Corso di Robotica 2

Regolazione di posizione

Prof. Alessandro De Luca

Dipartimento di Informatica e Sistemistica Antonio Ruberti

Sapienza Università di Roma

Stabilità di sistemi dinamici

definizioni - 1

$$\dot{x} = f(x)$$

$x = 0$ di equilibrio: $f(0) = 0$

(estendibile a x_0 di equilibrio: $f(x_0) = 0$)

stabilità di $x = 0$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0: \quad \|x(t_0)\| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t > t_0$$

stabilità asintotica di $x = 0$ — stabilità +

$$\exists \delta > 0: \quad \|x(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| \to 0, \quad \text{per } t \to \infty$$

la stabilità asintotica da locale può diventare globale ($\forall \delta > 0$, finito)

Stabilità di sistemi dinamici
definizioni - 2

stabilità esponenziale di x = 0

$$\exists \delta, c, \lambda > 0: \quad \|x(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| \le c\, e^{-\lambda t} x(t_0)$$

stabilità "pratica" rispetto ad un insieme S

sia $x(t_0) = x_0$

$$\exists T(x_0, S) \in \mathbb{R}: \quad x(t) \in S, \quad \forall t \ge t_0 + T(x_0, S)$$

detta anche stabilità u.u.b. = "ultimately uniformly bounded"
= asintoticamente uniformemente limitata
(la traiettoria x(t))

Stati di equilibrio di un robot

$$B(q)\ddot{q} + c(q,\dot{q}) + g(q) = u$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -B^{-1}(x_1)\left[c(x_1,x_2) + g(x_1)\right] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B^{-1}(x_1) \end{pmatrix} u$$

$$= f(x) + G(x_1)u$$

x^0 equilibrio ad anello aperto (u = 0) $\Rightarrow$ $f(x^0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2^0 = 0 \\ g(x_1^0) = 0 \end{cases}$

x^0 equilibrio ad anello chiuso (u = u(x)) $\Rightarrow$ $f(x^0) + G(x_1^0)u(x^0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2^0 = 0 \\ u(x^0) = g(x_1^0) \end{cases}$

coppie che bilanciano la gravità!

Stabilità di sistemi dinamici

risultati - 1

candidata di Lyapunov

$$V(x,t): \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}:$$ → periodica in t (o indipendente)

$$V(0,t) = 0, \quad V(x,t) > 0 \quad \forall x \neq 0, \forall t$$

tipicamente quadratica (ad es., $\frac{1}{2}x^T P x$ con superfici di livello = ellissoidi)

può essere una candidata anche solo localmente ($\forall x \neq 0, \|x\| < \delta$)

condizione sufficiente di instabilità

$\exists V$ candidata: $\quad \dot{V}(x,t) > 0$ lungo le traiettorie di $\dot{x} = f(x)$

condizione sufficiente di stabilità

$\exists V$ candidata: $\quad \dot{V}(x,t) \leq 0$ lungo le traiettorie di $\dot{x} = f(x)$

condizione sufficiente di asintotica stabilità

$\exists V$ candidata: $\quad \dot{V}(x,t) < 0$ lungo le traiettorie di $\dot{x} = f(x)$, tranne in x=0

Stabilità di sistemi dinamici
risultati - 2

condizione sufficiente di stabilità u.u.b. rispetto ad S

$\exists V$ candidata: i) S è un insieme di livello di V per un certo c_0:

$$S = S(c_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \le c_0\}$$

ii) $\dot{V}(x,t) < 0$, lungo le traiettorie di $\dot{x} = f(x)$, $\quad x \notin S$

Teorema di LaSalle

se $\exists V$ candidata: $\dot{V}(x,t) \le 0$ lungo le traiettorie di $\dot{x} = f(x)$

⇓

allora le traiettorie del sistema convergono asintoticamente al massimo insieme invariante $M \subseteq S = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$

