



Corso di Robotica 2

Controllo di traiettoria

Prof. Alessandro De Luca

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA
E SISTEMISTICA ANTONIO RUBERTI



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Controllo a dinamica inversa

dato il **modello** dinamico del robot

$$B(q)\ddot{q} + n(q, \dot{q}) = u$$

$c(q, \dot{q}) + g(q) +$ modelli di attrito

ed una **traiettoria desiderata** differenziabile due volte

$$q_d(t) \rightarrow \dot{q}_d(t), \ddot{q}_d(t)$$

in **condizioni nominali**, applicando la coppia (**feedforward**)

$$u_d = B(q_d)\ddot{q}_d + n(q_d, \dot{q}_d)$$

si riproduce esattamente la traiettoria desiderata



In pratica ...

si hanno spesso **condizioni non ideali**

- stato iniziale “**non agganciato**” a quello della traiettoria $q_d(t)$
- **non accurata conoscenza** dei parametri dinamici del robot (masse, inerzie, posizione baricentri)
- presenza di fenomeni **non modellati** (attriti complessi, elasticità, ...)
- valore del carico trasportato **non noto**
- **disturbi** sugli attuatori, errori di troncamento, ...



In condizioni perturbate

$$\mathbf{u}_d^* = \mathbf{B}^*(\mathbf{q}_d)\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{n}^*(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)$$

con \mathbf{B}^* , \mathbf{n}^* **stime** dei termini nel modello dinamico

N.B. \mathbf{u}_d^* può essere tutto calcolato **fuori linea**

per irrobustire lo schema di controllo lo si trasforma in uno a **retroazione**

vari schemi implementativi a seconda della ripartizione del **carico computazionale** fra

- **FUORI LINEA** (↔ anello aperto)
- **IN LINEA** (↔ anello chiuso)

strategia a **due passi**:

1. compensazione (**feedforward**)/cancellazione (**feedback**) delle **non linearità**
2. sintesi di un controllo **lineare** "stabilizzante"



Possibili schemi di asservimento

1. compensazione a dinamica inversa + PD costante

$$u = u_d^* + K_P(q_d - q) + K_D(\dot{q}_d - \dot{q})$$

2. compensazione a dinamica inversa + PD variabile

$$u = u_d^* + B^*(q_d) [K_P(q_d - q) + K_D(\dot{q}_d - \dot{q})]$$

stabilizzazione
solo **locale**
dell'errore di
traiettoria
 $e(t) = q_d(t) - q(t)$

3. **feedback linearizzazione** + PD costante = "COMPUTED TORQUE"

$$u = B^*(q) [\ddot{q}_d + K_P(q_d - q) + K_D(\dot{q}_d - \dot{q})] + n^*(q, \dot{q})$$

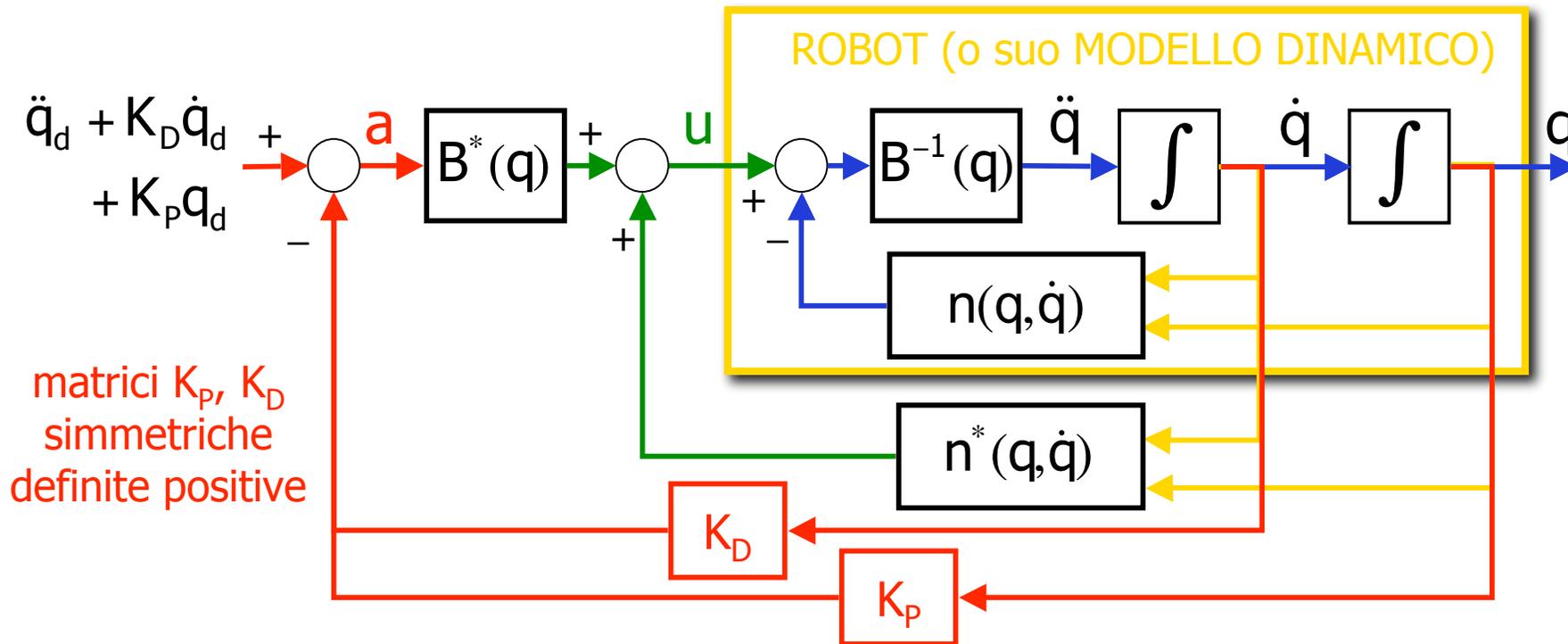
4. feedback linearizzazione + PID costante

