Corso di Robotica 2

Modello dinamico dei robot:

analisi, estensioni, proprietà, identificazione, usi

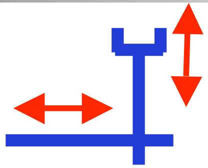
Prof. Alessandro De Luca

Dipartimento di Informatica
e Sistemistica Antonio Ruberti

Sapienza
Università di Roma

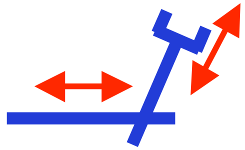
Analisi accoppiamenti inerziali

- robot cartesiano



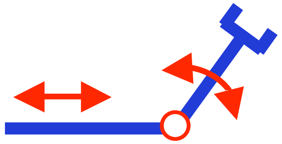
$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

- robot cartesiano “diagonale”



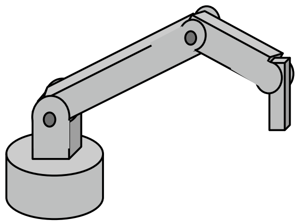
$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

- robot PR



$$B(q) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}(q_2) \\ b_{21}(q_2) & b_{22} \end{pmatrix}$$

- robot 3R articolato



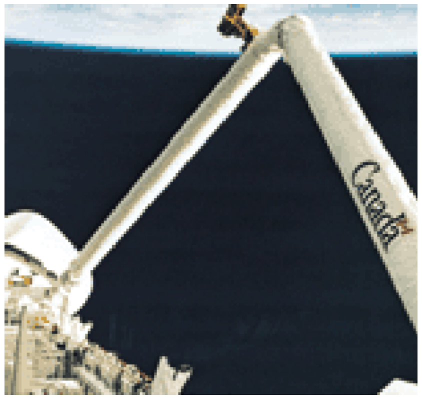
$$B(q) = \begin{pmatrix} b_{11}(q_2,q_3) & 0 & 0 \\ 0 & b_{22}(q_3) & b_{23}(q_3) \\ 0 & b_{23}(q_3) & b_{33} \end{pmatrix}$$

- il modello dinamico risulta lineare se
  - $g \equiv 0$
  - B costante $\Rightarrow c \equiv 0$ ⇨ $d = 0$ in PR, $d_2 = 0$ in 2R ⇨ baricentro braccio 2 su asse giunto 2

Analisi termine di gravità

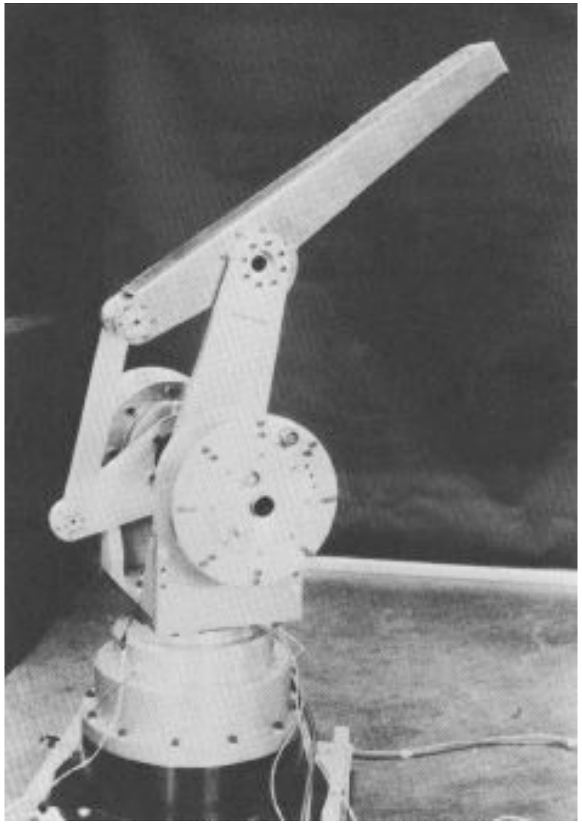
- bilanciamento statico
  - distribuzione masse e inerzie (inclusi i motori)
- compensazione meccanica
  - sistemi articolati di molle
  - catene cinematiche chiuse
- assenza di gravità
  - applicazioni spaziali
  - U costante (moto su piano orizzontale)