M invariante se $x(t_0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \ge t_0$

corollario

$M \equiv \{0\}$ ⇒ asintotica stabilità

Stabilità di sistemi lineari

$$\dot{x} = Ax$$

x=0 punto di equilibrio

I. asintotica stabilità locale

II. asintotica stabilità globale

III. stabilità esponenziale

IV. $\sigma(A) \subset C^-$ (autovalori di A tutti a parte reale negativa)

V. $\forall Q > 0$ (def. pos.), $\exists! P > 0: \quad A^T P + PA = -Q$

eq. di Lyapunov ($\Rightarrow$ $V = ½ x^T P x$ è una candidata di Lyapunov)

SONO TUTTE EQUIVALENTI!!

se x=0 è un punto di equilibrio
asintoticamente stabile, allora è l'unico

Stabilità dell'approssimazione lineare

Sia $\dot{x} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} \cdot x = Ax$ l'approssimazione lineare di $\dot{x} = f(x)$ intorno all'origine

A asintoticamente stabile ($\sigma(A) \subset C^{-}$)

$\Updownarrow$

il sistema non lineare originario è localmente esponenzialmente stabile nell'origine

Controllo PD
(proporzionale + derivativo sull'errore)

robot $\boxed{B(q)\ddot{q} + S(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = u}$

obiettivo: asintotica stabilizzazione (= regolazione) dello stato (di equilibrio, ad anello chiuso)

$$\boxed{q = q_d, \quad \dot{q} = 0}$$

eventualmente ottenuto per inversione cinematica: $q_d = f^{-1}(r_d)$

legge di controllo $\boxed{u = K_P(q_d - q) - K_D\dot{q}}$

$K_P > 0$, $K_D > 0$ (definite positive), simmetriche

Stabilità asintotica del controllo PD

Teorema

in assenza di gravità ($g(q) = 0$), lo stato $(q_d, 0)$ del robot sotto il controllo PD ai giunti è globalmente asintoticamente stabile

Dimostrazione sia $\boxed{e = q_d - q}$ $\qquad \dot{e} = -\dot{q} \qquad$ (q_d costante)

candidata di Lyapunov $\boxed{V = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q} + \frac{1}{2}e^T K_P e \geq 0}$ $\qquad V = 0 \Leftrightarrow e = \dot{e} = 0$

$$\dot{V} = \dot{q}^T B\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{B}\dot{q} - e^T K_P \dot{q} = \dot{q}^T\Big(u \underbrace{- S\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{B}\dot{q}}_{= 0 \text{ per l'antisimmetria di } \dot{B} - 2S}\Big) - e^T K_P \dot{q}$$

$$= \dot{q}^T \cancel{K_P e} - \dot{q}^T K_D \dot{q} - e^T \cancel{K_P \dot{q}} = -\dot{q}^T K_D \dot{q} \leq 0$$

($K_D > 0$, simmetrica)

finora, dimostrata solo la stabilità; ma... $\qquad \dot{V} = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$

segue... →

Stabilità asintotica del controllo PD (cont)

$\boxed{\dot{V} = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0}$ $\xrightarrow{\text{LaSalle}}$ le traiettorie del sistema convergono verso il più grande insieme invariante M dove $\dot{q} = 0$ (ovvero, il più grande insieme M dove $\dot{q} = 0, \ddot{q} = 0$)

$$\dot{q} = 0 \Rightarrow \underbrace{B(q)\ddot{q} = K_P e}_{\text{dinamica ad anello chiuso}} \Rightarrow \ddot{q} = \underbrace{B^{-1}(q)K_P}_{\text{non singolare}} e$$

$$\boxed{\dot{q} = 0, \ddot{q} = 0 \Leftrightarrow e = 0}$$

$\Rightarrow$ l'unico stato invariante in cui $\dot{V} = 0$ è proprio $q = q_d, \dot{q} = 0$

N.B. tipicamente $K_P = \text{diag}\{k_{Pi}\}, K_D = \text{diag}\{k_{Di}\}$

$\Rightarrow$ controllo lineare decentralizzato (locale al giunto)

Interpretazione meccanica

- nel caso di guadagni K_P e K_D diagonali (quindi positivi), questi valori corrispondono a rigidezze di molle e a coefficienti viscosi di smorzatori "virtuali" posti ai giunti

