

# Robotica I

Test — 11 Novembre 2009

## Esercizio 1

Si consideri una rappresentazione minimale dell'orientamento data dalla seguente sequenza di angoli definiti rispetto a assi fissi:  $\alpha$  intorno a  $Y$ ;  $\beta$  intorno a  $X$ ;  $\gamma$  intorno a  $Z$ .

- Calcolare la matrice di rotazione  $R_{YZX}(\alpha, \beta, \gamma)$  associata.
- Determinare tutti gli insiemi di angoli  $(\alpha, \beta, \gamma)$  che realizzano l'orientamento specificato dalla matrice

$$R = \begin{pmatrix} 0.5000 & -0.6124 & -0.6124 \\ 0.8660 & 0.3536 & 0.3536 \\ 0 & -0.7071 & 0.7071 \end{pmatrix}.$$

- Caratterizzare tutte le matrici di rotazione  $R$  per le quali il problema inverso non fornisce angoli definiti nella sequenza.

## Esercizio 2

Si consideri la struttura cinematica in Figura 1 che rappresenta una telecamera montata come testa del torso di un robot umanoide con tre giunti rotatori

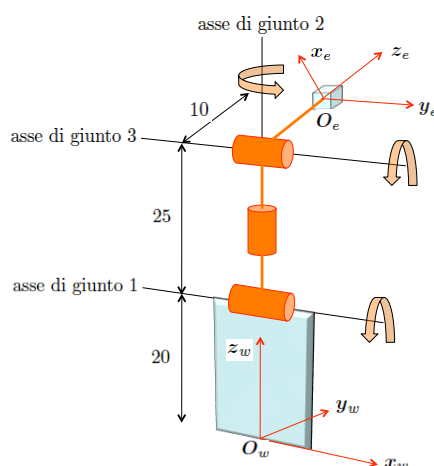


Figura 1: Cinematica della testa con telecamera (unità in cm)

- Assegnare le terne secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg in modo che il verso positivo (antiorario) delle rotazioni ai giunti sia quello indicato. Derivare la tabella dei parametri associata.
- Calcolare l'espressione della matrice di rotazione  ${}^wR_e(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  che fornisce l'orientamento della terna indicata  $SR_e$  di end-effector (telecamera) rispetto alla terna di riferimento del mondo  $SR_w$ , posta come indicato in Figura 1.
- Individuare un orientamento, mediante la relativa matrice di rotazione  ${}^wR_e$ , che può essere realizzato da infinite coppie di valori  $(\theta_1, \theta_3)$  e un singolo valore di  $\theta_2$ .

[120 minuti; libri aperti]

## Soluzioni

11 Novembre 2009

### Esercizio 1

Utilizzando le matrici di rotazione elementari intorno agli assi coordinati

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_Y(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_X(\beta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_Z(\gamma) &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

poichè la sequenza di angoli è definita rispetto a assi fissi, si ha

$$\mathbf{R}_{YXZ}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{R}_Z(\gamma)\mathbf{R}_X(\beta)\mathbf{R}_Y(\alpha),$$

or

$$\mathbf{R}_{YXZ}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ -\sin \alpha \cos \beta & \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}.$$

La relazione inversa tra una data matrice di rotazione

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

e la sequenza di angoli  $(\alpha, \beta, \gamma)$  è data da

$$\beta = \text{ATAN2} \left\{ r_{32}, \pm \sqrt{r_{31}^2 + r_{33}^2} \right\}$$

e, nell'ipotesi che sia  $r_{31}^2 + r_{33}^2 \neq 0$  (ovvero,  $\cos \beta \neq 0$ ),

$$\alpha = \text{ATAN2} \left\{ \frac{-r_{31}}{\cos \beta}, \frac{r_{33}}{\cos \beta} \right\}, \quad \gamma = \text{ATAN2} \left\{ \frac{-r_{12}}{\cos \beta}, \frac{r_{22}}{\cos \beta} \right\}.$$

Con i dati del problem, si ottiene la coppia di soluzioni:

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (0, -0.7854, 1.0472) \text{ [rad]} = (0, -45, 60) \text{ [deg]}$$

e

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (3.1416, -2.3562, -2.0944) \text{ [rad]} = (180, -135, -120) \text{ [deg]}.$$

Quando  $r_{31} = r_{33} = 0$ ,  $\beta$  è definito in modo unico mentre gli altri dati del problema permettono di individuare solo il valore della somma  $\alpha + \gamma$  o della differenza  $\alpha - \gamma$ . Infatti, per una matrice di rotazione della forma

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} \\ r_{21} & 0 & r_{23} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ossia con  $r_{32} = 1$ , si ottiene  $\beta = \pi/2$  ( $\cos \beta = 0$ ,  $\sin \beta = 1$ ) e quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{YZZ}(\alpha, \pi/2, \gamma) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & 0 & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & 0 & \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \gamma) & 0 & \sin(\alpha + \gamma) \\ \sin(\alpha + \gamma) & 0 & -\cos(\alpha + \gamma) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\alpha + \gamma = \text{ATAN2}\{r_{21}, r_{11}\} = \text{ATAN2}\{r_{13}, -r_{23}\}.$$

In modo analogo, per una matrice di rotazione della forma

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} \\ r_{21} & 0 & r_{23} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

ossia con  $r_{32} = -1$ , si ottiene  $\beta = -\pi/2$  ( $\cos \beta = 0$ ,  $\sin \beta = -1$ ) e quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{YZZ}(\alpha, -\pi/2, \gamma) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & 0 & \sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & 0 & \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \gamma) & 0 & \sin(\alpha - \gamma) \\ -\sin(\alpha - \gamma) & 0 & \cos(\alpha - \gamma) \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\alpha - \gamma = \text{ATAN2}\{-r_{21}, r_{11}\} = \text{ATAN2}\{r_{13}, r_{23}\}.$$

In entrambi i casi, gli angoli  $\alpha$  e  $\gamma$  non sono definiti completamente.

