Corso di Robotica 2

Modello dinamico dei robot: approccio Lagrangiano

Prof. Alessandro De Luca

Dipartimento di Informatica e Sistemistica Antonio Ruberti

Sapienza Università di Roma

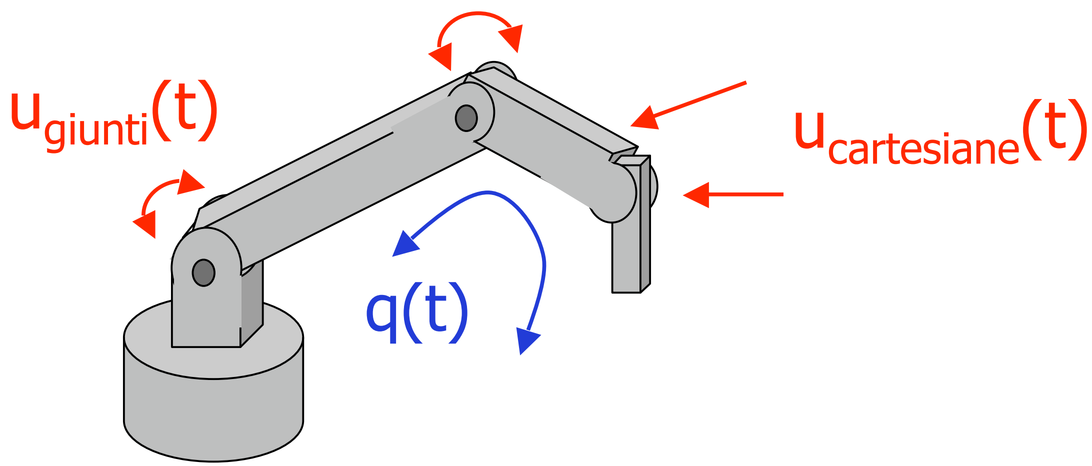
Modello dinamico

- esprime il legame tra

forze generalizzate $u(t)$ agenti sul robot

⇕

movimento del robot
(configurazioni spaziali $q(t)$ assunte nel tempo)



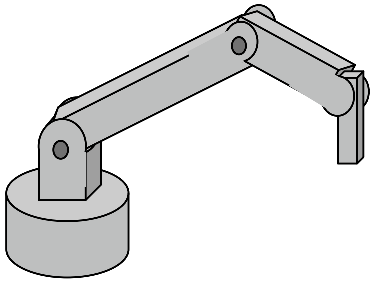
sistema di equazioni
differenziali del 2° ordine

$$\Phi(q,\dot{q},\ddot{q}) = u$$

Dinamica diretta

- dinamica diretta

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \qquad q(t) = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}$$



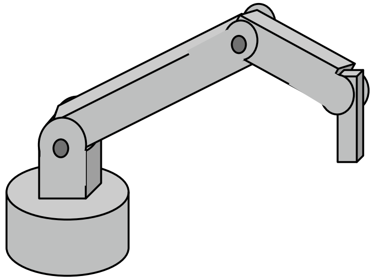
ingressi in $t \in [0,T]$ + $q(0), \dot{q}(0)$

stato iniziale in $t = 0$

- soluzione sperimentale
  - si applicano coppie con i motori e si misurano le variabili di giunto con gli encoder (al passo di campionamento T_c)
- soluzione per simulazione $\longleftrightarrow$ $\boxed{\Phi(q,\dot{q},\ddot{q}) = u}$
  - si usa il modello dinamico e si integrano numericamente le equazioni differenziali (con passo di simulazione $T_s \leq T_c$)

Dinamica inversa

- dinamica inversa

$q_d(t), \dot{q}_d(t), \ddot{q}_d(t)$ →  → $u_d(t)$

movimento desiderato
per $t \in [0,T]$

ingressi che lo realizzano
per $t \in [0,T]$

- soluzione sperimentale
  - prove ripetute di dinamica diretta con apprendimento iterativo della coppia nominale in base all'errore in [0,T] misurato durante l'esecuzione della prova precedente di moto
- soluzione analitica ↔ $\Phi(q,\dot{q},\ddot{q}) = u$
  - si usa il modello dinamico e si calcola algebricamente il valore $u_d(t)$ istante per istante