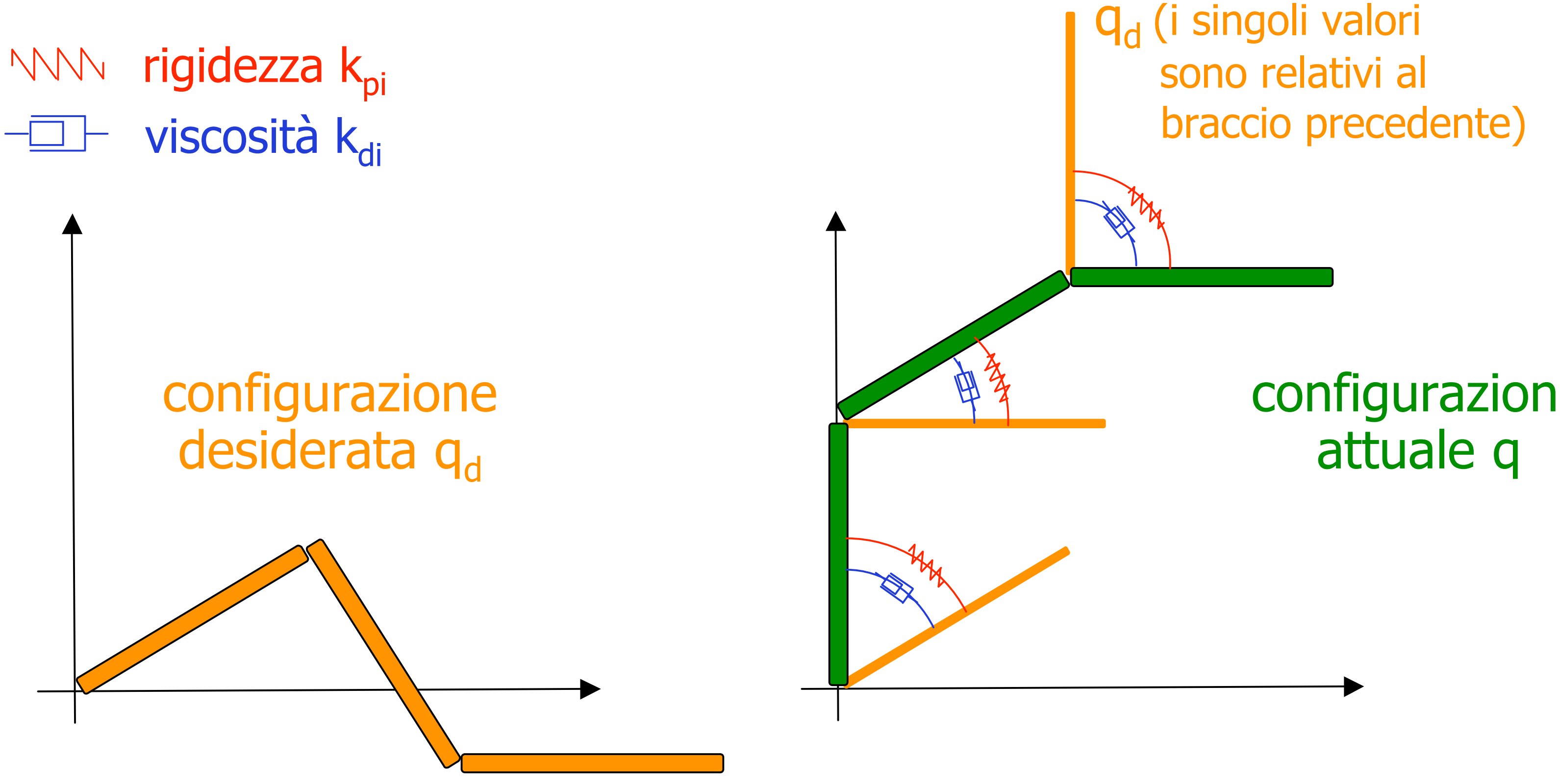