## Esercizio 2

L'assegnazione delle terne di Denavit-Hartenberg è mostrata in Figura 2, dove i versi degli assi  $\mathbf{z}_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) sono stati scelti in modo consistente a quanto richiesto nel testo. Nella configurazione mostrata si ha  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 0$ , mentre  $\theta_3$  è pari a un valore positivo compreso tra  $\pi/2$  e  $3\pi/4$ .

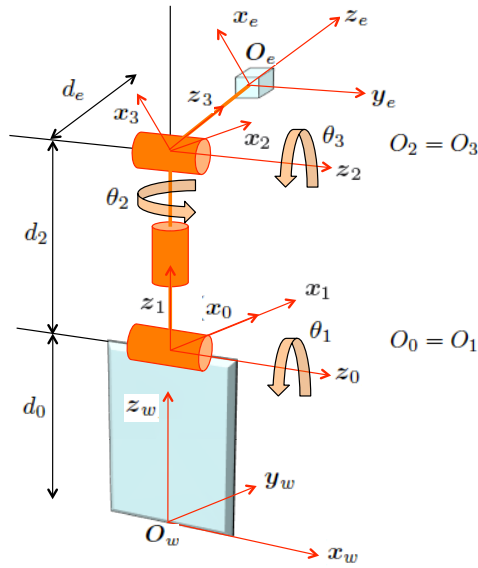


Figura 2: Terne di Denavit-Hartenberg

$i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	$\theta_1$
2	$\frac{\pi}{2}$	0	$d_2$	$\theta_2$
3	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$\theta_3$

Tabella 1: Parametri di Denavit-Hartenberg

I parametri di Denavit-Hartenberg sono riportati nella Tabella 1, dove  $d_2 = 25$  cm. Le matrici di trasformazione omogenea associate sono:

$${}^0\mathbf{A}_1(\theta_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{R}_1(\theta_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix},$$

$${}^1\mathbf{A}_2(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1\mathbf{R}_2(\theta_2) & {}^1\mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix},$$

$${}^2\mathbf{A}_3(\theta_3) = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & 0 & \sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & 0 & -\cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^2\mathbf{R}_3(\theta_3) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo inoltre definire le seguenti matrici (costanti) di trasformazione omogenea:

$${}^w\mathbf{T}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^w\mathbf{R}_0 & {}^w\mathbf{p}_{w0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix},$$

$${}^3\mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^3\mathbf{R}_e & {}^3\mathbf{p}_{3e} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix},$$

con  $d_0 = 20$  cm e  $d_e = 10$  cm. Si noti che  ${}^3\mathbf{R}_e = \mathbf{I}$ .

L'orientamento della terna  $SR_e$  rispetto alla terna del mondo  $SR_w$  è quindi dato dalla

$$\begin{aligned} {}^w\mathbf{R}_e(\boldsymbol{\theta}) &= {}^w\mathbf{R}_0 {}^0\mathbf{R}_1(\theta_1) {}^1\mathbf{R}_2(\theta_2) {}^2\mathbf{R}_3(\theta_3) {}^3\mathbf{R}_e \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \\ &\quad \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - \sin\theta_1 \sin\theta_3 & \cos\theta_1 \sin\theta_2 & \cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 + \sin\theta_1 \cos\theta_3 \\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 + \cos\theta_1 \sin\theta_3 & \sin\theta_1 \sin\theta_2 & \sin\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 - \cos\theta_1 \cos\theta_3 \\ -\sin\theta_2 \cos\theta_3 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \sin\theta_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Data una matrice di rotazione  ${}^w\mathbf{R}_e$  che specifica l'orientamento desiderato, si può quindi procedere alla soluzione del problema cinematico inverso per questa struttura robotica a tre gradi di libertà. In particolare, si può risolvere rispetto a  $\boldsymbol{\theta}$  la seguente equazione cinematica

$${}^0\mathbf{R}_1(\theta_1) {}^1\mathbf{R}_2(\theta_2) {}^2\mathbf{R}_3(\theta_3) = {}^w\mathbf{R}_0^T {}^w\mathbf{R}_e = {}^0\mathbf{R}_e = \begin{pmatrix} {}^0r_{11} & {}^0r_{12} & {}^0r_{13} \\ {}^0r_{21} & {}^0r_{22} & {}^0r_{23} \\ {}^0r_{31} & r_{32} & {}^0r_{33} \end{pmatrix},$$

dove la matrice a destra dell'uguaglianza è costante. Ragionando in modo simile a quanto visto nell'Esercizio 1, è possibile mostrare che il problema inverso di orientamento ha un insieme infinito di soluzioni per  $\theta_1$  e  $\theta_3$  (con un valore prefissato per la loro somma o differenza) se e solo se

$${}^0r_{31} = {}^0r_{33} = 0 \quad ({}^0r_{32} = \pm 1).$$

Tutte le possibili matrici di rotazione  ${}^w\mathbf{R}_e$  che portano ad una tale situazione hanno la forma

$${}^w\mathbf{R}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^0r_{11} & 0 & {}^0r_{13} \\ {}^0r_{21} & 0 & {}^0r_{23} \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ {}^0r_{11} & 0 & {}^0r_{13} \\ {}^0r_{21} & 0 & {}^0r_{23} \end{pmatrix}.$$

Per esempio, una tale candidata è

$${}^w\mathbf{R}_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

\*\*\*\*\*