Approcci alla modellistica dinamica

approccio energetico (eq. di Eulero-Lagrange)	$\rightleftharpoons$	approccio di Newton-Eulero (bilanciamento forze/coppie)
▪ equazioni dinamiche in forma simbolica/chiusa		▪ equazioni dinamiche in forma numerica/ricorsiva
▪ adatte allo studio delle proprietà, all'analisi degli schemi di controllo		▪ adatte all'implementazione (dinamica inversa in tempo reale)

- esistono numerosi formalismi e principi della meccanica in base ai quali derivare il modello dinamico di un robot:
  - principio di d'Alembert, di Hamilton, dei lavori virtuali, …

Approccio energetico

ipotesi: N bracci in moto schematizzati come **corpi rigidi**
(+ eventuale **elasticità concentrata** ai giunti)

$q \in \mathbb{R}^N$ coordinate generalizzate (variabili di giunto, ma non solo!)

Lagrangiano $\boxed{L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q)}$

energia cinetica – energia potenziale

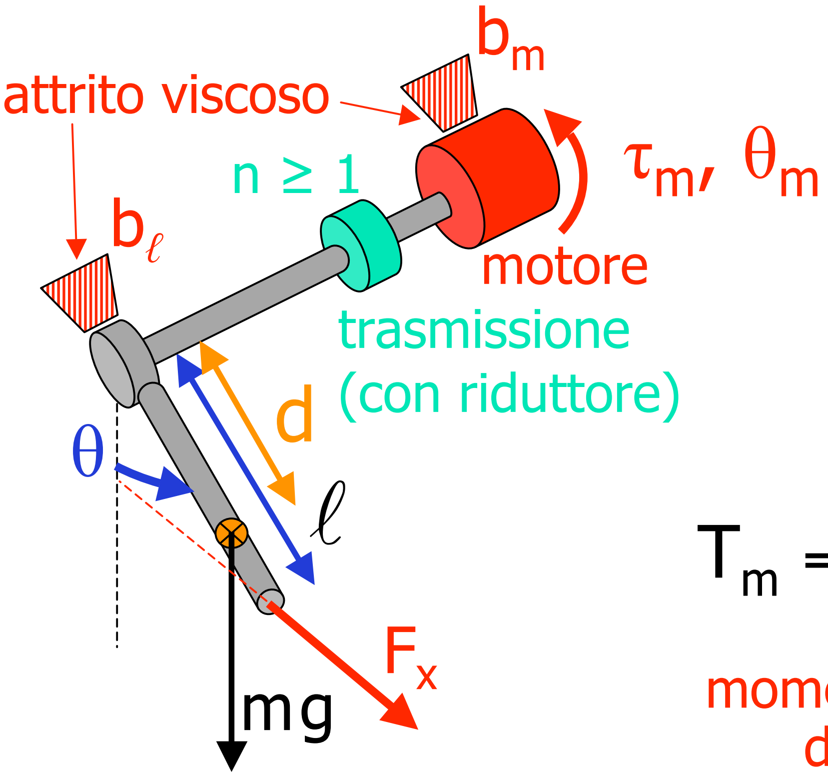
- principio di minima azione di Hamilton
- principio dei lavori virtuali

equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = u_i \qquad i = 1, \ldots, N$$

forze generalizzate non conservative che compiono lavoro su q_i
(esterne o dissipative)

Esempio: Pendolo attuato



$$\dot\theta_m = n\dot\theta \;\Rightarrow\; \theta_m = n\theta + \underbrace{\cancel{\theta_{m0}}}_{=\,0}$$

$$\tau = n\tau_m$$

$\boxed{q = \theta}$ (oppure $q = \theta_m$)

$$\boxed{T = T_m + T_\ell}$$

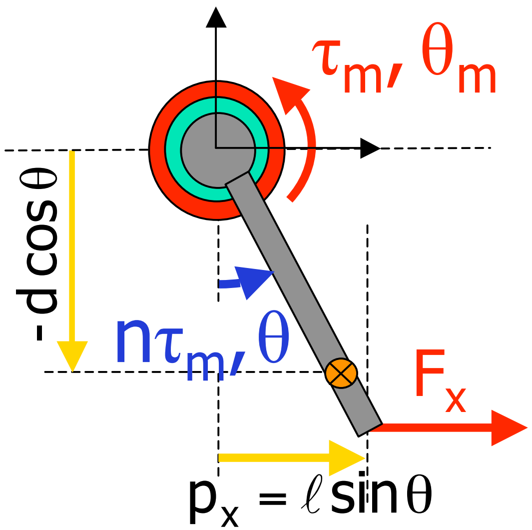
$$T_m = \frac{1}{2} I_m \dot\theta_m^2 \qquad T_\ell = \frac{1}{2}\left(I_\ell + md^2\right)\dot\theta^2$$

