SISTEMI DIGITALI DI CONTROLLO

PROGETTO DI SISTEMI A TEMPO DI RISPOSTA FINITO

Prof. Alessandro De Luca

DIS, Università di Roma “La Sapienza”

deluca@dis.uniroma1.it

Lucidi tratti dal libro

A. Isidori: “Sistemi di Controllo”, Vol. I

Capitolo VII: Sistemi di controllo numerico

Paragrafi VII.4 (fine) e VII.6

Progetto di sistemi a tempo di risposta finito – Sommario

– Caratterizzazione dei sistemi discreti a tempo di risposta finito
– Progetto con tempo di risposta finito (deadbeat) e minimo
  - caso elementare (cancellazione totale)
  - caso di poli instabili e/o zeri a fase non minima
– Condizioni di risposta piatta per ingressi a gradino
– Progetto con risposta piatta in tempo finito e minimo
  - caso di possibili poli instabili

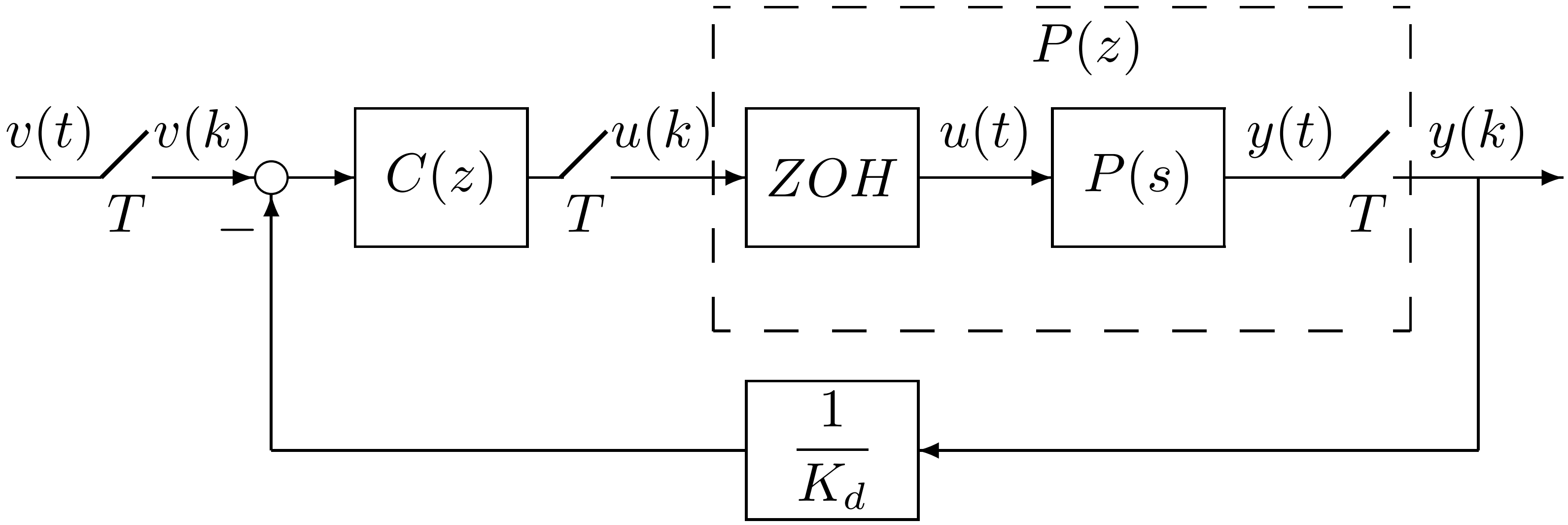
Nota

Rispetto all'analoga trattazione del libro di testo, le principali differenze sono

– presentazione dai casi più semplici a quelli generali (e non viceversa)
– riferimento diretto alla funzione di trasferimento di errore
– condizioni esplicite di risposta piatta
– retroazione eventualmente non unitaria
– notazione leggermente diversa, uso esclusivo di polinomi con potenze positive di z

