Corso di Robotica 2

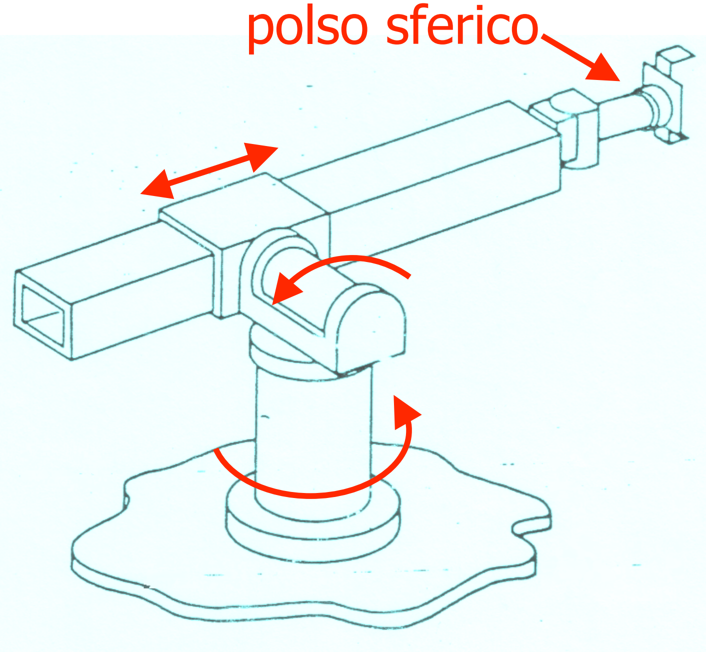
Modello dinamico dei robot:
algoritmo di calcolo energia cinetica

