## *Corso di Robotica 2*

# Apprendimento iterativo per la compensazione di gravità


Prof. Alessandro De Luca

Dipartimento di Informatica e Sistemistica Antonio Ruberti

Sapienza Università di Roma

# Obiettivo

- regolazione di arbitrarie configurazioni di equilibrio in presenza di gravità
  - senza conoscenza esplicita dei coefficienti dinamici del robot (né della struttura del termine di gravità)
  - senza ricorrere ad "alto guadagno" di posizione
- impiego di uno schema di controllo iterativo basato su
  1. controllo PD sull'errore ai giunti + compensazione costante
  2. aggiornamento iterativo del termine di compensazione per regimi successivi
- determinare condizioni sufficienti per la convergenza asintotica del metodo con errore finale nullo

# Preliminari

- modello dinamico del robot

una qualsiasi fattorizzazione
dei termini centrifughi/Coriolis

$$B(q)\ddot{q} + S(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = u$$

- esistenza di un "bound" sui termini gravitazionali

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial q} \right\| \leq \alpha$$

- regolazione con PD ai giunti (senza compensazione gravità)

$$u = K_P(q_d - q) - K_D\dot{q} \qquad K_P > 0 \;\; K_D > 0$$

- a regime permanente, si ha

$$q = \bar{q},\; \dot{q} = 0 \qquad g(\bar{q}) = K_P(q_d - \bar{q}) \qquad \bar{e} = q_d - \bar{q}$$

errore non nullo

# Schema di controllo iterativo

- controllo all'i-esima iterazione (per i = 1,2,…)

$$u = \frac{1}{\beta} K_P (q_d - q) - K_D \dot{q} + u_{i-1} \qquad \beta > 0$$

  con compensazione costante $u_{i-1}$ (feedforward)
  - $q_0$ è la configurazione iniziale del braccio
  - $u_0 = 0$ è l'inizializzazione più comune
  - all'i-esimo regime ($q=q_i$ , $\dot{q}=0$), si ha

$$g(q_i) = \frac{1}{\beta} K_P (q_d - q_i) + u_{i-1}$$

- aggiornamento della compensazione (per la prossima iterazione)

$$u_i = \frac{1}{\beta} K_P (q_d - q_i) + u_{i-1}$$

# Condizioni sufficienti di convergenza

**Teorema**

(a) $\lambda_{\min}(K_P) > \alpha$

(b) $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$

garantiscono che la sequenza $\{q_0, q_1, \ldots\}$ converge a $q_d$, a partire da qualsiasi valore $q_0$ (e $\dot{q}_0$) iniziale (globalmente)

- la condizione (a) garantisce la stabilità asintotica globale (unico punto di equilibrio ad anello chiuso) del controllo

$$u = K_P(q_d - q) - K_D\dot{q} + g(q_d)$$

con vettore di gravità noto

- la condizione (b) garantisce la convergenza dello schema, ed in particolare che

$$\boxed{\lim_{i\to\infty} u_i = g(q_d)}$$

# Dimostrazione

- posto $e_i = q_d - q_i$ , al termine della i-esima iterazione e per la legge di aggiornamento, si ha $u_i = g(q_i)$ e quindi

$$\|u_i - u_{i-1}\| = \|g(q_i) - g(q_{i-1})\| \leq \alpha\|q_i - q_{i-1}\|$$
$$\leq \alpha(\|e_i\| + \|e_{i-1}\|)$$