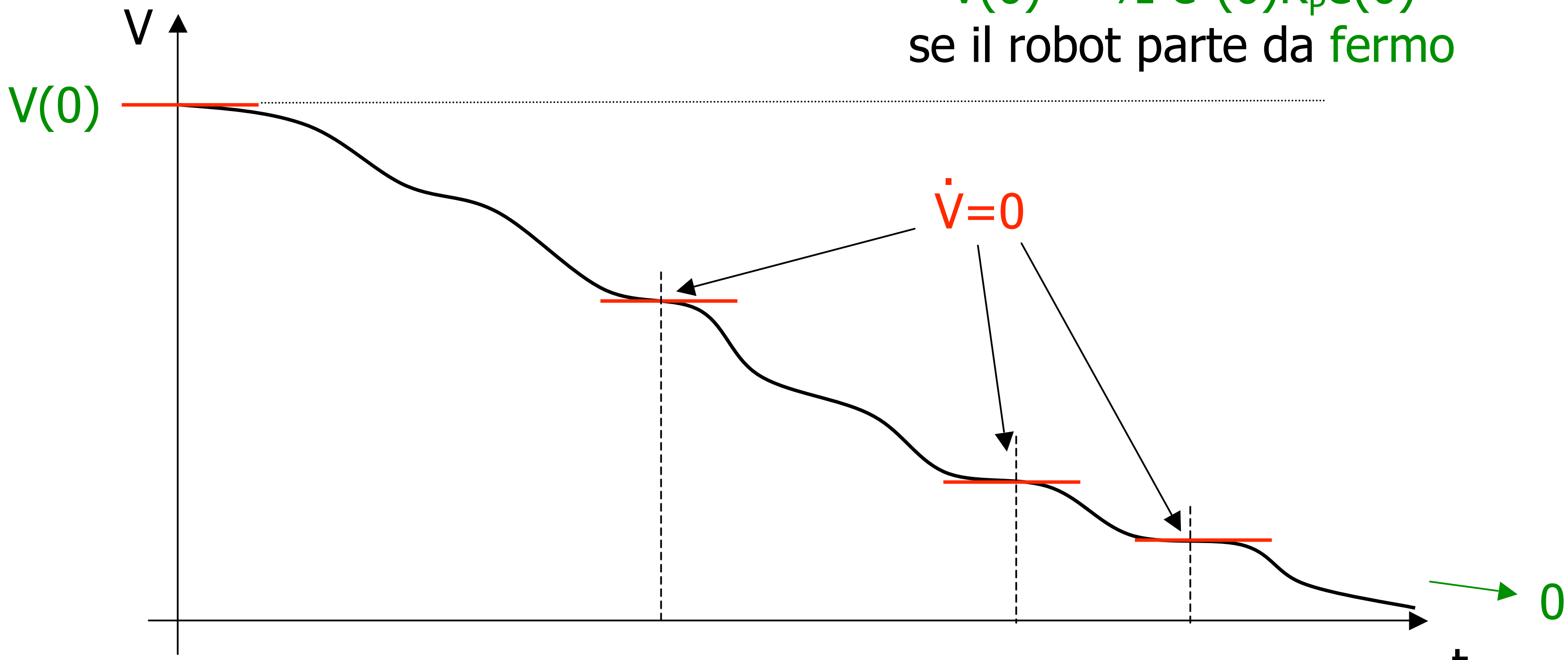