Prof. Alessandro De Luca

Dipartimento di Informatica e Sistemistica Antonio Ruberti

Sapienza Università di Roma

Elemento $b_{11}(q)$ dello Stanford arm



$$
\begin{aligned}
B_{11} = {} & m_1 k_{122}^2 \\
& + m_2 \left[k_{211}^2 s^2\theta_2 + k_{233}^2 c^2\theta_2 + r_2(2\bar{y}_2 + r_2) \right] \\
& + m_3 \left[k_{322}^2 s^2\theta_2 + k_{333}^2 c^2\theta_2 + r_3(2\bar{z}_3 + r_3) s^2\theta_2 + r_2^2 \right] \\
& + m_4 \Big\{ \tfrac{1}{2} k_{411}^2 \left[s^2\theta_2 (2s^2\theta_4 - 1) + s^2\theta_4 \right] + \tfrac{1}{2} k_{422}^2 (1 + c^2\theta_2 + s^2\theta_4) \\
& \quad + \tfrac{1}{2} k_{433}^2 \left[s^2\theta_2 (1 - 2s^2\theta_4) - s^2\theta_4 \right] + r_3^2 s^2\theta_2 + r_2^2 - 2\bar{y}_4 r_3 s^2\theta_2 + 2\bar{z}_4 (r_2 s\theta_4 + r_3 s\theta_2 c\theta_2 c\theta_4) \Big\} \\
& + m_5 \Big\{ \tfrac{1}{2} (-k_{511}^2 + k_{522}^2 + k_{533}^2) \left[(s\theta_2 s\theta_5 - c\theta_2 s\theta_4 c\theta_5)^2 + c^2\theta_4 c^2\theta_5 \right] \\
& \quad + \tfrac{1}{2} (k_{511}^2 - k_{522}^2 + k_{533}^2)(s^2\theta_4 + c^2\theta_2 c^2\theta_4) \\
& \quad + \tfrac{1}{2} (k_{511}^2 + k_{522}^2 - k_{533}^2) \left[(s\theta_2 c\theta_5 + c\theta_2 s\theta_4 s\theta_5)^2 + c^2\theta_4 s^2\theta_5 \right] + r_3^2 s^2\theta_2 + r_2^2 \\
& \quad + 2\bar{z}_5 \left[r_3 (s^2\theta_2 c\theta_5 + s\theta_2 s\theta_4 c\theta_4 s\theta_5) - r_2 c\theta_4 s\theta_5 \right] \Big\} \\
& + m_6 \Big\{ \tfrac{1}{2} (-k_{611}^2 + k_{622}^2 + k_{633}^2) \left[(s\theta_2 s\theta_5 c\theta_6 - c\theta_2 s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - c\theta_2 c\theta_4 s\theta_6)^2 + (c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6)^2 \right] \\
& \quad + \tfrac{1}{2} (k_{611}^2 - k_{622}^2 + k_{633}^2) \left[(c\theta_2 s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - s\theta_2 s\theta_5 s\theta_6 - c\theta_2 c\theta_4 c\theta_6)^2 + (c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + s\theta_4 c\theta_6)^2 \right] \\
& \quad + \tfrac{1}{2} (k_{611}^2 + k_{622}^2 - k_{633}^2) \left[(c\theta_2 s\theta_4 s\theta_5 + s\theta_2 c\theta_5)^2 + c^2\theta_4 s^2\theta_5 \right] \\
& \quad + \left[r_6 c\theta_2 s\theta_4 s\theta_5 + (r_6 c\theta_5 + r_3) s\theta_2 \right]^2 + (r_6 c\theta_4 s\theta_5 - r_2)^2 \\
& \quad + 2\bar{z}_6 \Big[r_6 (s^2\theta_2 c^2\theta_5 + c^2\theta_4 s^2\theta_5 + c^2\theta_2 s^2\theta_4 s^2\theta_5 + 2 s\theta_2 c\theta_2 s\theta_4 s\theta_5 c\theta_5) \\
& \qquad + r_3 (s\theta_2 c\theta_2 s\theta_4 s\theta_5 + s^2\theta_2 c\theta_5) - r_2 c\theta_4 s\theta_5 \Big] \Big\}
\end{aligned}
$$

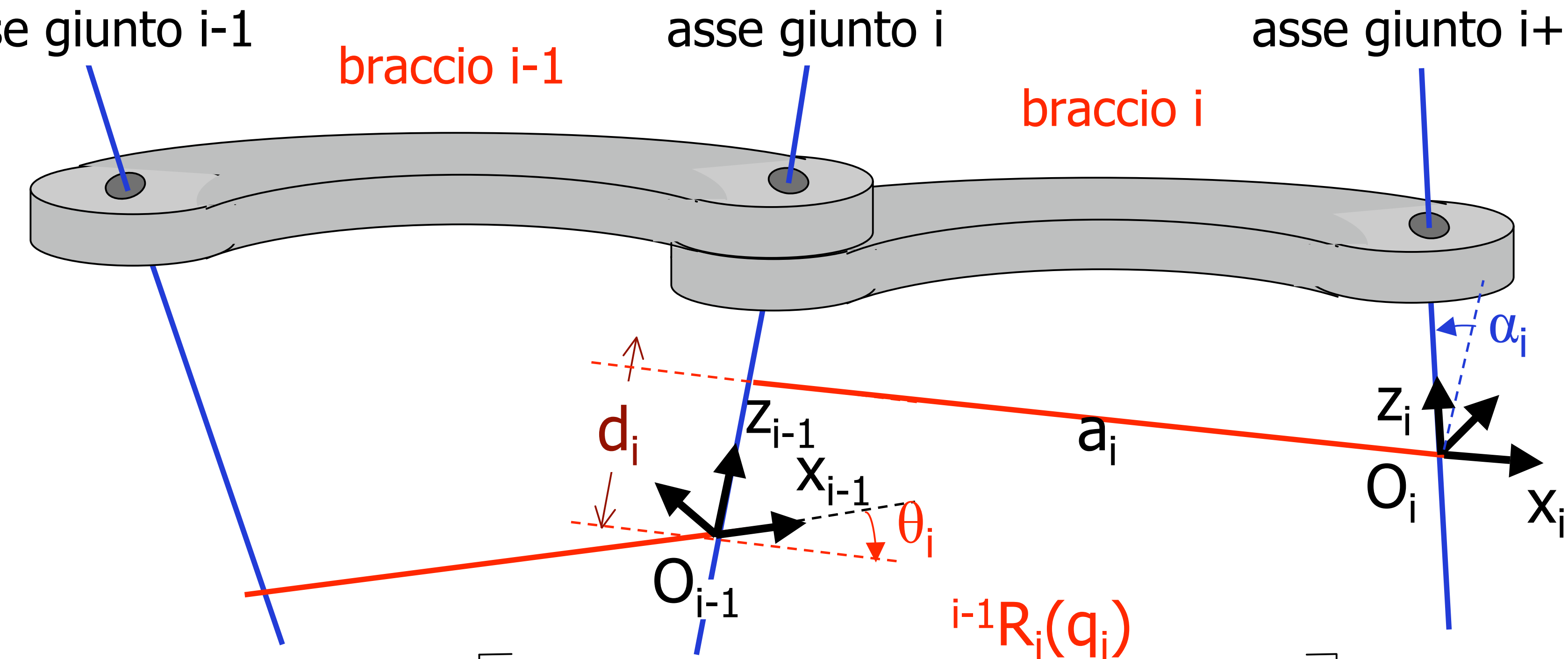
qui, scritto con i "raggi di girazione":
distanza da un asse alla quale porre la massa m in modo che il suo momento di inerzia rispetto all'asse sia lo stesso dell'intero corpo di massa m