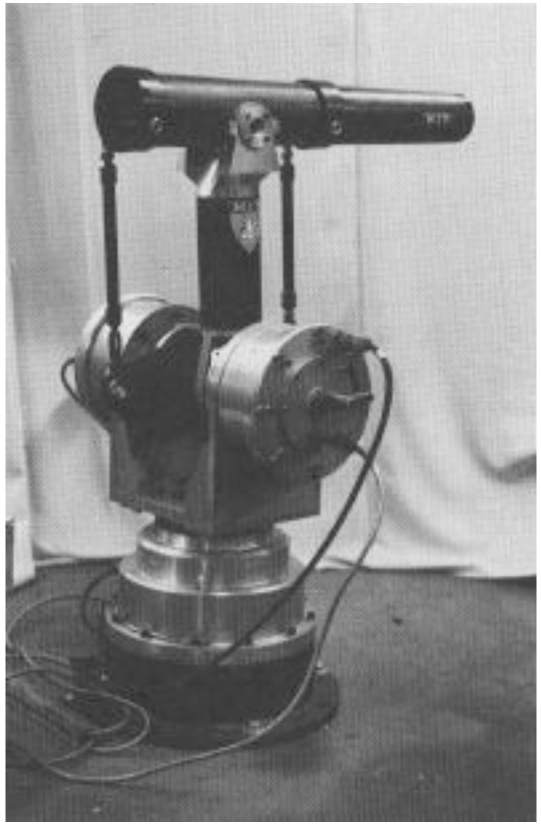
$$\Rightarrow \quad g(q) \approx 0$$



Robot con maglie chiuse

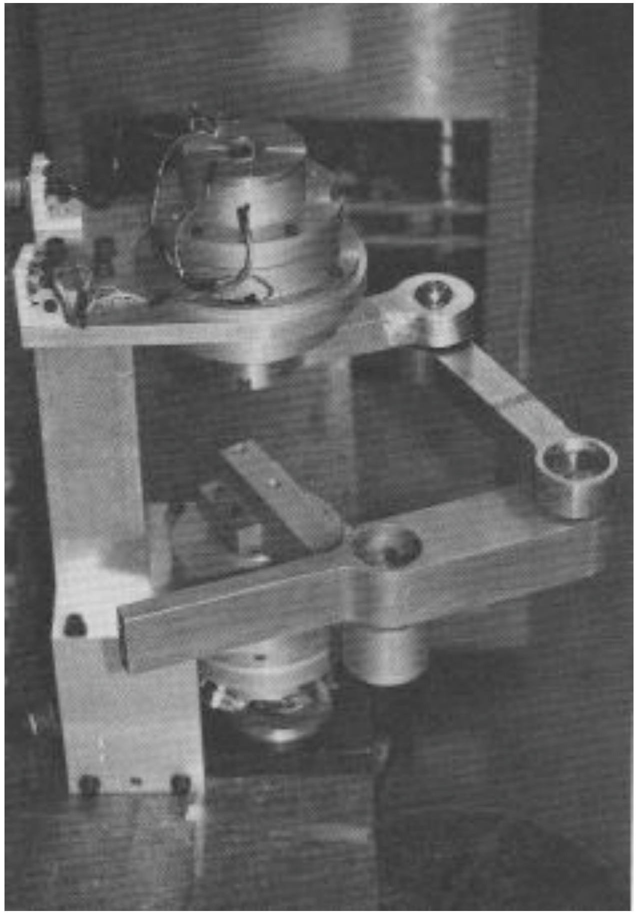
Comau Smart NJ130



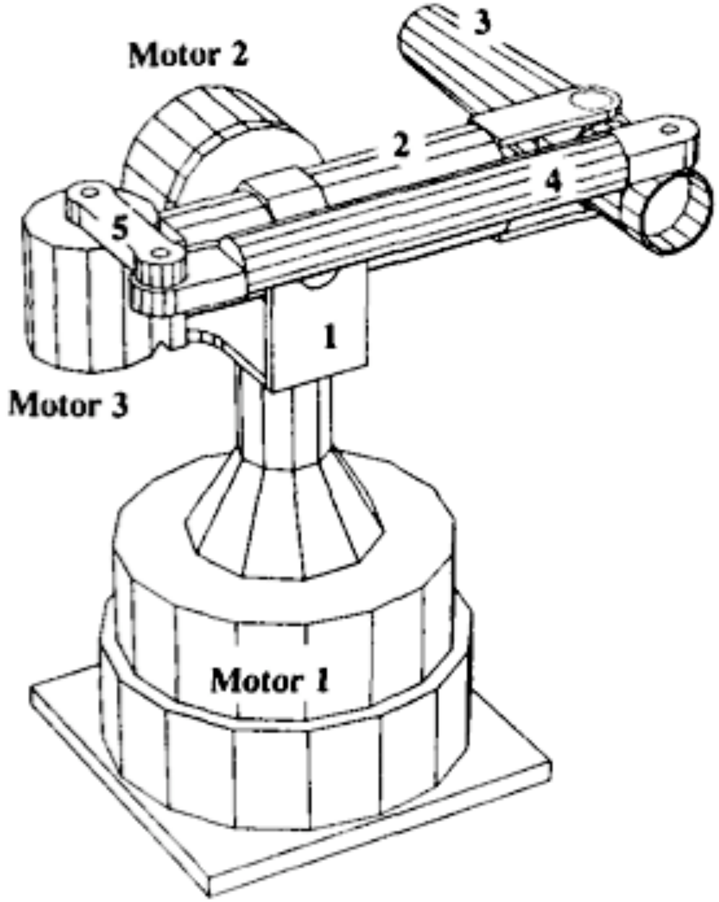


MIT Direct Drive Mark II e Mark III

Robot con maglie chiuse



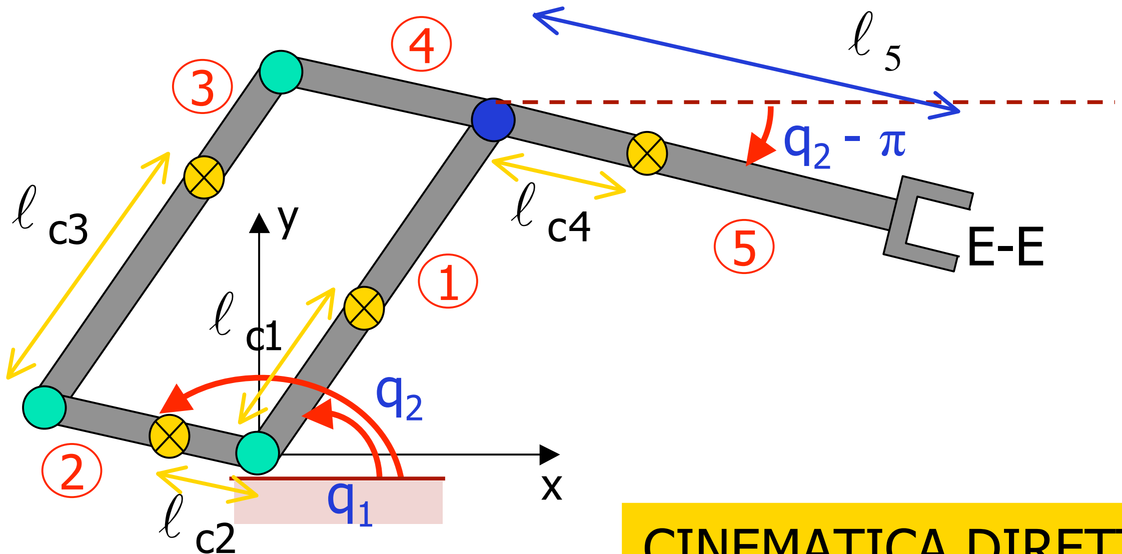
MIT Direct Drive Mark IV
(five-bar linkage planare)