Notazioni

Si farà riferimento al seguente sistema di controllo digitale per un processo continuo



con $y_d(t) = K_d v(t)$

Funzioni di trasferimento discrete di interesse

$$P(z) = \mathcal{Z}[H_0(s)P(s)] \qquad G(z) = P(z)C(z) \text{ (catena diretta)} \qquad F(z) = \frac{1}{K_d}P(z)C(z) \text{ (anello)}$$

$$W(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{G(z)}{1+F(z)} = \frac{K_d G(z)}{K_d + G(z)} \text{ (anello chiuso)}$$

$$E(z) = Y_d(z) - Y(z) = (K_d - W(z))Y(z) \quad \Rightarrow \quad W_e(z) = \frac{E(z)}{V(z)} = \frac{K_d^2}{K_d + G(z)} \text{ (errore)}$$

Tempo di risposta finito – 1

Per un sistema $W(z)$ asintoticamente stabile, la risposta transitoria ad un gradino discreto unitario può convergere al valore di regime, con errore costante (sistemi di tipo 0) o nullo (sistemi di tipo h $\geq$ 1), in tempo finito: $\exists$ indice $l : \forall k \geq l,\ e(k) = e_0$

Si ha allora necessariamente

$$
\begin{aligned}
E(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} e(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{l-1} e(k) z^{-k} + \sum_{k=l}^{\infty} e_0 z^{-k} = \sum_{k=0}^{l-1} (e(k) - e_0) z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} e_0 z^{-k} \\
&= \frac{N(z)}{z^{l-1}} + e_0 \frac{z}{z-1} = \frac{(z-1)N(z) + e_0 z^l}{(z-1) z^{l-1}} = W_e(z) \frac{z}{z-1} \\
&\Rightarrow W_e(z) = \frac{(z-1)N(z) + e_0 z^l}{z^l}
\end{aligned}
$$

dove $N(z)$ è al massimo di grado $(l-1)$

Pertanto le condizioni necessarie e sufficienti affinchè ciò avvenga sono

- $W_e(z)$ ha tutti i poli in $z = 0$
- $W_e(z)$ ha almeno uno zero in $z = 1$ se il sistema è di tipo h $\geq$ 1 (a regime $e_0 = 0$)

Tempo di risposta finito – 2

Tale proprietà si estende alla risposta ad una rampa unitaria (campionata)

$$v(t) = t \quad \longrightarrow \quad V(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

Ripetendo i passaggi per un sistema asintoticamente stabile di tipo h ≥ 1

$$E(z) \ = \ \ldots = \frac{N(z)}{z^{l-1}} + e_1 \frac{z}{z-1} = W_e(z) \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow W_e(z) = \frac{1}{T} \frac{\left((z-1)N(z) + e_1 z^l\right)(z-1)}{z^l}$$

con e_1 costante (sistemi di tipo 1) o nullo (sistemi di tipo h ≥ 2)

Le condizioni sono allora

- $W_e(z)$ ha tutti i poli in $z = 0$ e uno zero in $z = 1$ (sistema di tipo 1)
- $W_e(z)$ ha tutti i poli in $z = 0$ e almeno due zeri in $z = 1$ (tipo h ≥ 2, con $e_1 = 0$)

. . . e così via. Nel seguito considereremo però solo ingressi a gradino.

Progetto con tempo di risposta finito – 1

In risposta ad un ingresso a gradino, desiderando un errore a regime nullo in tempo finito (pari a lT) deve dunque aversi

$$W_e(z) = \frac{K_d}{1+F(z)} = \frac{K_d(z-1)Q(z)}{z^l} \qquad (*)$$

con $Q(z)$ polinomio monico di grado $l-1$

Tre domande:

1. qual è il valore minimo ammissibile per l?
2. qual è l'espressione di una $C(z)$ realizzabile?
3. problemi di cancellazione poli-zeri dannosi alla stabilità interna?

Ci riferiremo ad un processo $P(z)$ con numeratore e denominatore coprimi, per garantire la risolubilità di una certa equazione polinomiale, e con eccesso poli-zero $n-m \geq 1$, per evitare problemi di loop algebrici nel controllo digitale

Progetto con tempo di risposta finito – 2

Dalla relazione $(*)$ sulla funzione di trasferimento di errore ad anello chiuso si ha

$$F(z) = \frac{1}{K_d}P(z)C(z) = \frac{K_d - W_e(z)}{W_e(z)} = \frac{K_d - \frac{K_d(z-1)Q(z)}{z^l}}{\frac{K_d(z-1)Q(z)}{z^l}} = \frac{z^l - (z-1)Q(z)}{(z-1)Q(z)}$$

$$\Rightarrow C(z) = \frac{K_d}{P(z)}\frac{z^l - (z-1)Q(z)}{(z-1)Q(z)}$$

La scelta (unica!) di un polinomio monico $Q(z)$ di grado $(l-1)$che minimizza il grado del numeratore di $C(z)$ è

$$Q(z) = z^{l-1} + z^{l-2} + \ldots + z + 1 \quad \rightarrow \quad z^l - (z-1)Q(z) = z^l - (z^l - 1) = 1 \;!!$$