momento di inerzia del motore

momento di inerzia baricentrale del braccio

energia cinetica $\boxed{T = \frac{1}{2}\left(I_\ell + md^2 + n^2 I_m\right)\dot\theta^2 = \frac{1}{2} I\,\dot\theta^2}$

Esempio: Pendolo attuato (cont)



$$\boxed{\dot{p}_x = \ell\cos\theta\cdot\dot{\theta} = J_x\dot{\theta}}$$

$$U = U_0 - mgd\cos\theta$$ energia potenziale

$$L = T - U = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgd\cos\theta - U_0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = I\dot{\theta} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = I\ddot{\theta} \qquad \frac{\partial L}{\partial\theta} = -mgd\sin\theta$$

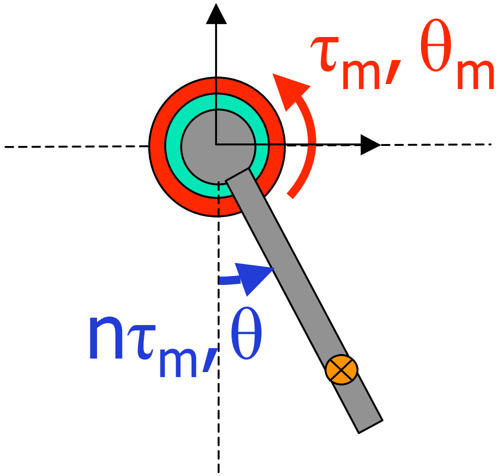
$$u = n\tau_m - b_\ell\dot{\theta} - nb_m\dot{\theta}_m + J_x^T F_x = n\tau_m - \left(b_\ell + n^2 b_m\right)\dot{\theta} + \ell\cos\theta\cdot F_x$$

le coppie applicate/dissipate lato motore sono moltiplicate per n, a valle del riduttore

coppia equivalente al giunto dovuta alla forza F_x applicata nel punto p_x

"somma" delle coppie non conservative

Esempio: Pendolo attuato (cont)



modello dinamico in q = θ

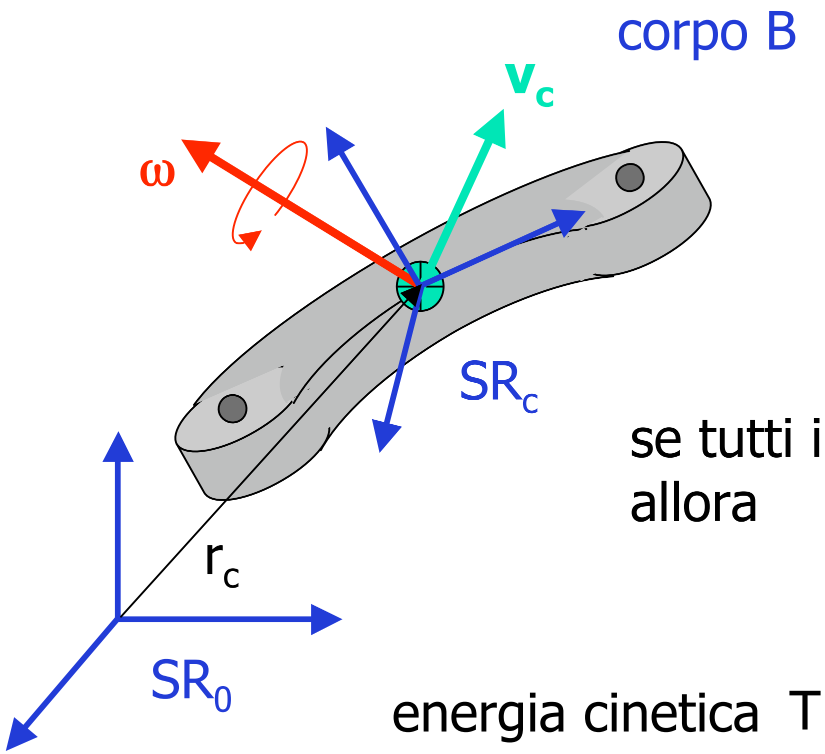
$$\boxed{I\ddot{\theta} + mgd\sin\theta = n\tau_m - \left(b_\ell + n^2 b_m\right)\dot{\theta} + \ell\cos\theta\cdot F_x}$$

