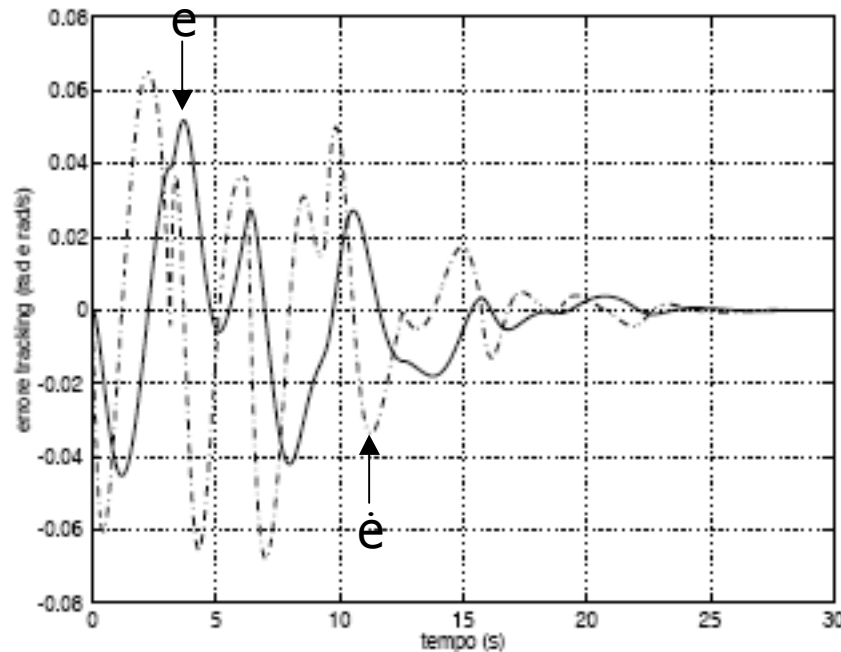
coppia di controllo

$$\theta_d(t) = -\sin t$$

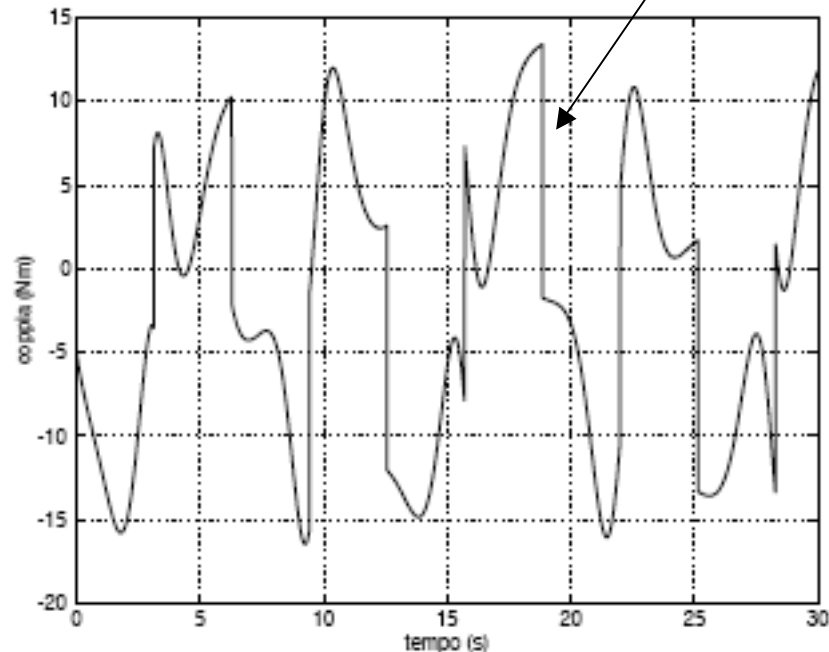
# Risultati seconda traiettoria



si nota la discontinuità di coppia  
(dovuta a quella dell'accelerazione desiderata)