- d'altra parte, la legge di aggiornamento mostra che

$$\|u_i - u_{i-1}\| = \frac{1}{\beta}\|K_P e_i\|$$

da cui, combinando le precedenti

$$\frac{1}{\beta}\alpha\|e_i\| < \frac{1}{\beta}\lambda_{\min}(K_P)\|e_i\| \leq \frac{1}{\beta}\|K_P e_i\| \leq \alpha(\|e_i\| + \|e_{i-1}\|)$$

ossia $$\|e_i\| < \beta(\|e_i\| + \|e_{i-1}\|)$$

# Dimostrazione (cont)

- la condizione (b) garantisce che la sequenza

$$\|e_i\| < \frac{\beta}{1-\beta}\|e_{i-1}\|$$

definisce una mappa di contrazione e quindi

$$\lim_{i\to\infty} \|e_i\| = 0$$

con convergenza asintotica a partire da qualsiasi stato iniziale

N.B. il robot si avvicina progressivamente alla configurazione desiderata attraverso regimi successivi

- $K_P$ e $K_D$ condizionano i singoli transitori
- $\beta$ il tasso di convergenza dei regimi permanenti a quello finale

# Commenti

- sostituendo le condizioni (a) e (b) nella legge di controllo, si ha per la matrice di guadagno proporzionale

$$\hat{K}_P = K_P/\beta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_{\min}(\hat{K}_P) > 2\alpha}$$

- se $K_P$ è diagonale, questa condizione generale si traduce in un limite inferiore per i singoli elementi
- è ovviamente una condizione sufficiente
  - lo schema potrebbe funzionare anche se violata…
- lo schema si rilegge come aggiunta di un termine integrale
  - aggiornato in corrispondenza a una sequenza discreta di istanti
  - con garantite prestazioni e stabilità asintotica globale

# Simulazione dinamica

- robot 3R in moto in un piano verticale

$$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 0.5 \text{ [m]}$$

$$m_1 = 30,\ m_2 = 20,\ m_3 = 10 \text{ [kg]} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha \simeq 400}$$

(uniformemente distribuite)

$$U_{1,max} = 800,\ U_{2,max} = 400,\ U_{3,max} = 200 \text{ [Nm]}$$

(saturazioni di coppia)

$$q_0 = (0,0,0) = \text{braccio steso in basso}$$

- tre casi di studio

I: $q_d=(\pi/2,0,0)$

II: $q_d=(3\pi/4,0,0)$

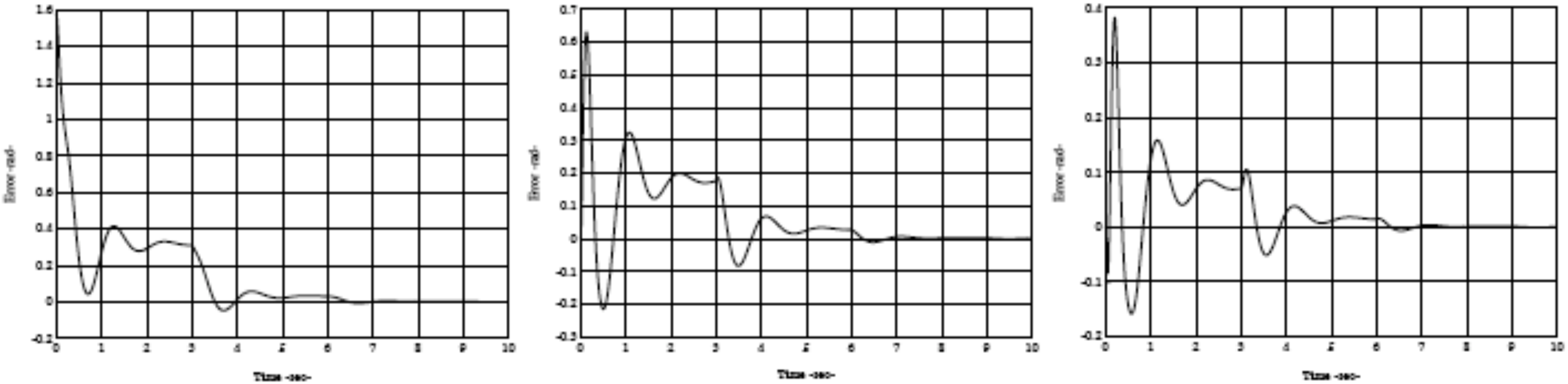
$$\left.\begin{array}{l}\text{I}\\ \text{II}\end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l}\hat{K}_P = \text{diag}\{1000, 600, 280\} \\ K_D = \text{diag}\{200, 100, 20\}\end{array}\right.$$