Grafico della funzione V

- evoluzione temporale della funzione di Lyapunov

$V(0) = ½\, e^T(0)K_P e(0)$
se il robot parte da fermo



istanti (isolati) di "inversione globale" di moto
($\dot{q} = 0$, ma $\ddot{q} \neq 0$!)

Commenti sul controllo PD

- scelta dei guadagni influenza l'evoluzione del robot nel transitorio e il tempo di assestamento
  - difficile trovare valori "ottimali" in tutto lo spazio di lavoro
  - con K_P e K_D "piene", si possono assegnare autovalori desiderati al sistema lineare approssimato intorno allo stato finale $(q_d,0)$
- in presenza di attrito viscoso (ai giunti), il termine derivativo non è strettamente necessario
  - $-F_v\dot{q}$ nel modello agisce come $-K_D\dot{q}$ nel controllo, ma quest'ultimo è modulabile a piacere
- realizzazione del feedback derivativo dalla sola misura di posizione ai giunti (encoder)

$$u = \left(K_P + \frac{K_D s}{1+\tau s}\right) e \qquad e = q_d - q$$

Inclusione della gravità

- in presenza di gravità, la stessa dimostrazione prova che il controllo

$$\boxed{u = K_P(q_d - q) - K_D\dot{q} + g(q)} \qquad \boxed{K_P > 0,\ K_D > 0}$$

rende lo stato di equilibrio $(q_d, 0)$ asintoticamente stabile (compensazione nonlineare della gravità)

- se la gravità non è compensata o è compensata in modo approssimato

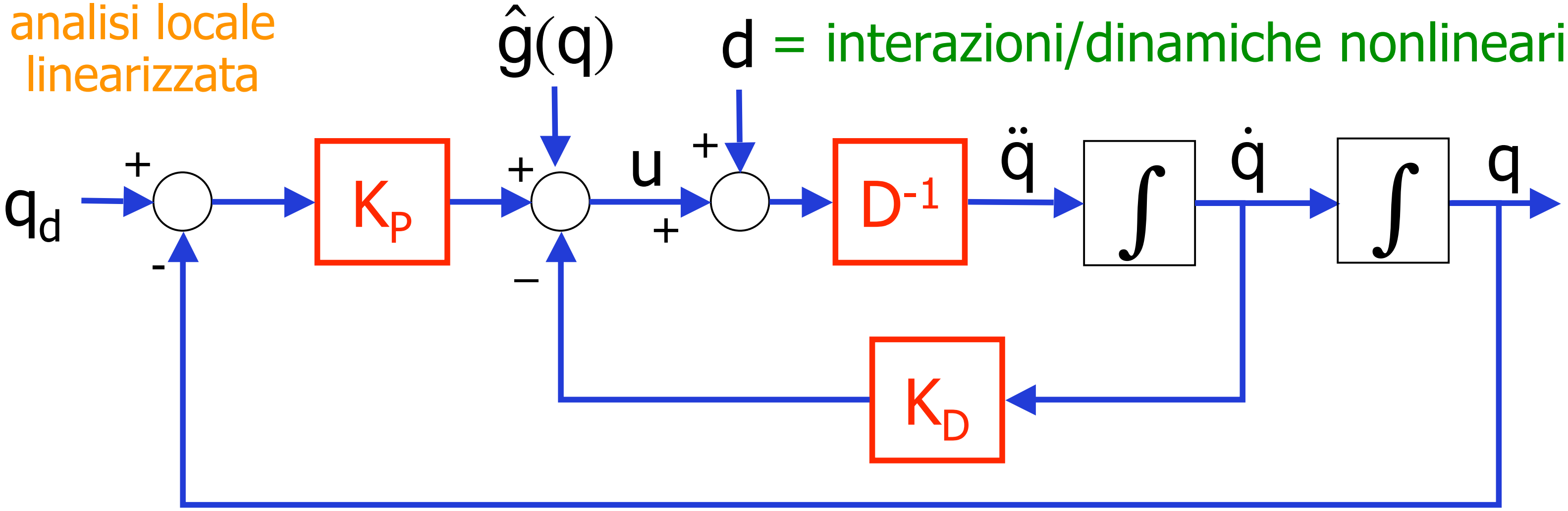
$$\boxed{u = K_P(q_d - q) - K_D\dot{q} + \hat{g}(q)} \qquad \hat{g}(q) \neq g(q)$$

si avrà in $q \to q^* \neq q_d,\ \dot{q} \to 0$ (in generale q^* non è unico, tranne se K_P è abbastanza grande), con errore a regime permanente

(in termini locali/lineari: nessun integratore a monte del "disturbo" costante)

Compensazione approssimata di g(q)

analisi locale linearizzata



$$B^{-1}(q) = D^{-1}\left(I + \tilde{D}^{-1}(q)\right)$$ (D^{-1} è la parte diagonale e costante di B^{-1})