Pertanto, in ragione dell'inversione del processo $P(s)$ contenuta nell'espressione della $C(z)$, per la realizzabilità del controllore si ha

$$l_{min} = n - m$$

Progetto con tempo di risposta finito – 3

Se il processo $P(s)$ è stabile asintoticamente e a fase minima (caso elementare: tutti i poli e zeri sono interni al cerchio unitario e quindi cancellabili), il controllore è quindi

$$C(z) = \frac{K_d}{P(z)} \frac{1}{z^{n-m} - 1}$$

e si raggiunge il minimo tempo di risposta finito. Risulta infatti

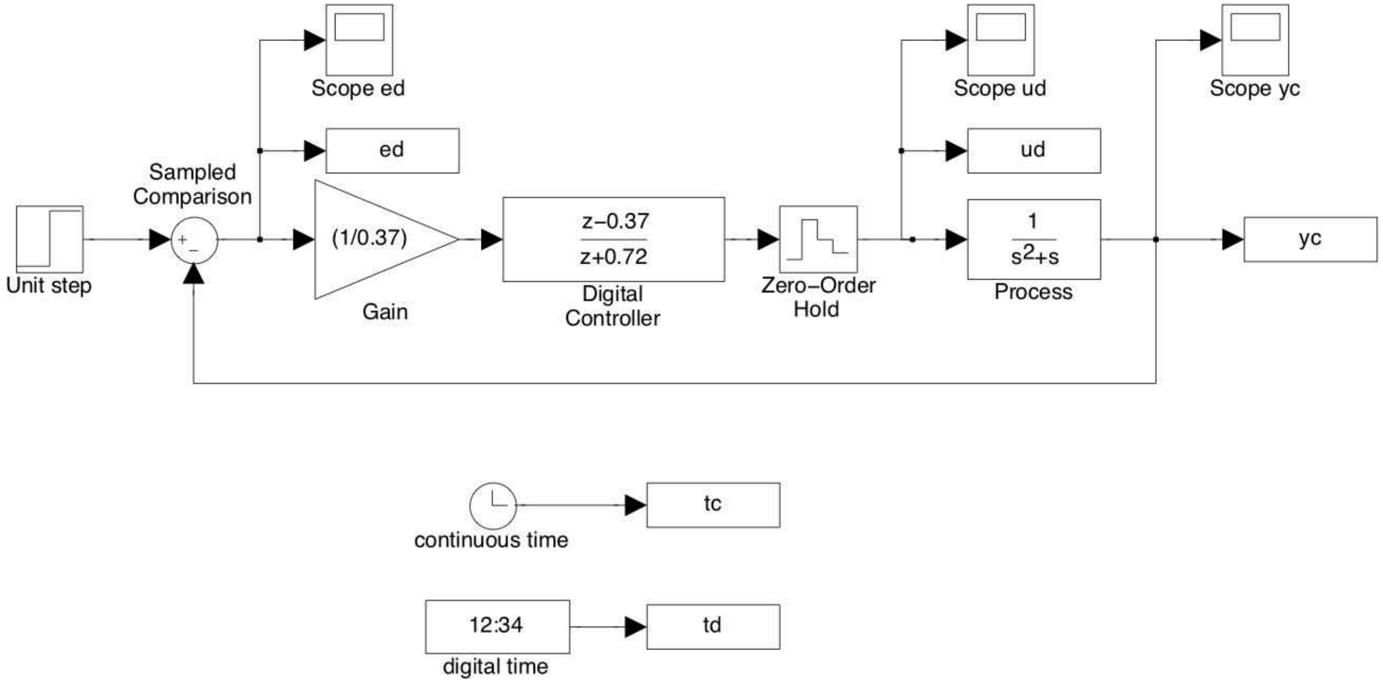
$$W(z) = \frac{K_d P(z) C(z)}{K_d + P(z) C(z)} = \frac{\frac{K_d}{z^{n-m}-1}}{K_d + \frac{K_d}{z^{n-m}-1}} = \frac{K_d}{z^{n-m}} = \frac{Y(z)}{V(z)}$$

ed essendo $V(z) = Y_d(z)/K_d$

$$Y(z) = \frac{1}{z^{n-m}} Y_d(z) \quad \rightarrow \quad y(k) = y_d(k - (n-m)) \quad \text{(equazione alle differenze)}$$