errori di posizione e di velocità

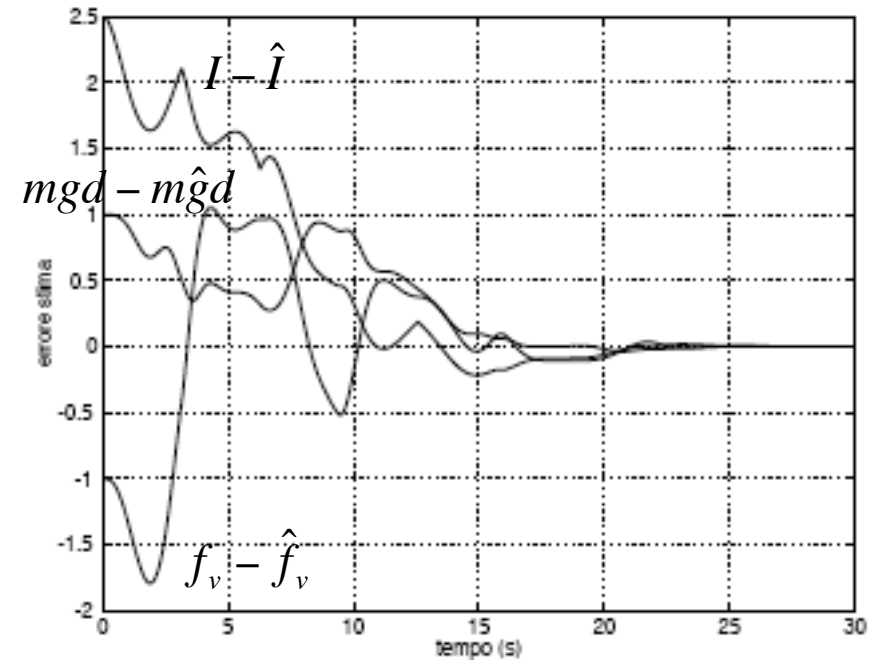
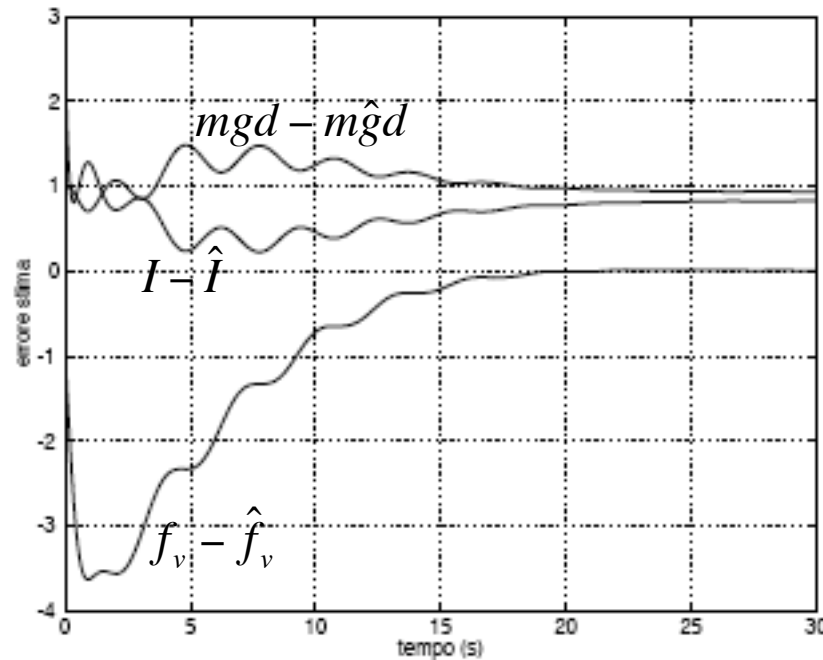


coppia di controllo

$$\ddot{\theta}_d(t) = \text{onda quadra con } A = 1 \text{ rad/s}^2, \omega = 1 \text{ rad/s}$$