"disturbo" $d = \tilde{D}^{-1}(q)u - \left(I + \tilde{D}^{-1}(q)\right)\left(c(q,\dot{q}) + g(q)\right)$ a regime è costante

"compensazione" $\hat{g}(q) \rightarrow \hat{g}(q^*)$ a regime è costante

se $\hat{g}(q) = g(q)$,
a regime
$u^*+d^*=0$
$\rightarrow q^*=q_d$

allora $K_P \rightarrow \infty$ ➡ $q^* \rightarrow q_d$

ma guadagni elevati portano a saturazioni …

Controllo PD + compensazione costante

poiché g(q) contiene solo termini trigonometrici e/o lineari in q, si ha la proprietà

finito

$$\exists \alpha > 0 : \quad \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right\| = \left\| \frac{\partial g}{\partial q} \right\| \leq \alpha, \quad \forall q$$

conseguenza

$$\| g(q) - g(q_d) \| \leq \alpha \| q - q_d \|$$

N.B. norma di matrice

$$\|A\| = A_M = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^T A\right)} \;\geq\; A_m = \sqrt{\lambda_{\min}\left(A^T A\right)}$$

legge di CONTROLLO LINEARE

$$u = K_P(q_d - q) - K_D \dot{q} + g(q_d)$$

K_P, $K_D > 0$ simmetriche

feedback lineare + feedforward costante

Controllo PD + compensazione costante
analisi stabilità

Teorema

Se $\boxed{K_{Pm} > \alpha}$, lo stato $(q_d, 0)$ del robot sotto il controllo PD ai giunti + compensazione costante di gravità è globalmente asintoticamente stabile

Dimostrazione

1. $(q_d,0)$ è l'unico stato di equilibrio ad anello chiuso

infatti, per $\dot{q} \equiv 0$, risulta $K_p e = g(q) - g(q_d)$

che può essere vero solo per $q = q_d$, in quanto, per $q \neq q_d$

$$\|K_P e\| \geq K_{Pm} \|e\| > \alpha \|e\| \geq \|g(q) - g(q_d)\|$$

Controllo PD + compensazione costante

analisi stabilità (cont)

posto $e = q_d - q,\; g(q) = \dfrac{\partial U}{\partial q}^T$, si considera la candidata di Lyapunov

$$\boxed{V = \tfrac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q} + \tfrac{1}{2}e^T K_P e + U(q) - U(q_d) + e^T g(q_d)}$$

2. V è convessa in $\dot{q}$ ed e, e si annulla solo in $e = \dot{q} = 0$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}^2} = B(q) > 0$$

$$\boxed{\partial e / \partial q = -I}$$

$$\frac{\partial V}{\partial e}^T = K_P e - \frac{\partial U}{\partial q}^T + g(q_d) = K_P e + g(q_d) - g(q)\, \boxed{= 0 \text{ per } q = q_d \text{ e } \dot{q} = 0}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial e^2} = K_P + \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0, \quad \text{perché} \quad \|K_P\| > \alpha \;\Rightarrow$$

$(q_d, 0)$ è un minimo globale di V (≥ 0)

Controllo PD + compensazione costante

analisi stabilità (fine)

derivando la $\boxed{V = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q} + \frac{1}{2}e^T K_P e + U(q) - U(q_d) + e^T g(q_d)}$

$$\dot{V} = \dot{q}^T\left(B\ddot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{B}\dot{q}\right) - e^T K_P \dot{q} + \frac{\partial U}{\partial q}\dot{q} - \dot{q}^T g(q_d)$$

$$= \underbrace{\dot{q}^T\left(u - S\dot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{B}\dot{q}\right.}_{\ldots\quad\ldots\ = 0} \left. - g(q)\right) - e^T K_P \dot{q} + \dot{q}^T\left(g(q) - g(q_d)\right)$$

$$= \cancel{\dot{q}^T K_P e} - \dot{q}^T K_D \dot{q} + \cancel{\dot{q}^T\left(g(q_d) - g(q)\right)} - \cancel{e^T K_P \dot{q}} + \cancel{\dot{q}^T\left(g(q) - g(q_d)\right)}$$

