COGNOME: NOME: MATRICOLA:

Sapienza Università di Roma

Unità Didattica Sistemi Digitali di Controllo

Prova Scritta del 16 Febbraio 2010

1. Data la funzione di trasferimento di un regolatore analogico

$$R^o(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{s}{s+1}$$

determinare la funzione di trasferimento $R^*(z)$ del corrispondente regolatore digitale ottenuto utilizzando il metodo di Tustin e $T = 2$. Determinare quindi la relativa equazione alle differenze ingresso-uscita del regolatore digitale.

Nota: si ricorda che con il metodo di Tustin si ha $s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$.

2. Si consideri il sistema retroazionato a tempo discreto rappresentato in Fig. 1 dove

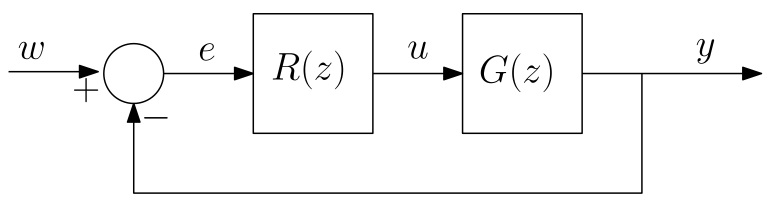

Figura 1: Sistema retroazionato a tempo discreto

$$G(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{z+2} \; .$$

Progettare $R(z)$ **strettamente propria** in modo che l'errore corrispondente ad un riferimento a scalino sia nullo a regime permanente.

Proposta di soluzione

1. Si ha
$$R^*(z) = \frac{U^*(z)}{E^*(z)} = R^o\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{1}{2}(1 - z^{-1})\ .$$
La corrispondente equazione alle differenze ingresso-uscita è data da
$$u^*(k) = \frac{1}{2}(e^*(k) - e^*(k-1))\ .$$

2. Per soddisfare la specifica sulla precisione a regime permanente e tenendo conto che si richiede che $R(z)$ sia strettamente propria, consideriamo il processo “allargato”
$$\tilde{G}(z) = \frac{1}{z-1}G(z) = \frac{z-\frac{1}{2}}{(z-1)(z+2)}\ ,$$
e determiniamo una $\tilde{R}(z)$ tale che gli autovalori del sistema retroazionato siano tutti interni al cerchio unitario. Essendo il grado del denominatore di $\tilde{G}(z)$ pari a due, ciò si può ottenere con una $\tilde{R}(z)$ con grado del numeratore e del denominatore pari a uno. Per semplificare i calcoli, poniamo
$$\tilde{R}(z) = \frac{q_1 z + q_0}{z - \frac{1}{2}}\ ,$$
e determiniamo q_0 e q_1 imponendo che
$$(z-1)(z+2) + q_1 z + q_0 = z^2\ . \tag{1}$$
Applicando il principio di identità dei polinomi e risolvendo il risultante sistema di equazioni lineari nelle incognite q_0 e q_1, si trova che
$$\begin{aligned} q_1 &= -1 \\ q_0 &= 2\ . \end{aligned}$$
Pertanto
$$R(z) = \frac{1}{z-1}\tilde{R}(z) = \frac{-z+2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}\ . \tag{2}$$
Notare che $R(z)$ risulta strettamente propria grazie alla scelta effettuata di $\tilde{G}(z)$.