UMinnesota Direct Drive Arm
(five-bar linkage spaziale)

Robot a parallelogramma

cinematica e dinamica (planare)



baricentri:

ℓ_{ci} arbitrarie

parallelogramma:

$\ell_1 = \ell_3$

$\ell_2 = \ell_4$

CINEMATICA DIRETTA

$$p_{EE} = \begin{pmatrix} \ell_1 c_1 \\ \ell_1 s_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell_5 \cos(q_2 - \pi) \\ \ell_5 \sin(q_2 - \pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 c_1 \\ \ell_1 s_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ell_5 c_2 \\ \ell_5 s_2 \end{pmatrix}$$

POSIZIONI BARICENTRI

$$p_{c1} = \begin{pmatrix} \ell_{c1} c_1 \\ \ell_{c1} s_1 \end{pmatrix} \qquad p_{c2} = \begin{pmatrix} \ell_{c2} c_2 \\ \ell_{c2} s_2 \end{pmatrix} \qquad p_{c3} = \begin{pmatrix} \ell_2 c_2 \\ \ell_2 s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell_{c3} c_1 \\ \ell_{c3} s_1 \end{pmatrix} \qquad p_{c4} = \begin{pmatrix} \ell_1 c_1 \\ \ell_1 s_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ell_{c4} c_2 \\ \ell_{c4} s_2 \end{pmatrix}$$

Calcolo energia cinetica

VELOCITA' LINEARI E ANGOLARI

$$v_{c1} = \begin{pmatrix} -\ell_{c1} s_1 \\ \ell_{c1} c_1 \end{pmatrix} \dot{q}_1 \qquad v_{c2} = \begin{pmatrix} -\ell_{c2} s_2 \\ \ell_{c2} c_2 \end{pmatrix} \dot{q}_2 \qquad v_{c3} = \begin{pmatrix} -\ell_{c3} s_1 \\ \ell_{c3} c_1 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} -\ell_2 s_2 \\ \ell_2 s_2 \end{pmatrix} \dot{q}_2$$

$$v_{c4} = \begin{pmatrix} -\ell_1 s_1 \\ \ell_1 c_1 \end{pmatrix} \dot{q}_1 - \begin{pmatrix} -\ell_{c4} s_2 \\ \ell_{c4} c_2 \end{pmatrix} \dot{q}_2 \qquad \omega_1 = \omega_3 = \dot{q}_1 \qquad \omega_2 = \omega_4 = \dot{q}_2$$

T_i

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \ell_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{1,zz} \dot{q}_1^2 \qquad T_2 = \frac{1}{2} m_2 \ell_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} I_{2,zz} \dot{q}_2^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} I_{3,zz} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 \left(\ell_2^2 \dot{q}_2^2 + \ell_{c3}^2 \dot{q}_1^2 + 2 \ell_2 \ell_{c3} c_{2-1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \right)$$

$$T_4 = \frac{1}{2} I_{4,zz} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_4 \left(\ell_1^2 \dot{q}_1^2 + \ell_{c4}^2 \dot{q}_2^2 - 2 \ell_1 \ell_{c4} c_{2-1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \right)$$

Matrice di inerzia

$$T = \sum_{i=1}^{4} T_i = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q}$$

$$B(q) = \begin{pmatrix} I_{1,zz} + m_1\ell_{c1}^2 + I_{3,zz} + m_3\ell_{c3}^2 + m_4\ell_1^2 & \text{symm} \\ (m_3\ell_2\ell_{c3} - m_4\ell_1\ell_{c4})c_{2-1} & I_{2,zz} + m_2\ell_{c2}^2 + I_{4,zz} + m_4\ell_{c4}^2 + m_3\ell_2^2 \end{pmatrix}$$

condizione strutturale nel progetto meccanico

$$m_3\ell_2\ell_{c3} = m_4\ell_1\ell_{c4} \quad (*)$$

⇓

B(q) diagonale e costante ⇒ termini centrifughi e di Coriolis ≡ nulli

modello dinamico (a meno di g(q)) meccanicamente DISACCOPPIATO e LINEARE

vantaggio per il progetto del controllore del moto!