dividendo per n e sostituendo $\theta = \theta_m/n$

$$\boxed{\frac{I}{n^2}\ddot{\theta}_m + \frac{m}{n}gd\sin\frac{\theta_m}{n} = \tau_m - \left(\frac{b_\ell}{n^2} + b_m\right)\dot{\theta}_m + \frac{\ell}{n}\cos\frac{\theta_m}{n}\cdot F_x}$$

modello dinamico in q = θ_m

Energia cinetica di un corpo rigido



massa $\quad m = \int_B \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_B dm$ (densità di massa: ρ)

baricentro $\quad r_c = \dfrac{1}{m}\int_B r\,dm$

se tutti i vettori sono riferiti rispetto al baricentro, allora

$$r_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_B r\,dm = 0$$

energia cinetica $\quad T = \dfrac{1}{2}\int_B v^T(x,y,z)\,v(x,y,z)\,dm$

relazione fondamentale della cinematica di un corpo rigido

$$v = v_c + \omega \times r = v_c + S(\omega)\,r$$

matrice anti-simmetrica

Energia cinetica di un corpo rigido (cont)

$$T = \frac{1}{2}\int_B [v_c + S(\omega)r]^T [v_c + S(\omega)r]\, dm$$

$$= \frac{1}{2}\int_B v_c^T v_c\, dm + \int_B v_c^T S(\omega) r\, dm + \frac{1}{2}\int_B r^T S^T(\omega) S(\omega) r\, dm$$

somma elementi
sulla diagonale

$a^T b = \mathrm{trace}\{a b^T\}$

$$\boxed{= \frac{1}{2} m\, v_c^T v_c}$$

$$= v_c^T S(\omega) \int_B r\, dm = 0$$

$$= \frac{1}{2}\int_B \mathrm{trace}\{S(\omega) r \cdot r^T S^T(\omega)\}\, dm$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{trace}\left\{S(\omega)\left(\int_B r \cdot r^T dm\right) S^T(\omega)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{trace}\{S(\omega)\ J\ S^T(\omega)\}$$

matrice di Eulero

energia cinetica traslazionale
(tutta la massa concentrata
nel baricentro)

+

Teorema di König

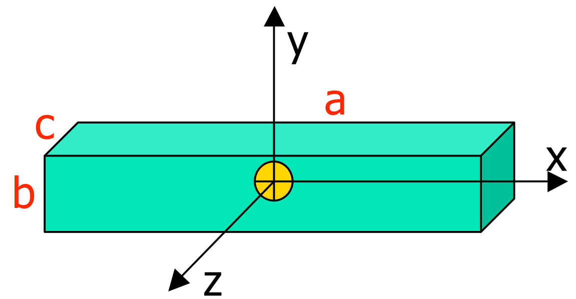
energia cinetica
rotazionale
(di tutto il corpo)

$$\boxed{= \frac{1}{2}\omega^T I\, \omega}$$

matrice di inerzia

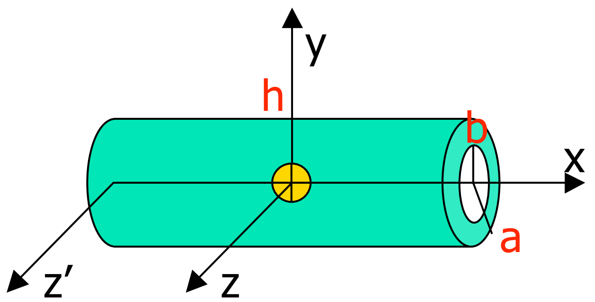
Esempi di matrici d'inerzia

corpi omogenei di massa m con assi di simmetria



parallelepipedo rettangolo
di lati a (altezza), b, c (base)