$$u = B^*(q) \left[\ddot{q}_d + K_P(q_d - q) + K_D(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_I \int (q_d - q) dt \right] + n^*(q, \dot{q})$$

il più robusto, ma anche il più complesso da implementare in tempo reale



Feedback linearizzazione (FL)



matrici K_P, K_D
simmetriche
definite positive

in condizioni
"ideali"
($B^* = B, n^* = n$)

$$\underbrace{B(q)\ddot{q} + n(q, \dot{q})}_{\text{dinamica del robot}} = \underbrace{u = B(q)a + n(q, \dot{q})}_{\text{controllo non lineare}} \Rightarrow \ddot{q} = a$$

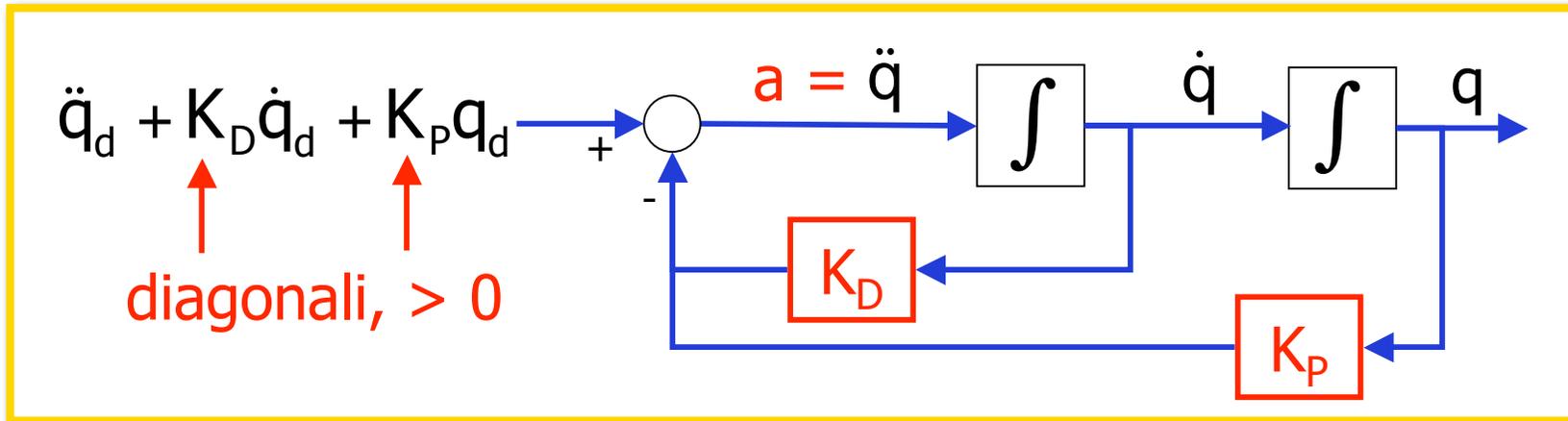
$\ddot{q} = a$
sistema lineare
e disaccoppiato

stabilizzazione
lineare globale

$$a = \ddot{q}_d + K_D(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_P(q_d - q)$$