Energia potenziale e termini di gravità

dalle componenti y dei vettori p_{ci}

U_i

$$U_1 = m_1 g_0 \ell_{c1} s_1 \qquad U_2 = m_2 g_0 \ell_{c2} s_2$$

$$U_3 = m_3 g_0 \left(\ell_2 s_2 + \ell_{c3} s_1\right) \qquad U_4 = m_4 g_0 \left(\ell_1 s_1 - \ell_{c4} s_2\right)$$

$$U = \sum_{i=1}^{4} U_i$$

$$g(q) = \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)^T = \begin{pmatrix} g_0(m_1 \ell_{c1} + m_3 \ell_{c3} + m_4 \ell_1) c_1 \\ g_0(m_2 \ell_{c2} + m_3 \ell_2 - m_4 \ell_{c4}) c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(q_1) \\ g_2(q_2) \end{pmatrix}$$

componenti disaccoppiate

nel caso (*) $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} b_{11}\ddot{q}_1 + g_1(q_1) &= u_1 \\ b_{22}\ddot{q}_2 + g_2(q_2) &= u_2 \end{aligned}}$$

u_i coppia (non conservativa) che compie lavoro su q_i

ulteriori condizioni strutturali nel progetto meccanico portano a $g(q) \equiv 0$

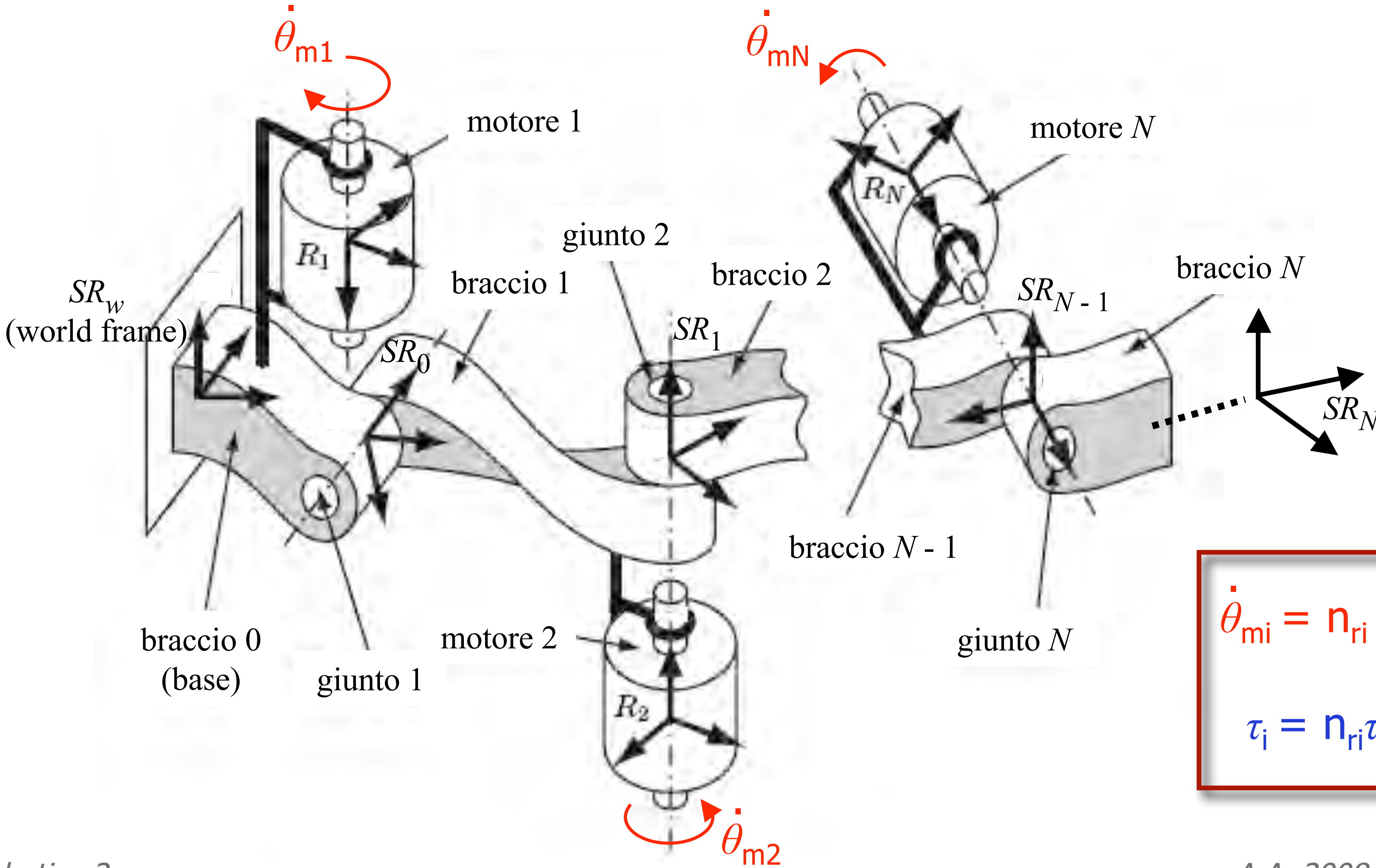
Aggiunta di termini dinamici

- fenomeni dissipativi per attrito ai giunti
  - viscoso, secco, di primo distacco, di Coulomb …
  - effetti locali ai giunti
  - di difficile modellizzazione in generale, tranne per

$$\boxed{u_{V,i} = -F_{V,i}\dot{q}_i} \qquad \boxed{u_{S,i} = -F_{S,i}\,\mathrm{sgn}(\dot{q}_i)}$$

- inclusione degli attuatori elettrici (visti come corpi rigidi)
  - motore i montato sul braccio i-1 (o precedente), in genere in asse con il giunto i
  - massa motore (bilanciata sull'asse) inclusa in quella del braccio
  - inerzia (del rotore) da aggiungere nell'energia cinetica
  - trasmissione con riduttori (spesso con rapporto elevato)
  - a volte più motori cooperano per muovere più giunti: matrice di trasmissione T con accoppiamenti (elementi fuori diagonale)