Si noti infine che il fattore $(z^{n-m} - 1)$ a denominatore della $C(z)$ ha sempre almeno una radice in $z = 1$ ($\Rightarrow$ azione integrale sempre presente in $G(z)$, sia che il processo abbia sia che non abbia già un integratore)

Esempio di progetto con tempo di risposta finito



Si consideri il processo $P(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$ con ZOH, campionamento $T = 1$ s e $K_d = 1$.

Si ha

$$P(z) = \frac{0.3679\,z + 0.2642}{z^2 - 1.368\,z + 0.3679} = \frac{0.3679(z+0.7181)}{(z-1)(z-0.3679)} \simeq \frac{0.37(z+0.72)}{(z-1)(z-0.37)}$$

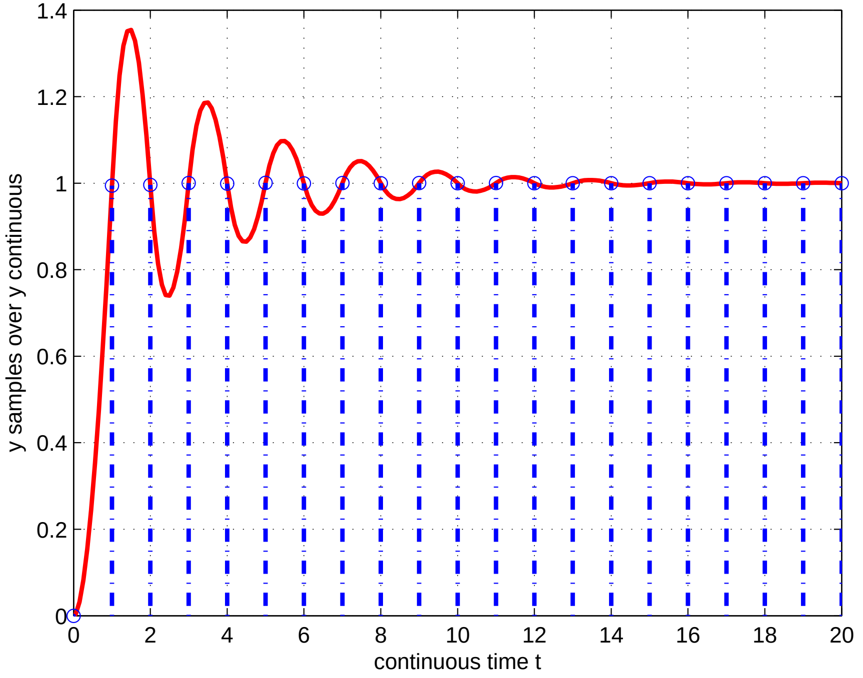
e nel progetto si utilizzerà l'approssimazione alla seconda cifra decimale. A parte l'azione integrale, il polo e lo zero di $P(z)$ sono interni al cerchio unitario

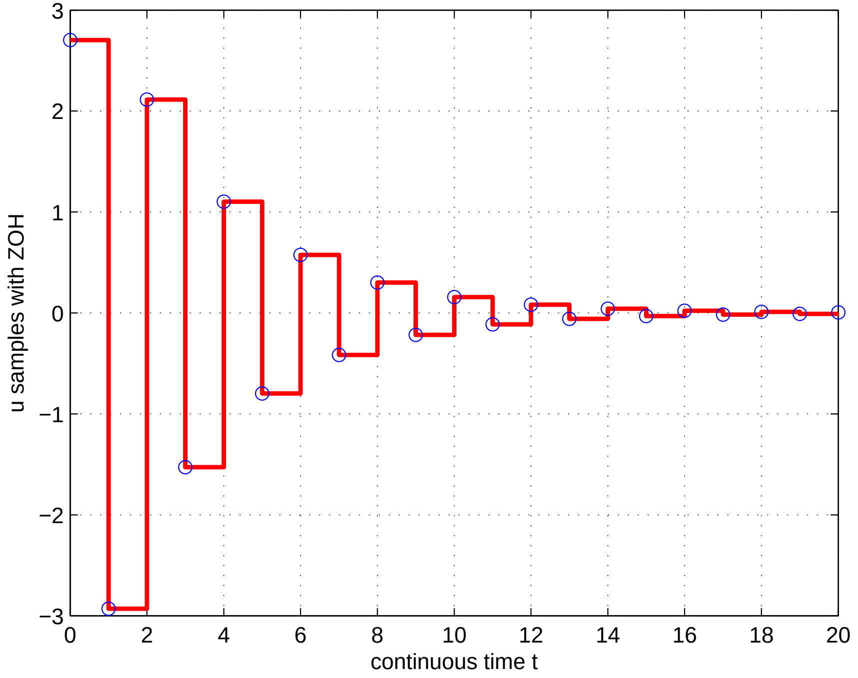
Esempio di progetto con tempo di risposta finito – cont