Espressione di v_{ci} e ω_i

- v_{ci} e ω_i si possono esprimere mediante le relazioni della cinematica differenziale (Jacobiani parziali)
- è più conveniente però operare in modo ricorsivo, nel sistema di riferimento SR_i solidale con il braccio i ($^i\mathbf{vettore}_i$)
  - soprattutto quando si fa uso di programmi di calcolo simbolico per ricavare l'energia cinetica di un robot manipolatore con un numero non modesto di giunti ($\geq$4)

Moving Frames

Recall: assegnazione terne D-H



$$
{}^{i-1}A_i(q_i) = \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta_i & -c\alpha_i\, s\theta_i & s\alpha_i\, s\theta_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i\, c\theta_i & -s\alpha_i\, c\theta_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

where the boxed upper-left 3×3 block is ${}^{i-1}R_i(q_i)$

Algoritmo "Moving Frames"

$$v_{ci} = v_i + \omega_i \times r_{i,ci}$$

velocità lineare baricentro del braccio i

velocità lineare di O_i (origine di SR_i)

velocità angolare del braccio i

posizione del baricentro del braccio i rispetto ad O_i

$$\text{posto } \sigma_i = \begin{cases} 0 & \text{giunto rotatorio} \\ 1 & \text{giunto prismatico} \end{cases}$$