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & & \\ & I_{yy} & \\ & & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}m(b^2+c^2) & & \\ & \frac{1}{12}m(a^2+c^2) & \\ & & \frac{1}{12}m(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$



cilindro cavo di altezza h,
raggio esterno a, raggio interno b

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m(a^2+b^2) & & \\ & \frac{1}{12}m(3(a^2+b^2)+h^2) & \\ & & I_{zz} \end{pmatrix} \qquad I_{zz} = I_{yy}$$

$$I_{zz}' = I_{zz} + m(h/2)^2$$ teorema della traslazione dell'asse

Teorema di Steiner

$$\boxed{I = I_c + m\left(r^T r \cdot E_{3\times 3} - r r^T\right)}$$

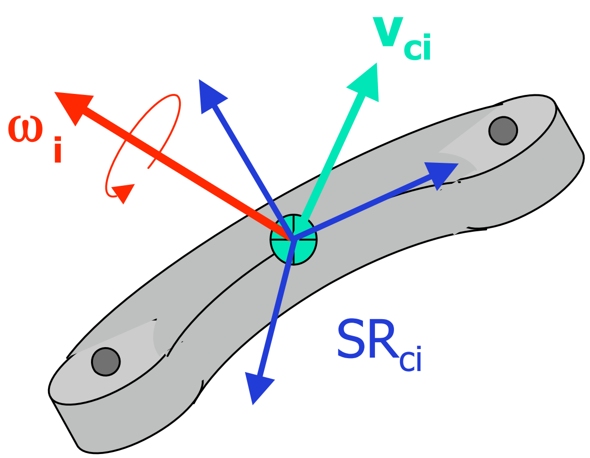
inerzia baricentrale — matrice Identità

generalizzazione:
effetto sulla matrice di inerzia di una pura traslazione r della terna di calcolo

Energia cinetica del robot

$$T = \sum_{i=1}^{N} T_i$$ ⟸ N corpi rigidi (+ base ferma)

$$T_i = T_i(\underbrace{q_j, \dot{q}_j, j \le i})$$ ⟸ in una catena cinematica aperta



i-esimo braccio (corpo) del robot

Teorema di König

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_{ci}^T v_{ci} + \frac{1}{2} \omega_i^T I_i \omega_i$$

velocità lineare ASSOLUTA del baricentro

velocità angolare ASSOLUTA dell'**intero** corpo

Energia cinetica di un braccio

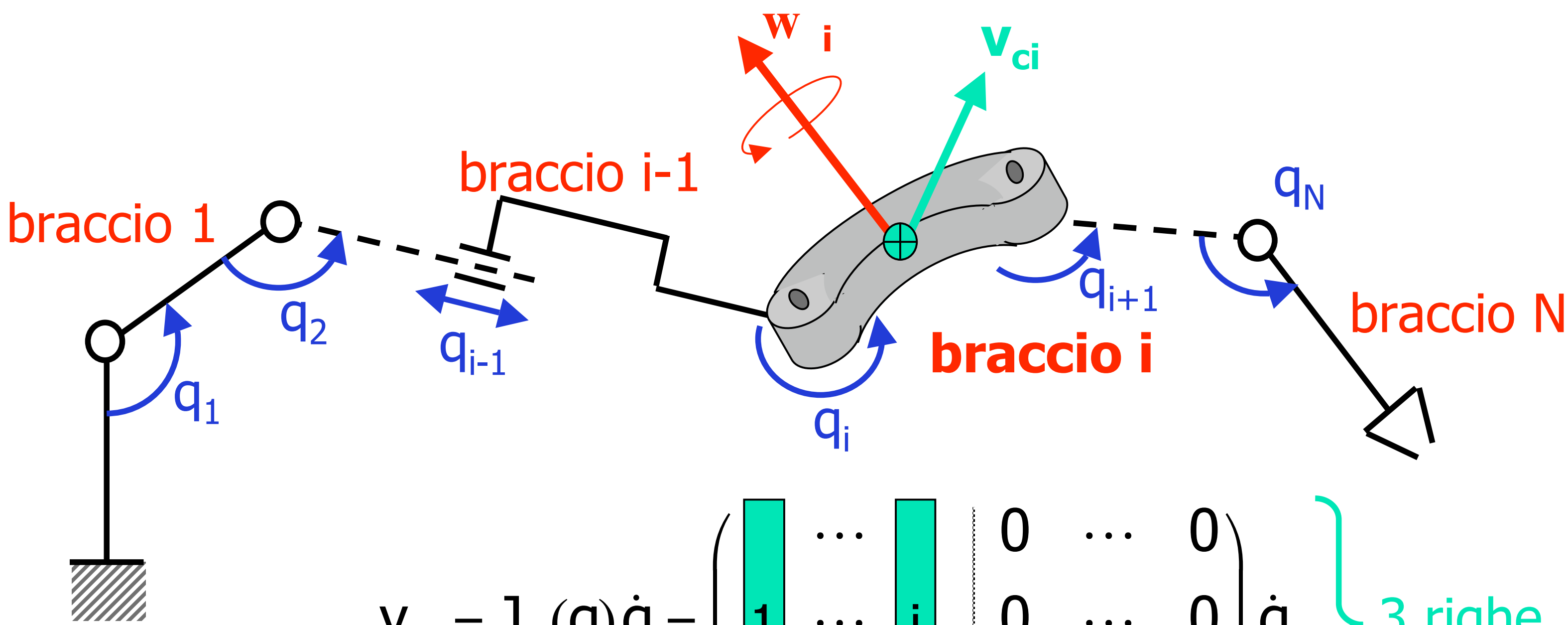
$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_{ci}^T v_{ci} + \frac{1}{2} \omega_i^T I_i \omega_i$$