Essendo $n - m = 2 - 1 = 1$, il controllore è

$$C(z) = \frac{K_d}{P(z)} \frac{1}{z-1} = \frac{1}{0.37} \frac{z-0.37}{z+0.72} \qquad \rightarrow \qquad W(z) = \frac{1}{z}$$

I campioni digitali dell'uscita convergono in un solo passo $T = 1$ s al valore $y_d = 1$, ma sono presenti notevoli oscillazioni di inter-sampling su $y(t)$ associate al fenomeno di 'ringing' del comando $u(t)$ a valle dello ZOH





Progetto con tempo di risposta finito – 4

Consideriamo ora la situazione più generale in cui il processo $P(z)$ abbia poli instabili e/o zeri a fase non minima. Si definiscono $N_P^+(z)$ e $D_P^+(z)$ i polinomi che forniscono, rispettivamente, gli zeri e i poli cancellabili del processo e $N_P^-(z)$ e $D_P^-(z)$ i restanti (con D_P^- monico)

$$P(z) = \frac{N_P^+(z)}{D_P^+(z)} \frac{N_P^-(z)}{D_P^-(z)} \qquad \begin{array}{l} grado(N_P^-) = m_P = m - grado(N_P^+) \\ grado(D_P^-) = n_P = n - grado(D_P^+) \end{array}$$

Il controllore modificato per il deadbeat ha la forma

$$C(z) = \frac{K_d}{z-1} \frac{D_P^+(z)}{N_P^+(z)} \frac{N_C(z)}{D_C(z)} \qquad \text{con } D_C \text{ monico}$$

dove l'azione integrale è introdotta solo se non è già presente nel processo. Per la realizzabilità di $C(z)$ deve sussistere la seguente relazione tra i gradi dei polinomi incogniti $N_C(z)$ e $D_C(z)$

$$grado(D_C) \geq grado(N_C) + grado(D_P^+) - grado(N_P^+) - 1 \qquad (*)$$

Progetto con tempo di risposta finito – 5

Dalle

$$F = \frac{1}{K_d} PC = \frac{1}{z-1} \frac{N_P^-}{D_P^-} \frac{N_C}{D_C}$$

$$W = \frac{K_d F}{1+F} = \frac{K_d N_P^- N_C}{(z-1) D_P^- D_C + N_P^- N_C} = \frac{K_d N_P^- N_C}{den(W)}$$

$$W_e = K_d - W = \frac{K_d \left(den(W) - N_P^- N_C \right)}{den(W)}$$

la condizione di progetto con tempo di risposta finito si riscrive solo come

$$(den(W_e) = den(W) =) \; (z-1) D_P^-(z) D_C(z) + N_P^-(z) N_C(z) = z^l \qquad (**)$$

per un l opportuno. Infatti se la $(**)$ è soddisfatta, allora anche

$$num(W_e) = K_d \left(den(W) - N_P^- N_C \right) = K_d (z-1) D_P^- D_C$$

ha necessariamente uno zero in $z = 1$ (o nel processo, D_P^-, o dal fattore al denominatore della $C(z)$)

Progetto con tempo di risposta finito – 6

Studiamo la risolubilità della equazione di progetto $(**)$ (le incognite sono in rosso)

$$(z-1)D_P^-(z)D_C(z) + N_P^-(z)N_C(z) = z^l$$

Poichè D_P^- e N_P^- sono coprimi (dovunque si trovi il fattore $(z-1)$)[a], dalla teoria generale delle equazioni diofantine (anche dette di Bezout se nella forma polinomiale) esisterà certamente una soluzione. Per stabilire il minimo valore di l, calcoliamo i gradi dei polinomi coinvolti (e il numero di coefficienti incogniti)