Dislocazione dei motori



$$\dot{\theta}_{mi} = n_{ri}\, \dot{q}_i$$

$$\tau_i = n_{ri} \tau_{mi}$$

Modello dinamico finale

- semplificazione: nella parte rotazionale dell'energia cinetica, si considera solo la velocità di "spinning" del rotore

$$T_{mi} = \frac{1}{2} I_{mi} \dot{\theta}_{mi}^2 = \frac{1}{2} I_{mi} n_{ri}^2 \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} B_{mi} \dot{q}_i^2 \qquad T_m = \sum_{i=1}^{N} T_{mi} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \underbrace{B_m}_{\text{diagonale}} \dot{q}$$

- con tutti i termini aggiuntivi, il modello diventa

$$\Big(B(q) + \underbrace{B_m}_{\text{costante}}\Big)\ddot{q} + c(q,\dot{q}) + g(q) + F_V \dot{q} + F_S \,\mathrm{sgn}(\dot{q}) = \tau$$

costante → non fornisce contributi in c

$F_V > 0$, $F_S > 0$ diagonali

coppie motrici (a valle dei riduttori)

Parametrizzazione lineare della dinamica

è sempre possibile riscrivere il modello dinamico nella forma

matrice di regressione

a = vettore dei coefficienti dinamici

$$\boxed{B(q)\ddot{q} + c(q,\dot{q}) + g(q) = \underbrace{Y(q,\dot{q},\ddot{q})}_{N \times p}\, \underbrace{a}_{p \times 1} = u}$$

ESEMPIO 2R

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 & c_2(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - s_2(\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2) & \ddot{q}_2 & c_1 & c_{12} \\ 0 & c_2\ddot{q}_1 + s_2\dot{q}_1^2 & \ddot{q}_2 & 0 & c_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

N.B.: con attrito viscoso e secco, quattro coefficienti in più…

Coefficienti dinamici del robot 2R

$$a_1 = I_{1,zz} + m_1 d_1^2 + I_{2,zz} + m_2 d_2^2 + m_2 \ell_1^2$$

$$a_2 = m_2 \ell_1 d_2$$

$$a_3 = I_{3,zz} + m_2 d_2^2$$

$$a_4 = g_0 \left(m_1 d_1 + m_2 \ell_1 \right)$$

$$a_5 = g_0 m_2 d_2$$

10 parametri dinamici per ogni braccio (corpo rigido): m [1], r_c [3], I [6]

si combinano per fornire i coefficienti dinamici del robot: tutti e soli quelli rilevanti nel modello dinamico del robot

N.B. se g_0 noto e ℓ_1 noto (cinematica!), allora

$$a_2 = \ell_1 m_2 d_2 = \ell_1 a_2' \qquad a_5 = g_0 m_2 d_2 = g_0 a_2' \qquad \rightarrow \qquad a_2' = m_2 d_2$$

sono sufficienti 4 coefficienti!

è importante determinare una parametrizzazione minima per

- l'identificazione sperimentale dei coefficienti dinamici
- il controllo adattativo del moto in presenza di incertezze parametriche

Identificazione dinamica

- per "usare" il modello, occorre conoscere i valori numerici dei coefficienti dinamici del robot
  - al più, solo i principali parametri dinamici sono forniti dal costruttore
- stime approssimate sono deducibili con strumenti CAD
- i coefficienti di attrito sono (lentamente) variabili nel tempo
  - lubrificazione dei giunti/trasmissioni
- in presenza di un "payload" (carico solidale all'E-E)
  - variano i 10 parametri dell'ultimo braccio
  - questo si riflette in variazioni di tutti (o quasi) i coefficienti dinamici
- necessari esperimenti preliminari di identificazione
  - robot in movimento (aspetti "dinamici", non statici o geometrici!)
  - identificabili solo i coefficienti dinamici (ma non tutti i parametri..)

Esperimenti di identificazione

1. scegliere una traiettoria di moto "eccitante"
   - esplora lo spazio di lavoro e coinvolge tutta la dinamica del robot
   - periodica, con molteplici componenti frequenziali
2. eseguire il moto in modo approssimato con un controllore
   - sfruttando l'informazione disponibile sul modello
   - in genere, $u = K_P(q_d-q)+K_D(\dot{q}_d-\dot{q})$ (PD, nessuna informazione)
3. misurare q (encoder) e, se disponibile, $\dot{q}$ in n_c istanti
   - accelerazione (oltre a velocità) ricavabile fuori linea mediante differenziazione numerica (possibile l'uso di filtri non causali)
4. con tali misure/stime e i comandi applicati, valutare il regressore Y a sinistra e la parte destra nell'espressione

$$Y(q(t_k),\dot{q}(t_k),\ddot{q}(t_k))\, a = u(t_k) \qquad k = 1,\dots, n_c$$

Identificazione ai minimi quadrati

- costruire il sistema lineare di equazioni

$$n_c \times N \updownarrow \begin{pmatrix} Y(q(t_1),\dot{q}(t_1),\ddot{q}(t_1)) \\ \vdots \\ Y(q(t_{n_c}),\dot{q}(t_{n_c}),\ddot{q}(t_{n_c})) \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} u(t_1) \\ \vdots \\ u(t_{n_c}) \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\bar{Y} a = \bar{u}}$$