$\boldsymbol{\omega_i}$, $\mathbf{I_i}$ vanno espresse nello **stesso sistema di riferimento**,
ma il prodotto $\boldsymbol{\omega_i^T I_i \omega_i}$ è **invariante** rispetto al sistema di riferimento scelto

nel riferimento SR_{ci} (baricentrale) solidale al braccio i

$$\underset{\text{costante!}}{{}^iI_i} = \begin{pmatrix} \int (y^2+z^2)dm & -\int xy\,dm & -\int xz\,dm \\ & \int (x^2+z^2)dm & -\int yz\,dm \\ \text{symm} & & \int (x^2+y^2)dm \end{pmatrix}$$

Dipendenza formale di T da q e $\dot{q}$



$$v_{ci} = J_{Li}(q)\dot{q} = \left.\begin{pmatrix} & \cdots & & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & i & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\dot{q}\ \right\}\text{3 righe}$$

Jacobiani (parziali)
espressi di solito in SR_0

$$\omega_i = J_{Ai}(q)\dot{q} = \left.\begin{pmatrix} & \cdots & & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & i & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\dot{q}\ \right\}\text{3 righe}$$

Espressione finale di T

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i v_{ci}^T v_{ci} + \omega_i^T I_i \omega_i\right)$$

$$= \frac{1}{2}\dot{q}^T\left(\sum_{i=1}^{N} m_i J_{Li}^T(q) J_{Li}(q) + J_{Ai}^T(q) I_i J_{Ai}(q)\right)\dot{q}$$

costante se $\boldsymbol{\omega}_i$ espressa in SR_{ci}

altrimenti

$$\boxed{{}^0I_i(q) = {}^0R_i(q)\,{}^iI_i\,{}^0R_i^T(q)}$$

$$\boxed{T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q}}$$

matrice d'inerzia generalizzata del robot

- simmetrica
- definita positiva, $\forall q \Rightarrow$ **sempre invertibile**

Energia potenziale del robot

ipotesi: solo contributi GRAVITAZIONALI

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_i$$ ⇐ N corpi rigidi (+ base a quota costante)

$$U_i = U_i(q_j, \underbrace{j \le i})$$ ⇐ in una catena cinematica aperta

$$\boxed{U_i = -m_i g^T r_{0,ci}}$$

vettore di accelerazione di gravità — posizione dell'i-esimo baricentro } tipicamente in SR_0

dipendenza da q

$$\boxed{\begin{pmatrix} r_{0,ci} \\ 1 \end{pmatrix} = {}^0A_1(q_1)\,{}^1A_2(q_2)\cdots{}^{i-1}A_i(q_i)\begin{pmatrix} r_{i,ci} \\ 1 \end{pmatrix}}$$

costante in SR_i

N.B. si lavora con le coordinate omogenee

Riassumendo ...

energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} b_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j \geq 0$$

forma quadratica definita positiva

$$\boxed{T = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0}$$

energia potenziale

$$U = U(q)$$

Lagrangiano

$$L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q)$$

equazioni di Eulero-Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = u_k} \qquad k = 1,\dots,N$$

forze generalizate (forze o coppie) non conservative (dissipative/attive) che **compiono lavoro** sulla coordinata q_k

Elaborando ...