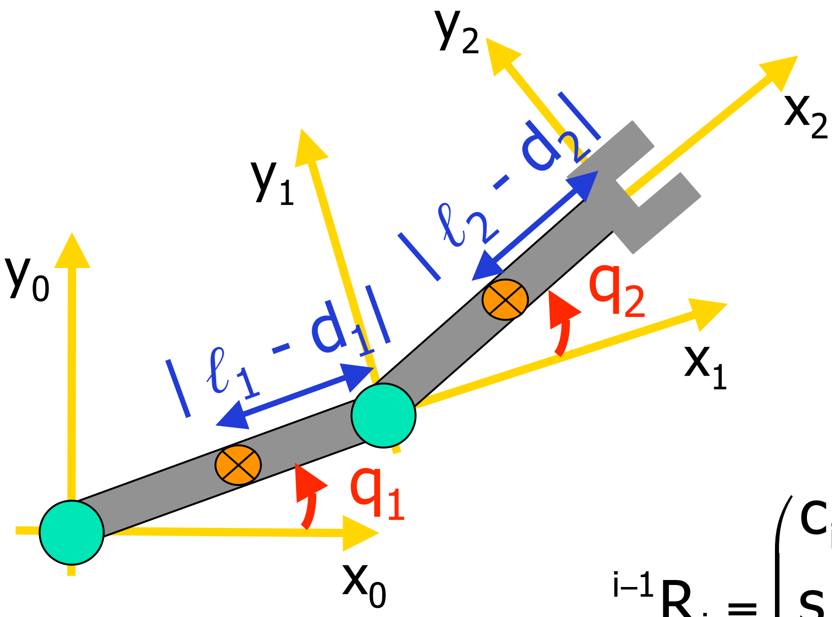
$$^{i}\omega_i = {}^{i-1}R_i^T(q_i)\left[{}^{i-1}\omega_{i-1} + (1-\sigma_i)\dot{q}_i\,{}^{i-1}z_{i-1}\right] = {}^{i-1}R_i^T(q_i)\,{}^{i-1}\omega_i$$

$$^{i}v_i = {}^{i-1}R_i^T(q_i)\left[{}^{i-1}v_{i-1} + \sigma_i\dot{q}_i\,{}^{i-1}z_{i-1} + {}^{i-1}\omega_i \times {}^{i-1}r_{i-1,i}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

asse z di SR_{i-1}

Esempio: modello dinamico robot 2R



$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ -9.81 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in moto in un piano verticale

$\sigma_i = 0$ (giunti rotanti)

$$^{i-1}R_i = \begin{pmatrix} c_i & -s_i & 0 \\ s_i & c_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ^{i}r_{i,ci} = \begin{pmatrix} -\ell_i + d_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

baricentri sugli assi cinematici

inizializzazione: i = 0 $\boxed{^0\omega_0 = 0}$ $\boxed{^0v_0 = 0}$

Primo passo (braccio 1)

$i = 1$

$$ {}^{1}\omega_1 = {}^{0}R_1^T(q_1)\left({}^{0}\omega_0 + \dot{q}_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\\dot{q}_1\end{pmatrix} $$

$$ {}^{1}v_1 = {}^{0}R_1^T(q_1)\left({}^{0}v_0 + \begin{pmatrix}0\\0\\\dot{q}_1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\ell_1 c_1\\\ell_1 s_1\\0\end{pmatrix}\right) = {}^{0}R_1^T(q_1)\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{q}_1\end{pmatrix} \times {}^{0}R_1^T(q_1)\begin{pmatrix}\ell_1 c_1\\\ell_1 s_1\\0\end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix}0\\0\\\dot{q}_1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\ell_1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\ell_1\dot{q}_1\\0\end{pmatrix} $$

$$ {}^{1}v_{c1} = \begin{pmatrix}0\\\ell_1\dot{q}_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\dot{q}_1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-\ell_1 + d_1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\d_1\dot{q}_1\\0\end{pmatrix} $$

Energia cinetica braccio 1

$$
{}^1\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^1v_{c1} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_1\dot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
T_1 = \frac{1}{2} m_1 d_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{1zz} \dot{q}_1^2
$$

Secondo passo (braccio 2)

i = 2

$$\boxed{{}^2\omega_2} = {}^1R_2^T(q_2)\left({}^1\omega_1 + \dot{q}_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \boxed{\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{q}_1+\dot{q}_2\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{{}^2v_2} = {}^1R_2^T(q_2)\left({}^1v_1 + \begin{pmatrix}0\\0\\\dot{q}_1+\dot{q}_2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\ell_2c_2\\\ell_2s_2\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\ell_1s_2\dot{q}_1\\\ell_1c_2\dot{q}_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\dot{q}_1+\dot{q}_2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\ell_2\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix}\ell_1s_2\dot{q}_1\\\ell_1c_2\dot{q}_1+\ell_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\\0\end{pmatrix}}$$