Interpretazione nel dominio lineare



il robot sotto controllo FL ha un comportamento dinamico **invariante**, **lineare** e **disaccoppiato** in tutto lo spazio di stato ($\forall q, \dot{q}$)

massa unitaria ($m=1$) nello spazio dei giunti !!

linearità

i transienti di errore $e_i = q_{di} - q_i \rightarrow 0$ **esponenzialmente** (scelta di K_{Di} , K_{Pi})

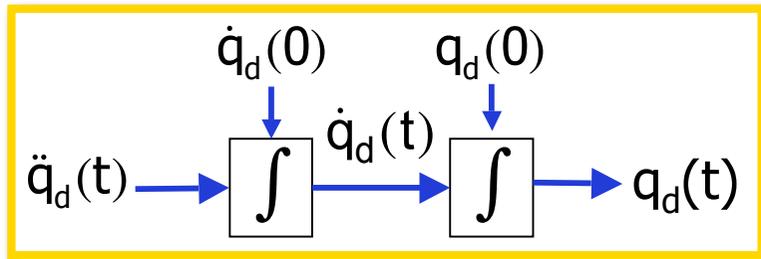
disaccoppiamento

ogni coordinata q_i evolve in modo **indipendente** dalle altre, forzata da a_i



Commenti

- **traiettorie generate** a partire da $\ddot{p}_d(t), p_d(0), \dot{p}_d(0)$ **cartesiane**

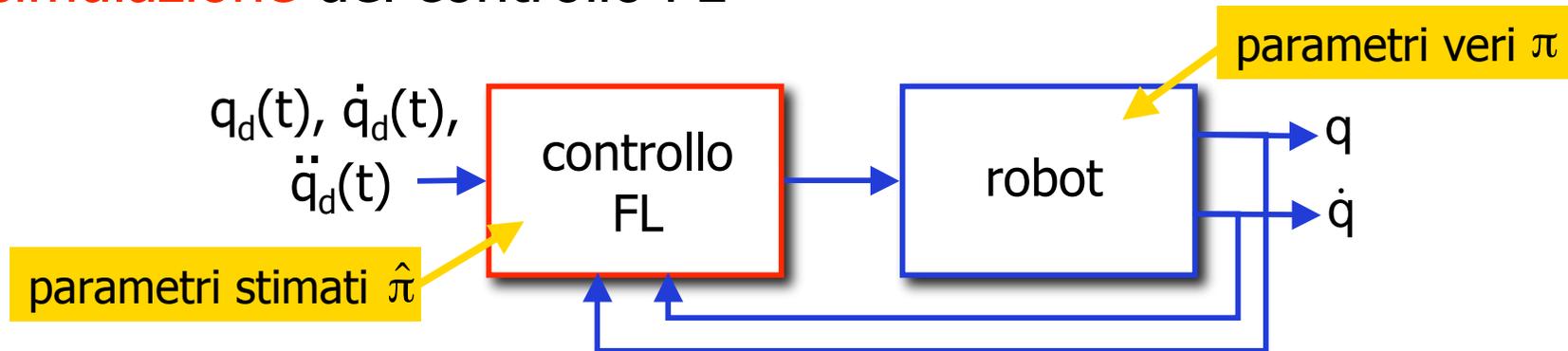


$$q_d(0) = f^{-1}(p_d(0))$$

$$\dot{q}_d(0) = J^{-1}(q_d(0))\dot{p}_d(0)$$

$$\ddot{q}_d(t) = J^{-1}(q)[\ddot{p}_d(t) - \dot{J}(q)\dot{q}]$$

- **simulazione** del controllo FL



N.B. non ha molto senso simulare **solo** il caso ideale ($\hat{\pi} = \pi$), perché gli andamenti sono **identici** al caso lineare di doppi integratori stabilizzati



Altre considerazioni

- **scelta** degli elementi in diagonale di K_P , K_D (e K_I)
 - in base al transitorio desiderato e ai vincoli di saturazione dei motori