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} b_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - U(q)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j b_{kj}\dot{q}_j \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j b_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{i,j}\frac{\partial b_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

(dipendenze da q tralasciate)

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

termini LINEARI nelle ACCELERAZIONI $\ddot{q}$

termini QUADRATICI nelle VELOCITA' $\dot{q}$

termini NONLINEARI nelle CONFIGURAZIONI q

La k-esima equazione dinamica …

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = u_k$$

$$\sum_j b_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i,j}\left(\frac{\partial b_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial U}{\partial q_k} = u_k$$

scambiando gli indici "muti" i,j

$$\cdots + \underbrace{\sum_{i,j}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial b_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k}\right)}_{c_{kij} = c_{kji}}\dot{q}_i\dot{q}_j + \cdots$$

simboli di Christoffel del primo tipo

… ed il significato dei vari termini

$$\boxed{\sum_j b_{kj}(q)\ddot{q}_j} + \boxed{\sum_{i,j} c_{kij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j} + \boxed{\frac{\partial U}{\partial q_k}} = u_k \qquad k = 1,\ldots,N$$

termini **INERZIALI**

termini **CENTRIFUGHI** ($i=j$) e di **CORIOLIS** ($i\neq j$)

termini $g_k(q)$ **GRAVITAZIONALI**

$b_{kk}(q)$ = inerzia al giunto k quando accelera il giunto k (> 0)

$b_{kj}(q)$ = inerzia "vista" al giunto k quando accelera il giunto j

$c_{kii}(q)$ = coefficiente della forza centrifuga al giunto k quando si muove il giunto i ($c_{iii} = 0, \forall i$)

$c_{kij}(q)$ = coefficiente della forza di Coriolis "vista" al giunto k quando si muovono sia il giunto i che il giunto j

Due espressioni vettoriali della dinamica

1. $$B(q)\ddot{q} + c(q,\dot{q}) + g(q) = u$$

$$c_k(q,\dot{q}) = \dot{q}^T C_k(q)\dot{q}$$

k-esima componente di c

k-esima colonna di B(q)

$$C_k(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_k}{\partial q} + \left(\frac{\partial b_k}{\partial q}\right)^T - \frac{\partial B}{\partial q_k}\right)$$

simmetrica

2. $$B(q)\ddot{q} + S(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = u$$

NON simmetrica

$$s_{kj}(q,\dot{q}) = \sum_i c_{kij}(q)\dot{q}_i$$

fattorizzazione di c con S **non unica!**

N.B.:
sono nella forma $\Phi(q,\dot{q},\ddot{q}) = u$ cercata

Proprietà strutturale

la matrice $\dot{B} - 2S$ è antisimmetrica
(se si utilizzano i simboli di Christoffel per definire S)

PROVA

$$\dot{b}_{kj} = \sum_i \frac{\partial b_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_i, \qquad 2s_{kj} = 2\sum_i c_{kji}\dot{q}_i = 2\sum_i \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial b_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i$$

$$\Rightarrow \quad \dot{b}_{kj} - 2s_{kj} = \sum_i \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial b_{ki}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i = n_{kj}$$

$$n_{jk} = \dot{b}_{jk} - 2s_{jk} = \sum_i \left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{ji}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i = -n_{kj}$$

per la simmetria di B

$$\Rightarrow \quad \boxed{x^T\left(\dot{B} - 2S\right)x = 0, \quad \forall x}$$

Conservazione dell'energia totale

- energia totale

$$E = T + U = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q} + U(q)$$

- evoluzione nel tempo (usando il modello dinamico)

$$\dot{E} = \dot{q}^T B(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{B}(q)\dot{q} + \frac{\partial U}{\partial q}\dot{q}$$