- traiettorie "eccitanti" e selezione del numero di campioni ($n_c \times N \gg p$) e loro posizione garantiscono rango($\bar{Y}$) = p
- risolvere mediante pseudo-inversione della $\bar{Y}$

$$a = \bar{Y}^{\#}\,\bar{u} = \left(\bar{Y}^T \bar{Y}\right)^{-1} \bar{Y}^T \bar{u}$$

- eventualmente si può "pesare" la pseudo-inversa, per tener conto di livelli differenti di rumore sulle misure

Dinamica inversa

- data una traiettoria desiderata di moto $q_d(t)$
  - differenziabile due volte ($\exists\ \ddot{q}_d(t)$)
  - eventualmente ottenuta da una $r_d(t)$ cartesiana, mediante inversione cinematica (differenziale)

  la coppia motrice necessaria ad eseguirla è

$$\tau_d = \left(B(q_d) + B_m\right)\ddot{q}_d + c(q_d,\dot{q}_d) + g(q_d) + F_V\,\dot{q}_d + F_S\,\mathrm{sgn}(\dot{q}_d)$$

- questo calcolo algebrico ($\forall t$) non è però efficiente con l'approccio Lagrangiano
  - termini simbolici molto lunghi
  - in tempo reale, meglio il calcolo numerico con Newton-Eulero
  - utile per il controllo (feedforward nominale)

Equazioni di stato
(Dinamica diretta)

modello dinamico Lagrangiano

$$B(q)\ddot{q} + c(q,\dot{q}) + g(q) = u$$

N equazioni differenziali del 2° ordine

definendo il vettore di variabili di stato $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N}$

equazioni di stato

$$\boxed{\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -B^{-1}(x_1)\left[c(x_1,x_2) + g(x_1)\right] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B^{-1}(x_1) \end{pmatrix} u}$$

$$= \underbrace{f(x)}_{2N\times 1} + \underbrace{G(x)}_{2N\times N}u$$

2N equazioni differenziali del 1° ordine

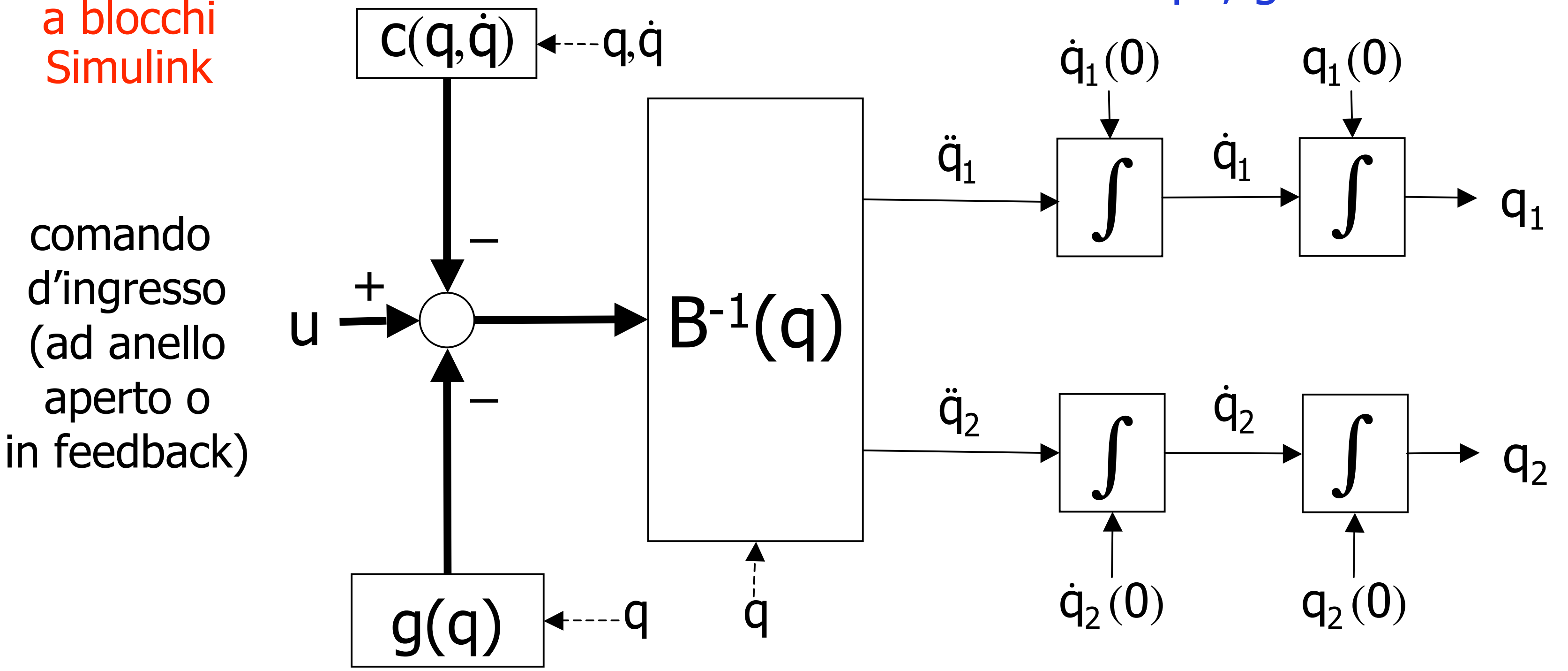
altra possibile scelta $\boxed{\tilde{x} = \begin{pmatrix} q \\ B(q)\dot{q} \end{pmatrix}}$ ← momento generalizzato

$\dot{\tilde{x}} = \ldots$ (esercizio)