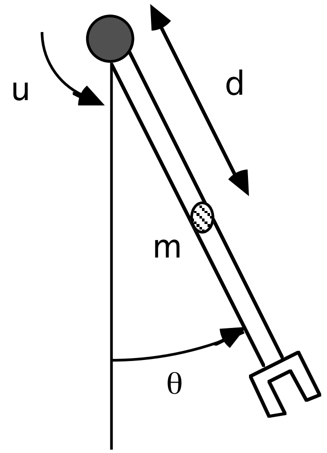
$$= -\dot{q}^T K_D \dot{q} \le 0$$

per $\dot{V} = 0$ $\quad(\Leftrightarrow \dot{q} = 0)$, si ha ad anello chiuso

$$B(q)\ddot{q} + g(q) = K_P e + g(q_d) \;\Rightarrow\; \ddot{q} = B^{-1}(q)\left[K_P e + g(q_d) - g(q)\right] = 0 \;\Leftrightarrow\; e = 0$$

applicando LaSalle segue la tesi

Esempio: singolo braccio



$$I\ddot{\theta} + mgd\sin\theta = u$$

si vuole regolare il braccio all'equilibrio superiore

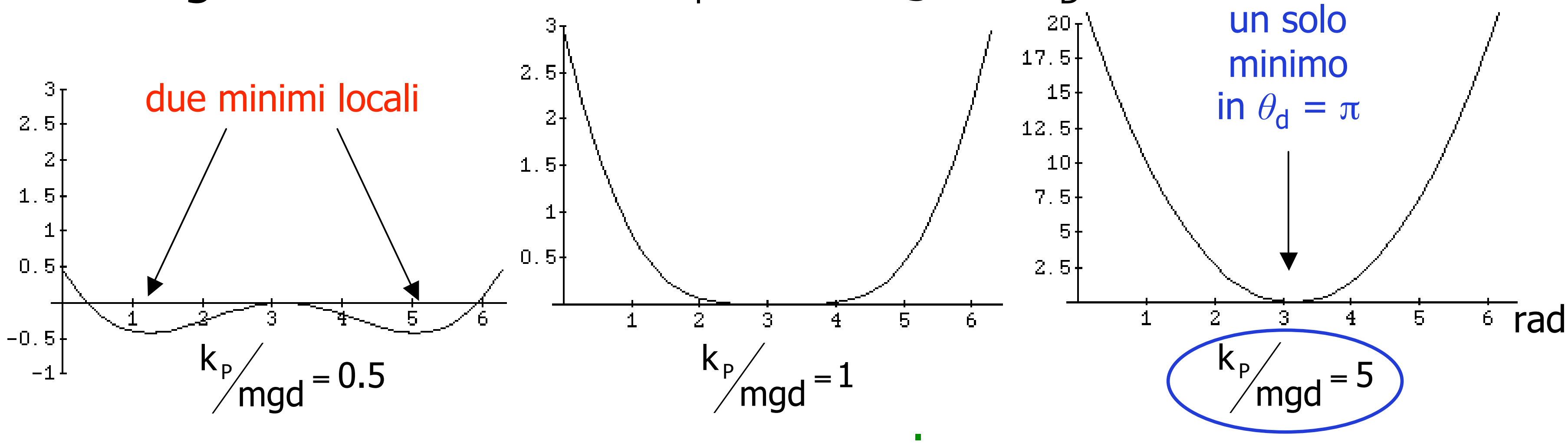
$$\theta_d = \pi \quad \rightarrow \quad g(\theta_d) = 0$$

controllo PD + compensazione costante (qui nulla)

$$u = k_P(\pi - \theta) - k_D\dot{\theta}$$

dal teorema, è sufficiente (qui anche necessario!) scegliere

$$k_P > \alpha = mgd, \quad k_D > 0$$



grafici di $V(\theta)$ (per $\dot{\theta} = 0$)