- **identificazione parametrica**
 - da effettuarsi preliminarmente, sfruttando la **linearità nei coefficienti dinamici** del modello dei robot
- scelta del **passo di campionamento**
 - compromesso fra **tempo di calcolo** e **accuratezza**: $T_c \leq 20$ ms
- la linearizzazione esatta via feedback è una tecnica generale di **controllo nonlineare**
 - estendibile al caso di **robot con giunti elastici**
 - **altre applicazioni**: assetto satelliti, motori ad induzione, volo elicottero



Un altro esempio di FL in robotica

- modello dinamico di **robot con giunti elastici**
 - θ = posizione dei motori (a valle delle riduzioni)
 - q = posizione dei bracci
 - M = matrice diagonale (>0) delle inerzie dei motori (bilanciati)
 - K = matrice diagonale (>0) delle rigidità dei giunti

} 2N coordinate generalizzate

4N variabili di stato

$$\left\{ \begin{array}{l} B(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + g(q) + K(q - \theta) = 0 \quad (1) \\ M\ddot{\theta} + K(\theta - q) = u \quad (2) \end{array} \right.$$

- esiste una legge di controllo che **linearizza via feedback?**

$$u = \alpha(\theta, q, \dot{\theta}, \dot{q}) + \beta(\theta, q, \ddot{\theta}, \ddot{q})a$$

SI, e fornisce $\frac{d^4 q_i}{dt^4} = a_i \quad i = 1, \dots, N$ **lineare e disaccoppiato (stabilizzato poi da un "PDDD" con guadagni opportuni)**

hint: differenziare nel tempo la (1) fino a far comparire l'accelerazione dei motori; sostituire la (2) e scegliere u per cancellare le nonlinearità...



Un altro controllore di traiettoria

$$u = B(q)\ddot{q}_d + S(q, \dot{q})\dot{q}_d + g(q) + F_v\dot{q}_d + K_p e + K_D \dot{e}$$

↑
fattorizzazione tale da
avere $\dot{B} - 2S$ antisimmetrica

↑ ↑
matrici simmetriche
e definite positive

- **non** opera una **cancellazione** completa delle non linearità
 - si valutano sulla traiettoria desiderata tutte le $q(t)$ e sue derivate che compaiono linearmente nel modello
- **non** induce un comportamento **lineare e disaccoppiato** all'errore di traiettoria $e(t) = q_d(t) - q(t)$ ad anello chiuso
- stabilizza però **globalmente** (e, \dot{e}) a zero
- si presta più agevolmente ad una **versione adattativa**
- analisi della stabilità asintotica con **Lyapunov** e **LaSalle**



Analisi di stabilità asintotica

$B(q)\ddot{q} + S(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) + F_v\dot{q} = u$ modello dinamico robot

legge di controllo $u = B(q)\ddot{q}_d + S(q,\dot{q})\dot{q}_d + g(q) + F_v\dot{q}_d + K_p e + K_D \dot{e}$

- candidata di Lyapunov e sua derivata

$$V = \frac{1}{2} \dot{e}^T B(q) \dot{e} + \frac{1}{2} e^T K_p e \geq 0 \quad \dot{V} = \frac{1}{2} \dot{e}^T \dot{B}(q) \dot{e} + \dot{e}^T B(q) \ddot{e} + e^T K_p \dot{e}$$

- dal modello + controllo (sistema ad anello chiuso)

$$B(q)\ddot{e} = -S(q,\dot{q})\dot{e} - K_p e - (K_D + F_v)\dot{e}$$

- sostituendo e sfruttando la proprietà di antisimmetria

$$\dot{V} = -\dot{e}^T (K_D + F_v) \dot{e} \leq 0 \quad \dot{V} = 0 \Leftrightarrow \dot{e} = 0$$

- analisi di LaSalle

$$B(q)\ddot{e} = -K_p e \Rightarrow \ddot{e} = 0 \Leftrightarrow e = 0 \quad \Rightarrow \quad (e, \dot{e}) = (0, 0) \quad \leftarrow$$

massimo insieme invariante in $\dot{V}=0$



Regolazione come caso particolare

- cosa succede alle leggi di controllo per asservimento di traiettoria quando q_d è costante? si semplificano?

- **feedback linearizzazione**

$$u = B(q)[K_P(q_d - q) - K_D\dot{q}] + c(q, \dot{q}) + g(q)$$

- nessuna particolare semplificazione
- però si mantiene la stabilizzazione **esponenziale** (oltre che il disaccoppiamento dei transitori)

- **controllore globale alternativo**

$$u = K_P(q_d - q) - K_D\dot{q} + g(q)$$

- si ritrova il caso del PD + cancellazione della gravità