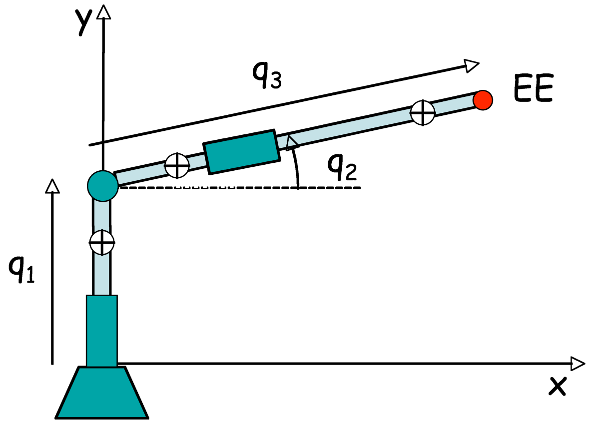
Prova Scritta di Robotica II

10 Giugno 2009

Esercizio 1

Ricavare l'espressione della matrice d'inerzia $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})$ per il robot planare PRP mostrato in figura. Per $i = 1, 2, 3$, siano: m_i = massa del braccio i; I_i = inerzia baricentrale del braccio i rispetto a un asse normale al piano del moto. Si assumano i baricentri dei bracci disposti come in figura, con d_{c2} = distanza del baricentro del braccio 2 dall'asse del giunto 2 e d_{c3} = distanza del baricentro del braccio 3 dall'organo terminale. Si utilizzino le coordinate generalizzate q_1, q_2 e q_3 indicate.



Esercizio 2

Per un robot con n giunti, il cui modello dinamico è dato nella forma usuale

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau},$$

sia assegnato un compito $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_d(t)$, con $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ e $\boldsymbol{x}_d(t)$ funzione differenziabile almeno due volte rispetto al tempo. Le variabili di compito $\boldsymbol{x}$ sono legate alle variabili di configurazione $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ dall'espressione cinematica

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}).$$

Si consideri il caso $m < n$, ovvero il robot è ridondante rispetto al compito assegnato.

A) Con il robot in uno stato corrente $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ compatibile con il compito, determinare l'espressione della coppia di attuazione $\boldsymbol{\tau}$ che minimizza istantaneamente la funzione obiettivo

$$H = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{B}^{-2}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\tau}$$

rispettando il vincolo (in accelerazione) sulla corretta esecuzione della traiettoria del compito. Si supponga di essere in una configurazione $\boldsymbol{q}$ *non singolare* per il compito, ossia con

$$\text{rango } \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = m, \qquad \text{con } \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}.$$

B) Come si semplifica l'espressione della coppia $\boldsymbol{\tau}$ del punto A) nel caso in cui il robot si muova in assenza di gravità (ad es., su un piano orizzontale) e si trovi in uno stato a velocità di giunto nulla?

C) Come si può modificare l'espressione generale della $\boldsymbol{\tau}$ del punto A) nel caso in cui il robot si trovi all'istante t in uno stato di errore rispetto al compito,

$$\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \qquad \text{e/o} \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_x = \dot{\boldsymbol{x}}_d - \dot{\boldsymbol{x}} \neq \mathbf{0},$$

in modo da ottenere una legge di controllo che riporti tale errore esponenzialmente a zero in modo disaccoppiato rispetto alle componenti di $\boldsymbol{e}_x$?

[150 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzioni

10 Giugno 2009

Esercizio 1

Occorre ricavare l'energia cinetica $T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ del robot. A tale scopo è utile ricavare le espressioni delle posizioni e delle velocità dei baricentri dei bracci 2 e 3 nel piano (x,y):

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_{c2} &= \begin{pmatrix} d_{c2}\cos q_2 \\ q_1 + d_{c2}\sin q_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_{c2} = \begin{pmatrix} -d_{c2}\sin q_2\,\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 + d_{c2}\cos q_2\,\dot{q}_2 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{p}_{c3} &= \begin{pmatrix} (q_3 - d_{c3})\cos q_2 \\ q_1 + (q_3 - d_{c3})\sin q_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_{c3} = \begin{pmatrix} \dot{q}_3\cos q_2 - (q_3 - d_{c3})\sin q_2\,\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_3\sin q_2 + (q_3 - d_{c3})\cos q_2\,\dot{q}_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Inoltre il braccio 1 non ruota, mentre la componente della velocità angolare dei bracci 2 e 3 normale al piano di moto è la stessa, pari a $\dot{q}_2$. Con le usuali notazioni, si ha quindi