# Confronto tra convergenza di stime



errori  $\tilde{a} = a - \hat{a}$

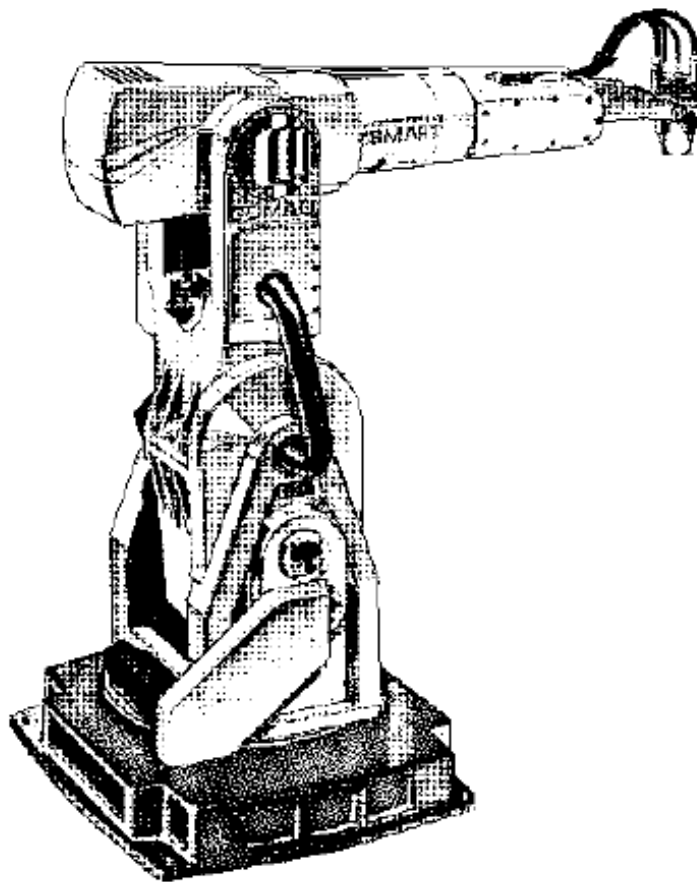
prima traiettoria

converge solo la stima  
del coefficiente viscoso

seconda traiettoria

convergono le stime di tutti  
e tre i coefficienti dinamici

# Esercizio: robot Comau Smart 6.10R



in configurazione

$$\theta_1 = \text{arbitrario}$$

$$\theta_2 = 90^\circ$$

$$\theta_3 = -90^\circ$$

- robot 6R con polso sferico e struttura simmetrica (no offsets)
- **bloccare** gli ultimi tre giunti nella configurazione in figura (robot 3R)
- **assumere** i baricentri posti sugli assi cinematici dei bracci
- **assumere** diagonali le matrici di inerzia dei singoli bracci
- ricavare il **modello dinamico**
- determinare una **parametrizzazione lineare** (possibilmente minima)
- ricavare le espressioni della legge di **controllo adattativo** di traiettoria
- **simulare** il tutto con stime iniziali errate (o esatte! cosa succede allora?)

# Un caso speciale: compiti di regolazione adattativa



- situazione di adattamento quando  $q_d$  è **costante**
- **non ci sono semplificazioni** rilevanti per il controllore adattativo precedente progettato per l'asservimento...

$$u = \hat{B}(q)\ddot{q}_r + \hat{S}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{g}(q) + \hat{F}_v\dot{q}_r + K_P e + K_D \dot{e}$$

$$\hat{a} = \Gamma Y^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) (\dot{q}_r - \dot{q})$$

perchè  $\dot{q}_r = \Lambda (q_d - q)$  e  $\ddot{q}_r = -\Lambda \dot{q}$  **non** svaniscono!

- **diverso** sarebbe il caso con una versione adattativa del controllore di traiettoria

$$u = \hat{B}(q)\ddot{q}_d + \hat{S}(q, \dot{q})\dot{q}_d + \hat{g}(q) + \hat{F}_v\dot{q}_d + K_P e + K_D \dot{e}$$

rimanendo, per il caso  $q_d$  costante, **solo l'adattamento del termine di gravità** (come è più naturale...)



# Regolatore adattativo

- si usa la parametrizzazione lineare del solo termine di gravità

$$g(q) = G(q)a_g$$

con  $a_g$  vettore  $p_g$ -dimensionale

- un regolatore adattativo con globale asintotica stabilità dello stato di equilibrio  $(q_d, 0)$  è dato da

$$u = G(q)\hat{a}_g + K_P(q_d - q) - K_D\dot{q}$$

$$\dot{\hat{a}}_g = \gamma G^T(q) \left( \frac{2e}{1 + 2\|e\|^2} - \beta\dot{q} \right) \quad \gamma > 0$$

con  $K_P > 0$ ,  $K_D > 0$  (simmetriche),  $\beta > 0$  sufficientemente grande,  $e = q_d - q$

# Regolatore adattativo

## Cenni sull'analisi di stabilità



- si usa la funzione di Lyapunov

$$V = \frac{\beta}{2} \left( \dot{q}^T B(q) \dot{q} + e^T K_p e \right) - \frac{2\dot{q}^T B(q) e}{1 + 2\|e\|^2} + \frac{1}{2} (\hat{a}_g - a_g)^T (\hat{a}_g - a_g) \geq 0$$

- una condizione sufficiente affinché  $V$  sia una **candidata** è che

$$\beta > \frac{2B_M}{\sqrt{B_m K_{P,m}}}$$

- una condizione sufficiente che garantisce **anche**

$$\dot{V} = \dots \leq -a\|e\|^2 - b\|\dot{q}\|^2 \leq 0 \quad a > 0, b > 0$$

è che

$$\beta > \max \left( \frac{2B_M}{\sqrt{B_m K_{P,m}}}, \frac{1}{K_{D,m}} \left( \frac{K_{D,m}^2}{2K_{P,m}} + 4B_M + \frac{\alpha_S}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

$\|S(q, \dot{q})\| \leq \alpha_S \|\dot{q}\|$

**N.B.** per una matrice  $A$  **simmetrica, definita positiva**

$$A_M = \lambda_{\max}(A) = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \|A\|$$

$$A_m = \lambda_{\min}(A)$$

da cui, ad es.  $\frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} \geq \frac{1}{2} B_m \|\dot{q}\|^2$