Simulazione dinamica

schema a blocchi Simulink

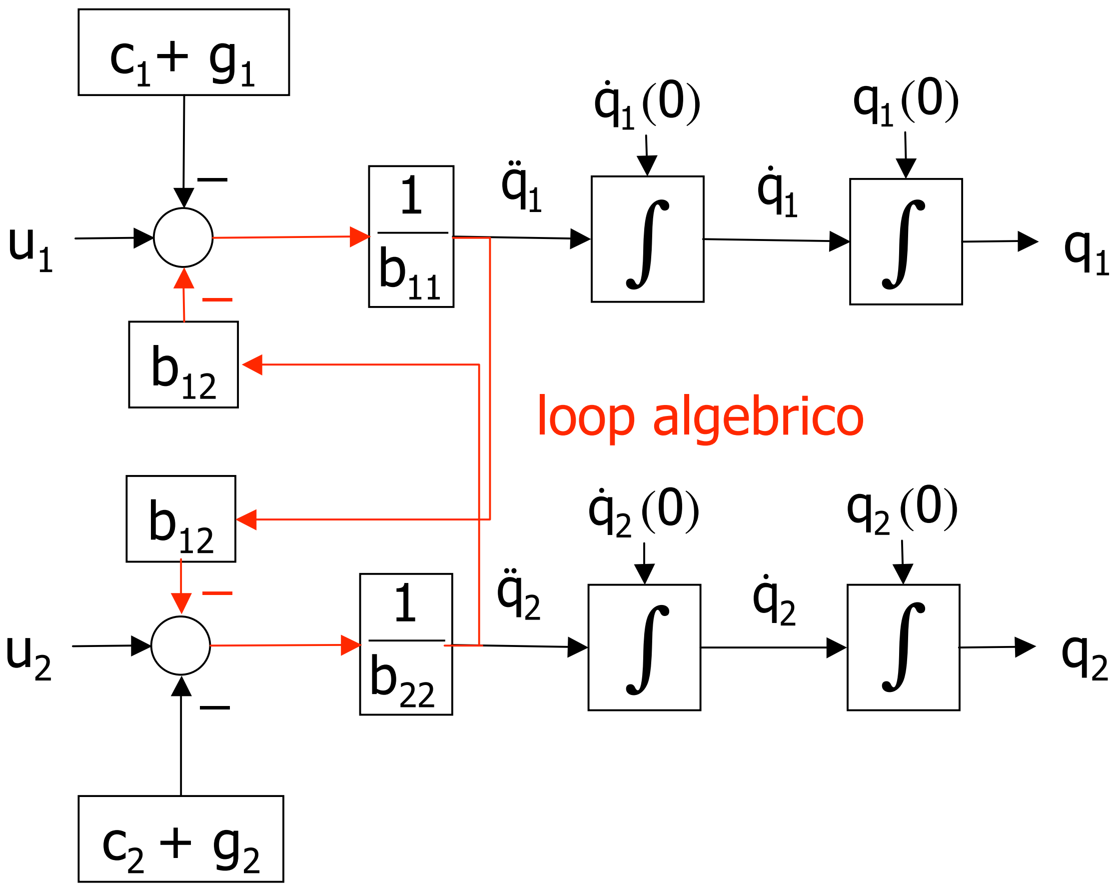
qui, generico robot a 2 dof



inclusa "inv(B)"

- inizializzazione (coefficienti dinamici e stato iniziale)
- chiamate a funzioni Matlab per valutazione numerica termini modello
- scelta metodo di integrazione (e suoi parametri)

… una realizzazione scorretta



NO!
viola il
principio di
causalità

occorre invertire l'intera matrice di inerzia
(non solo i suoi termini in diagonale)

Linearizzazione approssimata

- si può ricavare un modello dinamico lineare del robot, valido localmente intorno alla condizione operativa
  - utile per l'analisi e il progetto di controllori locali/lineari
  - approssimazione mediante sviluppo di Taylor al primo ordine
  - linearizzazione intorno ad uno stato di equilibrio (constante) o intorno ad una traiettoria di equilibrio (nominale, tempo variante)
  - si può procedere lavorando sulle equazioni di stato, ma conviene direttamente usare il modello del secondo ordine
    - il risultato è lo stesso, ma la derivazione è più facile…

stato di equilibrio $(q,\dot{q}) = (q_e,0)$ [$\ddot{q}_e=0$] $\Rightarrow$ $g(q_e) = u_e$

traiettoria di equilibrio $(q,\dot{q}) = (q_d(t),\dot{q}_d(t))$

$$\Rightarrow \quad B(q_d)\ddot{q}_d + c(q_d,\dot{q}_d) + g(q_d) = u_d$$

Linearizzazione in un punto

- variazioni intorno ad uno stato di equilibrio

$$q = q_e + \Delta q \qquad \dot{q} = \dot{q}_e + \Delta\dot{q} = \Delta\dot{q} \qquad \ddot{q} = \ddot{q}_e + \Delta\ddot{q} = \Delta\ddot{q} \qquad u = u_e + \Delta u$$

- tenendo conto della dipendenza quadratica di c dalle velocità (termini ininfluenti intorno a velocità nulla)

$$B(q_e)\Delta\ddot{q} + \cancel{g(q_e)} + \underbrace{\left.\frac{\partial g}{\partial q}\right|_{q=q_e}}_{G(q_e)} \Delta q + o\left(\cancel{\|\Delta q\|}, \|\Delta\dot{q}\|\right) = \cancel{u_e} + \Delta u$$

infinitesimi di ordine superiore al primo

- nello spazio di stato

$$\Delta x = \begin{pmatrix} \Delta q \\ \Delta\dot{q} \end{pmatrix} \qquad \Delta\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -B^{-1}(q_e)G(q_e) & 0 \end{pmatrix}\Delta x + \begin{pmatrix} 0 \\ B^{-1}(q_e) \end{pmatrix}\Delta u = \bar{A}\,\Delta x + \bar{B}\,\Delta u$$