$$= \dot{q}^T\left(u - S(q,\dot{q})\dot{q} - g(q)\right) + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{B}(q)\dot{q} + \dot{q}^T g(q)$$

$$= \dot{q}^T u + \frac{1}{2}\dot{q}^T\left(\dot{B}(q) - 2S(q,\dot{q})\right)\dot{q}$$

qui, qualunque fattorizzazione di c con S

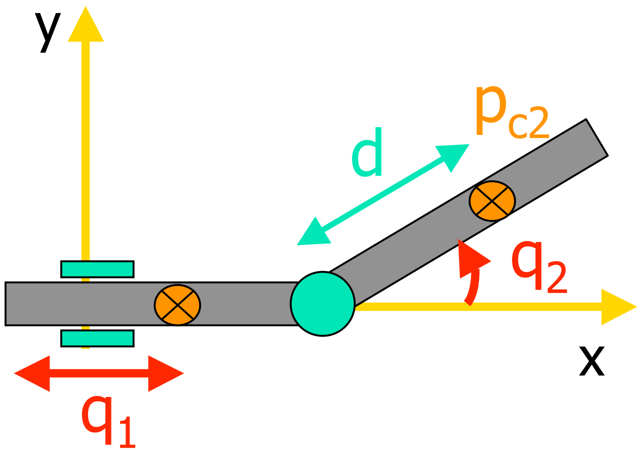
- se u≡0, l'energia totale si conserva (non si dissipa né si accresce)

$$\dot{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{q}^T\left(\dot{B} - 2S\right)\dot{q} = 0, \quad \forall q,\dot{q}} \quad \Rightarrow \quad \dot{E} = \dot{q}^T u$$

più debole della antisimmetria, perchè la velocità esterna è la stessa che appare nelle matrici interne

in generale, la variazione di energia totale è pari al lavoro delle forze non conservative

Modello dinamico robot PR



$$T = T_1 + T_2 \qquad U = \text{costante}$$

(piano orizzontale)

$$\boxed{T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{c2}^T v_{c2} + \frac{1}{2} \omega_2^T I_2 \omega_2$$

$$p_{c2} = \begin{pmatrix} q_1 + d\cos q_2 \\ d\sin q_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{c2} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 - d\sin q_2\, \dot{q}_2 \\ d\cos q_2\, \dot{q}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{q}_1^2 + d^2 \dot{q}_2^2 - 2d\sin q_2\, \dot{q}_1 \dot{q}_2 \right) + \frac{1}{2} I_{2,zz} \dot{q}_2^2}$$

Modello dinamico robot PR (cont)

$$B(q) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} m_1 + m_2 \\ -m_2 d \sin q_2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -m_2 d \sin q_2 \\ I_{2,zz} + m_2 d^2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\qquad\quad b_1 \qquad\qquad\qquad b_2$$

$$c(q,\dot q) = \begin{pmatrix} c_1(q,\dot q) \\ c_2(q,\dot q) \end{pmatrix}$$

$$c_k(q,\dot q) = \dot q^T C_k(q) \dot q$$

dove $$C_k(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_k}{\partial q} + \left(\frac{\partial b_k}{\partial q}\right)^T - \frac{\partial B}{\partial q_k}\right)$$

$$C_1(q) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -m_2 d \cos q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -m_2 d \cos q_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$c_1(q,\dot q) = -m_2 d \cos q_2\, \dot q_2^2$$

$$C_2(q) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & -m_2 d \cos q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -m_2 d \cos q_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -m_2 d \cos q_2 \\ -m_2 d \cos q_2 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 0$$

$$c_2(q,\dot q) = 0$$

Modello dinamico robot PR (cont)

$$\boxed{B(q)\ddot{q} + c(q,\dot{q}) = u}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 + m_2 & -m_2 d \sin q_2 \\ -m_2 d \sin q_2 & I_{2,zz} + m_2 d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m_2 d \cos q_2 \, \dot{q}_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

N.B. l'elemento b_{NN} (qui N=2)
è sempre costante!

Q1: perchè non ci sono termini di Coriolis?

Q2: se fornisco una forza u_1, il secondo giunto accelera? … sempre?

Q3: qual è un'espressione della matrice S? … è unica?

Q4: qual è la configurazione a "massima inerzia" (generalizzata)?