III: $q_d=(3\pi/4,0,0)$

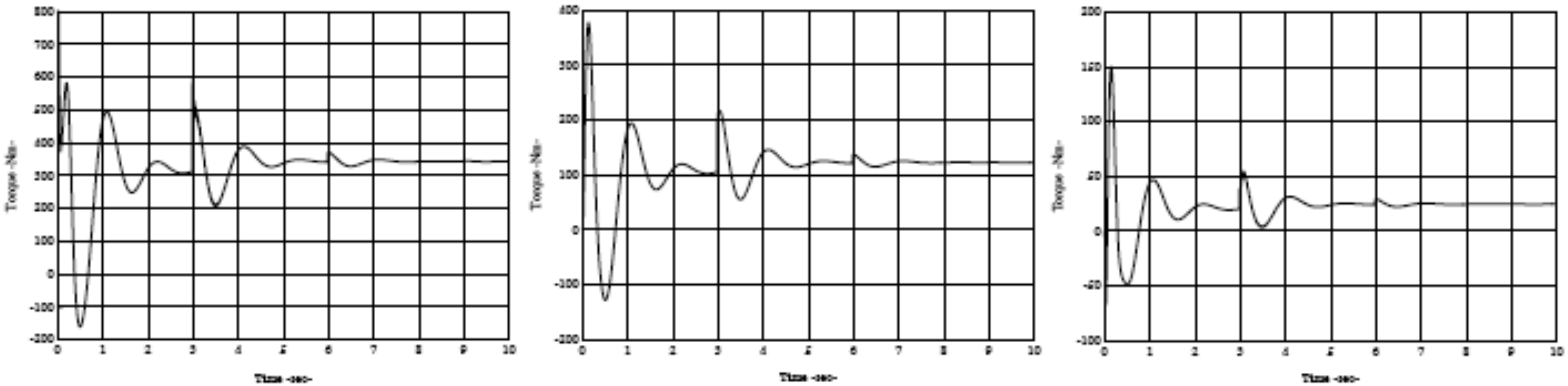
$$\hat{K}_P = \text{diag}\{500, 500, 500\}$$