Energia cinetica braccio 2

$i = 2$

$$\boxed{{}^2v_{c2}} = {}^2v_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\ell_2 + d_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \ell_1 s_2 \dot{q}_1 \\ \ell_1 c_2 \dot{q}_1 + d_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[\ell_1^2 \dot{q}_1^2 + d_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2\ell_1 d_2 c_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \right] + \frac{1}{2} I_{2zz} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

Matrice di inerzia

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{q}_1 & \dot{q}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}(q) & b_{12}(q) \\ b_{21}(q) & b_{22}(\cancel{q}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b_{11}(q) &= I_{1zz} + m_1 d_1^2 + I_{2zz} + m_2 d_2^2 + m_2 \ell_1^2 + 2 m_2 \ell_1 d_2 c_2 \\ &= a_1 + 2 a_2 \cos q_2 \end{aligned}$$

$$b_{12}(q) = b_{21}(q) = m_2 \ell_1 d_2 c_2 + I_{2zz} + m_2 d_2^2 = a_2 \cos q_2 + a_3$$

$$b_{22} = I_{2zz} + m_2 d_2^2 = a_3$$

Termini centrifughi e di Coriolis

$$C_1(q) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right) + \left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right)^T - \frac{\partial B}{\partial q_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & -2a_2 s_2 \\ 0 & -a_2 s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2a_2 s_2 & -a_2 s_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -a_2 s_2 \\ -a_2 s_2 & -a_2 s_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{c_1(q,\dot{q}) = -a_2 s_2\left(\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2\right)}$$

$$C_2(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_2}{\partial q} + \left(\frac{\partial b_2}{\partial q}\right)^T - \frac{\partial B}{\partial q_2}\right) = \cdots = \begin{pmatrix} a_2 s_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{c_2(q,\dot{q}) = a_2 s_2 \dot{q}_1^2}$$

Termini di gravità

$$U_1 = -m_1 g^T r_{0,c1} = -m_1 \begin{pmatrix} 0 & -g_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ d_1 s_1 \\ * \end{pmatrix} = m_1 g_0 d_1 s_1$$

$$U_2 = -m_2 g^T r_{0,c2} = m_2 g_0 \left(\ell_1 s_1 + d_2 s_{12} \right)$$

$$U = U_1 + U_2$$

$$\boxed{g(q) = \frac{\partial U}{\partial q}^T} = \begin{pmatrix} g_0 \left(m_1 d_1 c_1 + m_2 \ell_1 c_1 + m_2 d_2 c_{12} \right) \\ g_0 m_2 d_2 c_{12} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a_4 c_1 + a_5 c_{12} \\ a_5 c_{12} \end{pmatrix}}$$

Modello dinamico robot 2R

$$(a_1 + 2a_2 c_2)\ddot{q}_1 + (a_2 c_2 + a_3)\ddot{q}_2 - a_2 s_2\left(\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2\right)$$
$$+a_4 c_1 + a_5 c_{12} = u_1$$
$$(a_2 c_2 + a_3)\ddot{q}_1 + a_3\ddot{q}_2 + a_2 s_2 \dot{q}_1^2 + a_5 c_{12} = u_2$$

Q1: è possibile avere a_2 nullo? significato fisico? conseguenze?

Q2: è possibile avere anche $a_4 = a_5 = 0$? significato fisico?

Q3: verificare, a partire dalle espressioni dei coefficienti, che la matrice d'inerzia è sempre definita positiva e in particolare che gli elementi in diagonale sono sempre positivi ($\forall q$)

Q4: fornire due diverse matrici S' e S'' che fattorizzano i termini quadratici nelle velocità e soddisfino o meno la antisimmetria di $\dot{B}$-2S