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \tfrac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2, \\
T_2 &= \tfrac{1}{2}I_2\dot{q}_2^2 + \tfrac{1}{2}m_2\|\boldsymbol{v}_{c2}\|^2 \\
&= \tfrac{1}{2}I_2\dot{q}_2^2 + \tfrac{1}{2}m_2\left(\dot{q}_1^2 + d_{c2}^2\dot{q}_2^2 + 2d_{c2}\cos q_2\,\dot{q}_1\dot{q}_2\right), \\
T_3 &= \tfrac{1}{2}I_3\dot{q}_2^2 + \tfrac{1}{2}m_3\|\boldsymbol{v}_{c3}\|^2 \\
&= \tfrac{1}{2}I_3\dot{q}_2^2 + \tfrac{1}{2}m_3\left(\dot{q}_1^2 + (q_3 - d_{c3})^2\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 2(q_3 - d_{c3})\cos q_2\,\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2\sin q_2\,\dot{q}_1\dot{q}_3\right).
\end{aligned}
$$

La matrice di inerzia $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})$, simmetrica e definita positiva, si estrae dalla

$$
T = \sum_{i=1}^{3} T_i = \frac{1}{2}\,\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}
$$

ed è pari a

$$
\boldsymbol{B}(q_2,q_3) = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & (m_2 d_{c2} + m_3(q_3 - d_{c3}))\cos q_2 & m_3\sin q_2 \\ (m_2 d_{c2} + m_3(q_3 - d_{c3}))\cos q_2 & I_2 + m_2 d_{c2}^2 + I_3 + m_3(q_3 - d_{c3})^2 & 0 \\ m_3\sin q_2 & 0 & m_3 \end{pmatrix}.
$$

Esercizio 2

Posto per compattezza $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$ e tralasciando le dipendenze dallo stato corrente $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$, si utilizza l'espressione del modello dinamico $\boldsymbol{B}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\tau}$ per riscrivere la funzione obiettivo da minimizzare come una forma quadratica (definita positiva) nell'accelerazione

$$
H(\ddot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\tau}^T\boldsymbol{B}^{-2}\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{B}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{n})^T\boldsymbol{B}^{-2}(\boldsymbol{B}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{n}) = \frac{1}{2}\,\ddot{\boldsymbol{q}}^T\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{n}^T\boldsymbol{B}^{-1}\ddot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{B}^{-2}\boldsymbol{n}.
$$

Si noti che tale funzione obiettivo è una quadratica *completa* (ossia contenente anche un termine lineare in $\ddot{\boldsymbol{q}}$ e uno costante).

Differenziando due volte la relazione cinematica del compito si ha

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}, \qquad \ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}.$$

Posto $\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{x}}_d - \dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$, il vincolo di esecuzione del compito in un generico stato $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ compatibile con esso risulta lineare nell'accelerazione incognita

$$\boldsymbol{J}\ddot{\boldsymbol{q}} - \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0},$$

dove si sono di nuovo tralasciate le dipendenze dallo stato corrente $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$.

Il problema posto si formula quindi come problema di ottimizzazione lineare-quadratica e si risolve con il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*. Introdotta la funzione

$$L = H + \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{J}\ddot{\boldsymbol{q}} - \ddot{\boldsymbol{r}}),$$

le condizioni necessarie e sufficienti di minimo vincolato per $H(\ddot{\boldsymbol{q}})$ sono

$$\nabla_{\ddot{\boldsymbol{q}}} L = \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{\boldsymbol{q}}}\right)^T = \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L = \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^T = \boldsymbol{J}\ddot{\boldsymbol{q}} - \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}. \tag{2}$$

Ricavando la $\ddot{\boldsymbol{q}}$ dalla (1),

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{\lambda}, \tag{3}$$

e sostituendo nella (2), si ottengono i moltiplicatori $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{\lambda} = -\left(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^T\right)^{-1}\left(\ddot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{J}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{n}\right). \tag{4}$$

Inserendo la (4) nella (3), si ha infine

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^T\left(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^T\right)^{-1}\left(\ddot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{J}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{n}\right) - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{J}^{\#}\ddot{\boldsymbol{r}} - \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}^{\#}\boldsymbol{J}\right)\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{n}, \tag{5}$$

dove compare l'espressione della pseudoinversa dello Jacobiano (nell'ipotesi fatta di rango pieno). Nell'ultima uguaglianza si è messa in evidenza l'espressione con il proiettore nel nucleo di $\boldsymbol{J}$.