Compensazione costante approssimata

la legge approssimata

$$u = K_P e - K_D \dot{q} + \hat{g}(q_d)$$

porta, in ipotesi simili, ad un equilibrio q^*

- non è detto sia unico (soprattutto se K_P è piccolo)
- per $K_P \to \infty$, si ha $q^* \to q_d$

conclusione: in presenza di gravità, nei precedenti schemi di regolazione solo una conoscenza accurata del termine dinamico di gravità garantisce che l'errore si annulli quando si usano guadagni "finiti"

Controllo PID

- nei sistemi lineari, l'introduzione di un azione integrale è utilizzata per eliminare un errore costante a regime permanente
- nei robot, un PID può recuperare tale errore dovuto ad una incorretta/assente compensazione della gravità

la legge di controllo $$u(t) = K_P(q_d - q) + K_I\int_0^t (q_d - q)d\tau - K_D\dot{q}$$

- è indipendente dalla conoscenza del modello dinamico del robot
- se l'equilibrio desiderato è asintoticamente stabile sotto controllo PID, a regime, l'integratore è "carico" al valore $\boxed{K_I\int_0^\infty (q_d - q)d\tau = g(q_d)}$
- si riesce a dimostrare solo la stabilità asintotica locale, ossia per $q(0) \in \Delta(q_d)$, sotto complesse relazioni fra K_P, K_I, K_D ed $e(0)$

Controllo PID saturato

- si può invece a dimostrare la stabilità asintotica globale di $(q_d,0)$, sotto limitazioni inferiori per K_P, K_I, K_D (che dipendono da "bounds" sui vari termini del modello dinamico), per la legge PID nonlineare

$$u(t) = K_P(q_d - q) + K_I \int_0^t \phi(q_d - q)d\tau - K_D\dot{q}$$

dove $\phi(q_d - q)$ è una funzione tipo saturazione, come ad esempio

$$\phi(x) = \begin{cases} \sin x & |x| \le \pi/2 \\ 1 & x > \pi/2 \\ -1 & x < -\pi/2 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \phi(x) = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(vedi articolo R. Kelly, IEEE TAC, 1998; nel materiale didattico)

Limiti comuni dei regolatori per robot

- il tempo di risposta per raggiungere il regime desiderato non è facilmente prevedibile a priori
  - dipende dalla dinamica del robot, dai guadagni del PD/PID, dallo spostamento richiesto e dalla zona di moto nello spazio di lavoro
  - il termine integrale (se presente) richiede tempo per "scaricarsi" dalla storia dell'errore accumulato durante il transitorio
    - errori iniziali grandi "caricano" troppo il termine integrale
    - intuitivamente, è il motivo del successo del PID saturato
- lo sforzo di controllo nei primi istanti di moto può essere molto superiore a quello richiesto a regime
  - soprattutto per guadagni elevati di posizione
  - può portare a saturazione degli attuatori del robot

Regolatori per robot industriali

- nei robot industriali, anche in problemi di posizionamento, il pianificatore genera una traiettoria di riferimento $q_r(t)$
  - "smooth", con tempo di trasferta T specificato dall'utente
  - interpola la posizione iniziale con quella desiderata

$$q_r(0)=q(0) \qquad q_r(t\geq T) = q_d$$

- $q_r(t)$ viene usata nella legge di controllo

$$u = K_P\left(q_r(t) - q\right) + K_D\left(\dot{q}_r(t) - \dot{q}\right) + g(q)$$

ad es., PD con compensazione

spesso trascurato

  - in questo modo, l'errore è inizialmente nullo
  - il moto si mantiene solo "intorno" alla traiettoria di riferimento fino a T, ma per lo più con errori di posizione piccoli
  - la regolazione finale è un problema "locale" ($e(T)=q_d-q(T)$ piccolo)

Confronto qualitativo

- nessuna saturazione dei comandi: guadagni potenzialmente più grandi
- tempo di assestamento meglio prevedibile: convergenza localmente esponenziale (sull'approssimazione lineare intorno a $(q_d,0)$)
- il "fine tuning" dei guadagni è comunque un'operazione lunga e delicata