Prova Scritta di Robotica I

10 Settembre 2009

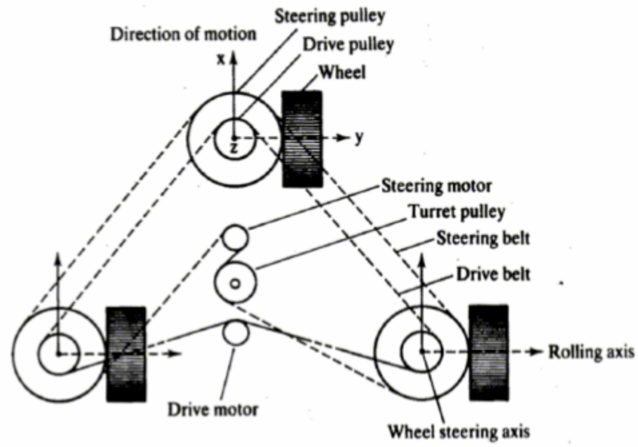

Figura 1: Manipolatore mobile (a sinistra) e *synchro-drive* della base (a destra)

Si consideri il manipolatore mobile in Figura 1, composto da una base anolonoma (Nomad) e un manipolatore articolato $6R$ con off-set di spalla e gomito (che si compensano) e polso sferico (Unimation Puma). La base ha tre identiche ruote orientabili centrate che si muovono in modo coordinato, pilotate da un sistema di attuazione *synchro-drive* che ha un motore per la rotazione comune delle ruote e uno per il loro orientamento simultaneo. Sia v la velocità lineare al suolo delle ruote e ω la velocità di orientamento delle ruote rispetto allo chassis della base mobile. Si è interessati alla sola posizione $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ del centro del polso sferico del manipolatore, con i primi tre giunti descritti dalle coordinate $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$ di Denavit-Hartenberg e i restanti bloccati. Determinare la matrice $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$ di dimensioni 3×5 nella relazione

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{u},$$

dove $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^6$ è il vettore delle variabili di configurazione del manipolatore mobile e

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} v & \omega & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^5$$

è il vettore dei comandi di velocità disponibili.

[120 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzione

10 Settembre 2009

Si assegni un sistema di riferimento assoluto $(\boldsymbol{x}_w, \boldsymbol{y}_w, \boldsymbol{z}_w)$, con asse $\boldsymbol{z}_w$ normale al piano del moto. La base mobile è descritta dalle coordinate (x, y, θ), che rappresentano la posizione cartesiana del suo centro e l'orientamento assoluto delle tre ruote rispetto all'asse $\boldsymbol{x}_w$. Il modello cinematico (differenziale) della base è quello di un uniciclo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos\theta \\ \dot{y} &= v \sin\theta \\ \dot{\theta} &= \omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Si noti che l'orientamento della base (e della sua torretta) *non* cambia quando cambia l'orientamento delle ruote. Le ruote infatti cambiano il loro orientamento rispetto allo chassis della base.

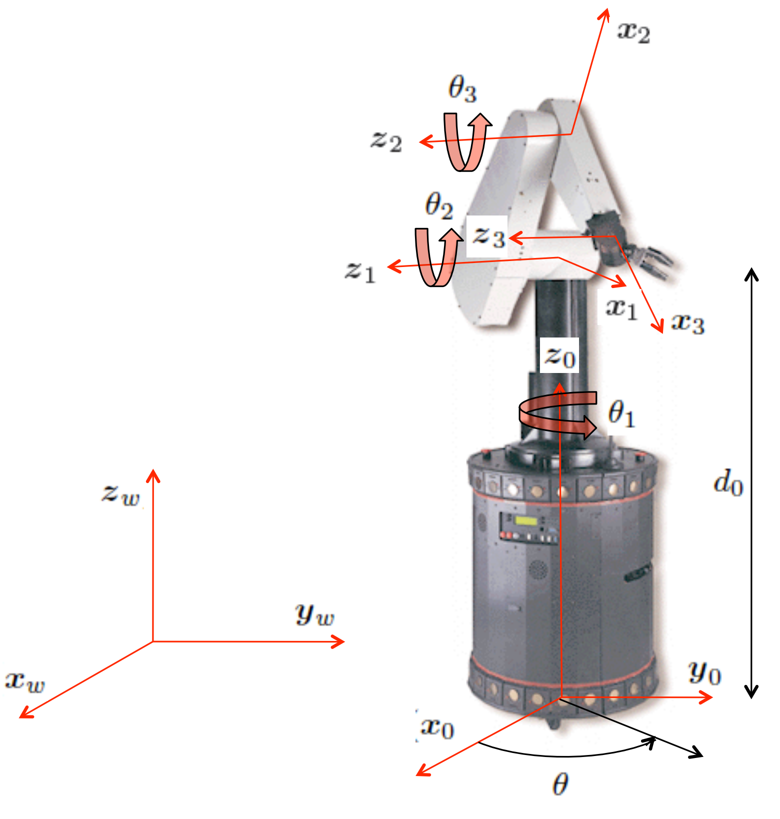

Figura 2: Terne di riferimento per il manipolatore mobile

Scelto poi un sistema di riferimento del manipolatore $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{z}_0)$ orientato come quello assoluto e posto sulla base mobile (vedi Figura 2), si avrà per la posizione del centro polso