$$K_D = \text{come prima}$$

# Caso I: $q_d=(\pi/2,0,0)$

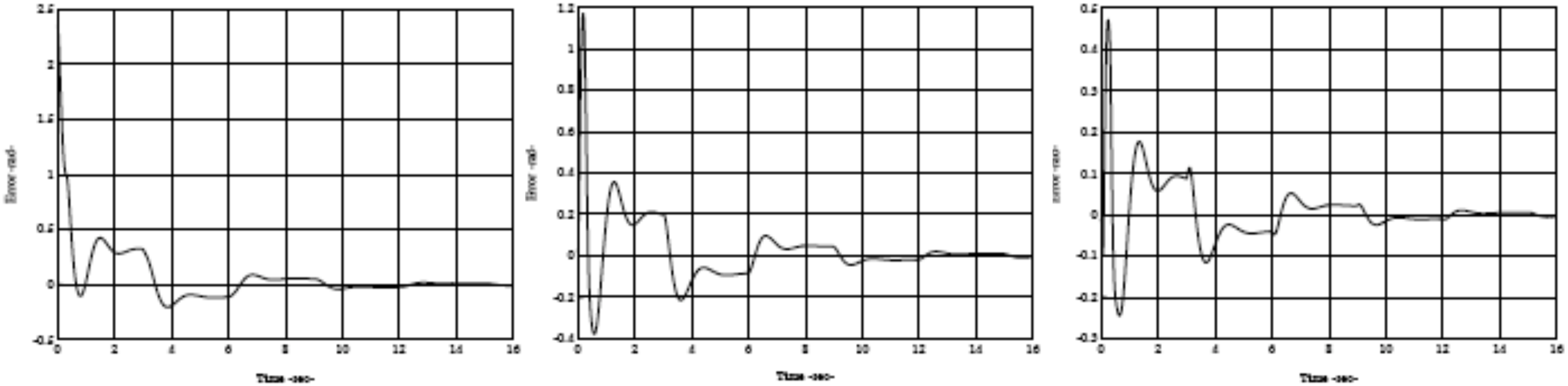


errori di posizione (nulli dopo 3 aggiornamenti)