Linearizzazione lungo traiettoria

- variazioni intorno ad una traiettoria di equilibrio

$$q = q_d + \Delta q \qquad \dot{q} = \dot{q}_d + \Delta\dot{q} \qquad \ddot{q} = \ddot{q}_d + \Delta\ddot{q} \qquad u = u_d + \Delta u$$

- sviluppando i vari termini nel modello dinamico

$$B(q_d + \Delta q)\Delta\ddot{q} + c(q_d + \Delta q, \dot{q}_d + \Delta\dot{q}) + g(q_d + \Delta q) = u_d + \Delta u$$

$$B(q_d + \Delta q) \cong B(q_d) + \sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\partial b_i}{\partial q}\right|_{q=q_d} e_i^T \Delta q$$

i-esima riga della matrice Identità

$$c(q_d + \Delta q, \dot{q}_d + \Delta\dot{q}) \cong c(q_d, \dot{q}_d) + \overbrace{\left.\frac{\partial c}{\partial q}\right|_{\substack{q=q_d \\ \dot{q}=\dot{q}_d}}}^{C_1(q_d, \dot{q}_d)} \Delta q + \underbrace{\left.\frac{\partial c}{\partial \dot{q}}\right|_{\substack{q=q_d \\ \dot{q}=\dot{q}_d}}}_{C_2(q_d, \dot{q}_d)} \Delta\dot{q}$$

$$g(q_d + \Delta q) \cong g(q_d) + G(q_d)\Delta q$$

Linearizzazione lungo traiettoria (cont)

- semplificando…

$$B(q_d)\Delta\ddot{q} + C_2(q_d,\dot{q}_d)\Delta\dot{q} + D(q_d,\dot{q}_d,\ddot{q}_d)\Delta q = \Delta u$$

con

$$D(q_d,\dot{q}_d,\ddot{q}_d) = G(q_d) + C_1(q_d,\dot{q}_d) + \sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\partial b_i}{\partial q}\right|_{q=q_d} \ddot{q}_d\, e_i^T$$

- nello spazio di stato

$$\Delta\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -B^{-1}(q_d)D(q_d,\dot{q}_d,\ddot{q}_d) & -B^{-1}(q_d)C_2(q_d,\dot{q}_d) \end{pmatrix}\Delta x + \begin{pmatrix} 0 \\ B^{-1}(q_d) \end{pmatrix}\Delta u$$

$$= \bar{A}(t)\,\Delta x + \bar{B}(t)\,\Delta u$$

un sistema lineare, ma tempo variante!!

Trasformazione di coordinate

$$q \in \mathbb{R}^N \qquad \boxed{B(q)\ddot{q} + c(q,\dot{q}) + g(q) = B(q)\ddot{q} + n(q,\dot{q}) = u_q} \quad (1)$$

se si vogliono utilizzare nuove coordinate generalizzate p

$$p \in \mathbb{R}^N \qquad \boxed{p = f(q)} \Rightarrow \boxed{q = f^{-1}(p)}$$

$$\boxed{\dot{p} = \frac{\partial f(q)}{\partial q}\dot{q} = J(q)\dot{q}} \Rightarrow \boxed{\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{p}}, \boxed{u_q = J^T(q)u_p} \Rightarrow (1)$$

$$\boxed{\ddot{p} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q}} \Rightarrow \boxed{\ddot{q} = J^{-1}(q)\left[\ddot{p} - \dot{J}(q)J^{-1}(q)\dot{p}\right]}$$

$$\boxed{B(q)J^{-1}(q)\ddot{p} - B(q)J^{-1}(q)\dot{J}(q)J^{-1}(q)\dot{p} + n(q,\dot{q}) = J^T(q)u_p}$$

$J^{-T}(q)\cdot$ premoltiplicando tutta l'equazione...

Trasformazione del modello

$$\boxed{J^{-T}(q)B(q)J^{-1}(q)\ddot{p} + J^{-T}(q)\left(n(q,\dot{q}) - B(q)J^{-1}(q)\dot{J}(q)J^{-1}(q)\dot{p}\right) = u_p}$$

$\boxed{q \rightarrow p}$

per calcolo e analisi queste sostituzioni non sono necessarie

$\boxed{q,\dot{q} \rightarrow p,\dot{p}}$

forze generalizzate non conservative che compiono lavoro sulle p

$$\boxed{B_p(p)\ddot{p} + c_p(p,\dot{p}) + g_p(p) = u_p}$$

$$B_p = J^{-T}BJ^{-1}$$

simmetrica e definita positiva (fuori da singolarità)

$$g_p = J^{-T}g$$

$$c_p = J^{-T}\left(c - BJ^{-1}\dot{J}J^{-1}\dot{p}\right) = J^{-T}c - B_p\dot{J}J^{-1}\dot{p}$$

dipendenza quadratica da $\dot{p}$

$$c_p(p,\dot{p}) = S_p(p,\dot{p})\dot{p} \qquad \dot{B}_p - 2S_p \text{ antisimmetrica}$$

se p = posa dell'E-E, questo è il modello dinamico cartesiano del robot