Sostituendo l'accelerazione (5) nel modello dinamico e riespandendo i termini, si ottiene infine la soluzione cercata

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{J}^{\#}(\boldsymbol{q})\left(\ddot{\boldsymbol{x}}_d - \dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{q})\left(\boldsymbol{c}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})\right)\right). \tag{6}$$

In modo alternativo, si sarebbe potuto arrivare alla soluzione generale (6) risolvendo un problema di ottimizzazione (minimizzazione) non vincolata, come mostrato qui di seguito. Una possibile espressione di tutte le accelerazioni che soddisfano la relazione $\boldsymbol{J}\ddot{\boldsymbol{q}} = \ddot{\boldsymbol{r}}$ (il vincolo del compito) è data dalla

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{\#}\ddot{\boldsymbol{r}} + \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}^{\#}\boldsymbol{J}\right)\ddot{\boldsymbol{q}}_0, \tag{7}$$

in cui $\ddot{\boldsymbol{q}}_0 \in \mathbb{R}^n$ è un'arbitraria accelerazione di giunto (proiettata poi nello spazio nullo dello Jacobiano). Scegliendo la struttura (7) per $\ddot{\boldsymbol{q}}$, il vincolo risulta sempre soddisfatto. Sostituendo questa espressione nel modello dinamico,

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{J}^{\#}\ddot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}^{\#}\boldsymbol{J}\right)\ddot{\boldsymbol{q}}_0 + \boldsymbol{n}, \tag{8}$$

e quindi tale coppia $\boldsymbol{\tau}$ nella funzione obiettivo H si ottiene

$$\begin{aligned} H(\ddot{\boldsymbol{q}}_0) &= \tfrac{1}{2}\,\ddot{\boldsymbol{q}}_0^T \left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}^{\#}\boldsymbol{J}\right)\ddot{\boldsymbol{q}}_0 + \left(\boldsymbol{J}^{\#}\ddot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{n}\right)^T \left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}^{\#}\boldsymbol{J}\right)\ddot{\boldsymbol{q}}_0 \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{J}^{\#}\ddot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{n}\right)^T \left(\boldsymbol{J}^{\#}\ddot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{n}\right), \end{aligned}$$

dove si è utilizzata la simmetria e l'idempotenza del proiettore $\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}^{\#}\boldsymbol{J}\right)$. La condizione necessaria di minimo non vincolato per tale funzione quadratica completa è

$$\nabla_{\ddot{\boldsymbol{q}}_0} H = \left(\frac{\partial H}{\partial \ddot{\boldsymbol{q}}_0}\right)^T = \left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}^{\#}\boldsymbol{J}\right)\left(\ddot{\boldsymbol{q}}_0+\boldsymbol{J}^{\#}\ddot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{n}\right)=\boldsymbol{0}.$$

Sfruttando la proprietà $\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}^{\#}\boldsymbol{J}\right)\boldsymbol{J}^{\#}=\boldsymbol{O}$ della pseudoinversa, tale condizione equivale alla

$$\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}^{\#}\boldsymbol{J}\right)\ddot{\boldsymbol{q}}_0 = -\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}^{\#}\boldsymbol{J}\right)\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{n}. \tag{9}$$

Sostituendo la (9) nella (8) si ottiene di nuovo l'espressione (6) trovata in precedenza per $\boldsymbol{\tau}$.

Per il punto B), nel caso in cui il robot si muova in assenza di gravità ($\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})\equiv\boldsymbol{0}$) e si trovi in uno stato a velocità di giunto nulla ($\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{0}$), la soluzione (6) si semplifica in

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{J}^{\#}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{x}}_d. \tag{10}$$

Per il punto C), basta modificare l'espressione (6) includendo un'azione proporzionale-derivativa rispetto all'errore di compito $\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{x}_d-\boldsymbol{x}$ (*feedback*), accanto al termine di accelerazione desiderata di compito $\ddot{\boldsymbol{x}}_d$ (*feedforward*):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = &= \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{J}^{\#}(\boldsymbol{q})\Big(\ddot{\boldsymbol{x}}_d+\boldsymbol{K}_D\left(\dot{\boldsymbol{x}}_d-\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\right)+\boldsymbol{K}_P\left(\boldsymbol{x}_d-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})\right)-\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \\ &\quad + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{q})\left(\boldsymbol{c}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})\right)\Big), \end{aligned} \tag{11}$$

dove le matrici $\boldsymbol{K}_P$ e $\boldsymbol{K}_D$ sono diagonali e definite positive. Tale risultato è dovuto infatti alla linearizzazione esatta e al disaccoppiamento ottenuti con la (6) nello *spazio del compito* fuori da singolarità (catene di doppi integratori per ogni componente di $\boldsymbol{x}$). L'espressione (11) realizza quindi la stabilizzazione asintotica dell'errore di compito imponendo il comportamento

$$\ddot{\boldsymbol{e}}_x+\boldsymbol{K}_D\dot{\boldsymbol{e}}_x+\boldsymbol{K}_P\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{0}, \tag{12}$$

per cui l'errore $\boldsymbol{e}_x$ (e ogni sua derivata) converge nel tempo in modo *esponenziale* a zero in quanto la dinamica (12) è lineare.

* * * * *