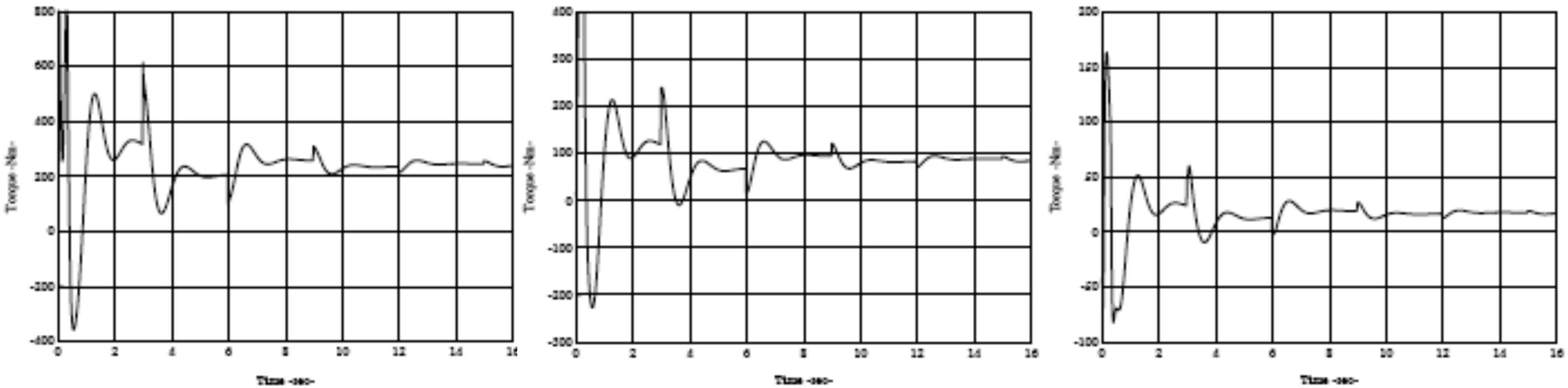


coppie di controllo

# Caso II: $q_d=(3\pi/4,0,0)$

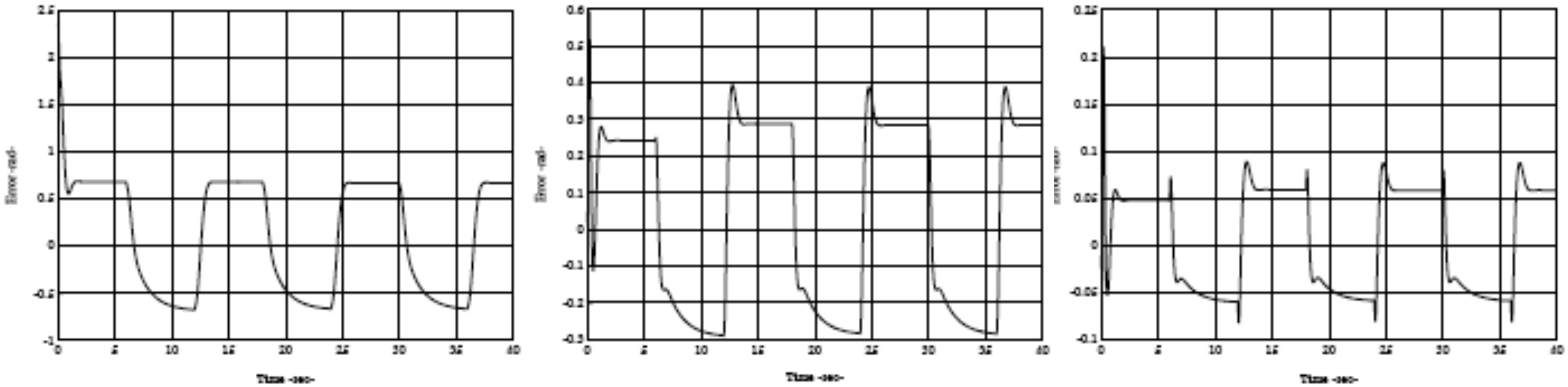


errori di posizione (nulli dopo 5 aggiornamenti)

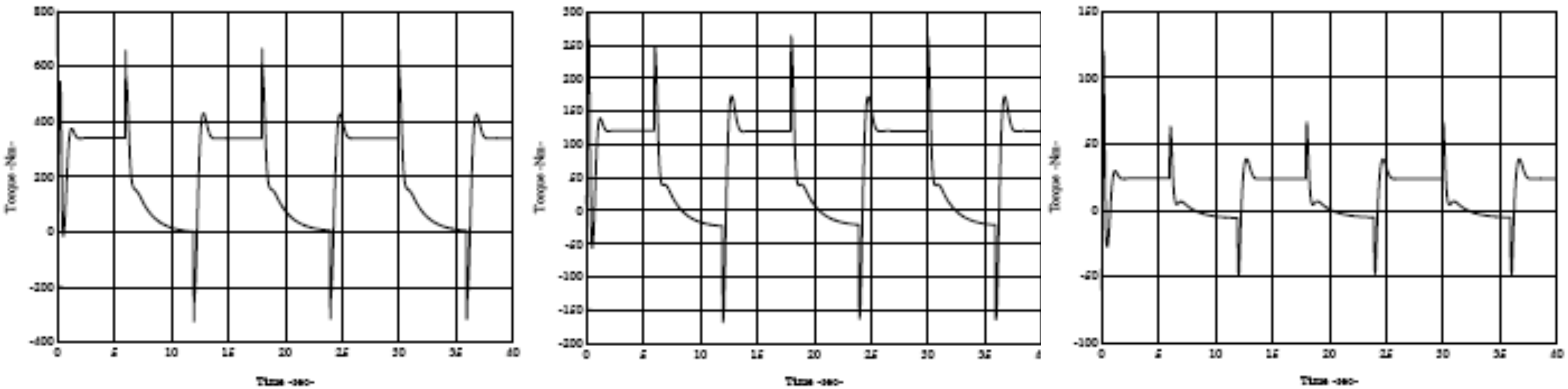


coppie di controllo

# Caso III: $q_d=(3\pi/4,0,0)$, guadagni ridotti



errori di posizione (cicli limite, convergenza assente!)



coppie di controllo

# Commenti finali

- la convergenza si ottiene nel giro di poche iterazioni
- sufficienza della condizione sul guadagno proporzionale: nei primi due casi, pur essendo violata, si ha tuttavia convergenza
- nella terza simulazione si crea un ciclo limite tra due configurazioni di regime, entrambe errate
  - indica quanto la condizione sufficiente trovata sia ‘distante’ dalla necessità
- un raffinamento dell’analisi permette di ricavare limiti inferiori per i $K_{Pi}$ (caso diagonale) meno elevati, ma ancora sufficienti alla convergenza
  - è ragionevole che tali valori siano più bassi per i giunti distali nella catena
- in pratica l’aggiornamento avviene quando il robot è sufficientemente vicino ad una situazione di regime (velocità e variazioni di posizione minori di soglie opportune)
- l’approccio è stato esteso anche al caso di regolazione sotto gravità di robot con elementi flessibili (giunti e/o bracci)