$$
{}^0\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} (\ell_2 \cos\theta_2 + \ell_3 \cos(\theta_2+\theta_3)) \cos\theta_1 \\ (\ell_2 \cos\theta_2 + \ell_3 \cos(\theta_2+\theta_3)) \sin\theta_1 \\ d_0 + \ell_2 \sin\theta_2 + \ell_3 \sin(\theta_2+\theta_3) \end{pmatrix},
$$

dove le variabili $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ sono quelle di Denavit-Hartenberg, d_0 è la quota dal suolo dell'asse del secondo giunto (orizzontale) del manipolatore e la presenza degli offset di spalla e gomito è ininfluente dal punto di vista cinematico. Ne segue

$$
{}^w\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + {}^0\boldsymbol{p}.
$$

Differenziando rispetto al tempo e utilizzando la (1) si ottiene

$$
{}^w\dot{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} + {}^0\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{u} =
$$

$$
\begin{pmatrix} c\theta & 0 & -(\ell_2 c\theta_2 + \ell_3 c(\theta_2+\theta_3))\, s\theta_1 & -(\ell_2 s\theta_2 + \ell_3 s(\theta_2+\theta_3))\, c\theta_1 & -\ell_3 s(\theta_2+\theta_3) c\theta_1 \\ s\theta & 0 & (\ell_2 c\theta_2 + \ell_3 c(\theta_2+\theta_3))\, c\theta_1 & -(\ell_2 s\theta_2 + \ell_3 s(\theta_2+\theta_3))\, s\theta_1 & -\ell_3 s(\theta_2+\theta_3) s\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & \ell_2 c\theta_2 + \ell_3 c(\theta_2+\theta_3) & \ell_3 c(\theta_2+\theta_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix},
$$

dove si è usata la notazione compatta s per sin e c per cos. Lo Jacobiano $\boldsymbol{J}$ del manipolatore mobile ha sempre la seconda colonna strutturalmente nulla, corrispondente al fatto che il comando ω non ha nessun effetto sulla velocità del centro polso.

Per completezza, valutiamo le singolarità di $\boldsymbol{J}$ (ossia le configurazioni per cui il rango di questa matrice è minore di 3). A tal fine, si noti che le ultime tre colonne sono lo Jacobiano ${}^0\boldsymbol{J}_m = {}^w\boldsymbol{J}_m$ del solo manipolatore. Per avere singolarità dell'intera struttura è chiaro che il manipolatore stesso deve trovarsi *necessariamente* in singolarità. Poiché

$$
\begin{aligned}
{}^0\boldsymbol{J}_m(\boldsymbol{\theta}) &= {}^0\boldsymbol{R}_1(\theta_1)\, {}^1\boldsymbol{J}_m(\boldsymbol{\theta}) \\
&= {}^0\boldsymbol{R}_1(\theta_1) \begin{pmatrix} 0 & -(\ell_2 s\theta_2 + \ell_3 s(\theta_2+\theta_3)) & -\ell_3 s(\theta_2+\theta_3) \\ \ell_2 c\theta_2 + \ell_3 c(\theta_2+\theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & \ell_2 c\theta_2 + \ell_3 c(\theta_2+\theta_3) & \ell_3 c(\theta_2+\theta_3) \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

è semplice verificare che ciò avviene quando (singolarità di piantone)

$$
\ell_2 \cos\theta_2 + \ell_3 \cos(\theta_2+\theta_3) = 0,
$$

oppure (terzo braccio steso o ripiegato)

$$
\sin\theta_3 = 0,
$$

o entrambe contemporaneamente (nel qual caso il rango di $\boldsymbol{J}_m$ scende a 1). Nel primo tipo di singolarità, il centro polso del manipolatore non può avere una velocità nella direzione normale al piano in cui giacciono il secondo e terzo braccio; affinché la base possa fornire mobilità in tale direzione (mediante il comando v), è necessario e sufficiente che le ruote non siano orientate nel piano del secondo e terzo braccio, ossia $\theta \neq \theta_1 + k\pi$, $k = 0, 1$. Nel secondo tipo di singolarità, il centro polso non può avere una velocità nella direzione di allineamento del secondo e terzo braccio; affinché la base possa fornire tale mobilità, è necessario e sufficiente che le ruote non siano orientate normalmente a tale direzione, ossia $\theta \neq \theta_1 \pm \pi/2$. Se il manipolatore è in singolarità doppia, la base mobile non può invece mai recuperare il rango mancante in modo che $\boldsymbol{J}$ sia non singolare.

* * * * *