$deg(N_C) = r$ (da definirsi) $\div\ r+1$ coefficienti

$deg(N_P^-) = m_P$

$deg(D_C) = r + (n-n_P) - (m-m_P) - 1$ (dalla $(*)$ con il segno di uguaglianza)

$\div\ r + (n-n_P) - (m-m_P) - 1$ coefficienti (monico)

$deg(D_P^-) = n_P$

$deg((z-1)) = 1$

---

[a] si può esclude la presenza di uno zero del processo in $z=1$ perchè non permetterebbe di risolvere il problema di regolazione dell'uscita ad un valore desiderato costante

Progetto con tempo di risposta finito – 7

Ne segue

$$deg((z-1)D_P^- D_C) = r + (n-m) + m_P > r + m_P = deg(N_P^- N_C)$$

e quindi necessariamente $l = r + (n-m) + m_P$. Poichè i termini di ordine massimo (uguale) a destra e sinistra dell'equazione polinomiale di progetto hanno coefficiente unitario, il principio di identità tra polinomi si esplicita in

$r + (n-m) + m_P$ equazioni e $2r + (n-m) + m_P - n_P$ coefficienti incogniti di N_C, D_C

Uguagliando tali numeri (ossia, quadrando il sistema per avere soluzione unica e grado l minimo) si ottiene $r = n_P$ (o $r = n_P - 1$, se non serve aggiungere l'integratore) e

$$l_{min} = (n-m) + n_P + m_P \qquad \text{(o } = \ldots - 1\text{, senza integratore aggiunto)}$$

che generalizza la relazione trovata nel caso elementare. Il minimo tempo di risposta aumenta di un passo di campionamento T per ogni 'evento' (polo o zero) non cancellato

Si noti infine che la sintesi porta in questo caso a $W(z) = \frac{K_d N_P^- N_C(z)}{z^{l_{min}}}$, con denominatore assegnato ma con numeratore non unitario e non prevedibile a priori (tranne per il grado totale che è pari a $n_P + m_P$)

Esempio di progetto generale con tempo di risposta finito

Si consideri il processo discreto

$$P(z) = \frac{z(z-0.5)(z^2+z+1)}{(z-3)(z-0.1)^2(z+0.5)^2} \qquad n=5,\ m=4$$

Il fattore (z^2+z+1) a numeratore ha radici in $z = 0.5\left(-1 \pm j\sqrt{3}\right)$ esterne al cerchio unitario. Risulta dunque $m_P = 2$ e $n_P = 1$. Inoltre, $P(z)$ non ha un'azione integrale

Il controllore deadbeat sarà quindi della forma

$$C(z) = \frac{1}{z-1}\,\frac{(z-0.1)^2(z+0.5)^2}{z(z-0.5)}\,\frac{N_C(z)}{D_C(z)}$$

con

$deg(N_C) = n_P = 1,\ deg(D_C) = n - (m - m_p) - 1 = 2,\ l_{min} = (n-m) + n_p + m_p = 4.$

Posto allora

$$D_C(z) = z^2 + az + b \qquad N_C(z) = cz + d$$

l'equazione di progetto è

$$(z-1)(z-3)(z^2+az+b) + (z^2+z+1)(cz+d) = z^4$$

Esempio di progetto generale con tempo di risposta finito – cont

Il sistema di quattro equazioni in quattro incognite è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che restituisce

$$a = 1.0513 \quad b = 0.8718 \quad c = 2.9487 \quad d = -2.6154$$

Il controllore è quindi di ordine 5 e proprio

$$C(z) = \frac{(z-0.1)^2(z+0.5)^2(2.9487z - 2.6154)}{z(z-1)(z-0.5)(z^2+1.0513z+0.8718)}$$

La funzione di trasferimento ingresso-uscita ad anello chiuso è

$$W(z) = \frac{(z^2+z+1)(2.9487z-2.6154)}{z^4} = \frac{Y(z)}{V(z)}$$

Problema della risposta piatta per ingressi a gradino

Si vuole studiare sotto quali condizioni è possibile avere, in risposta ad un gradino campionato:

- errore nullo dei campioni in uscita a partire da un tempo finito (e minimo)
- risposta piatta a regime al di fuori degli istanti di campionamento

$\Rightarrow$ errore definitivamente nullo dell'uscita continua a partire da un istante finito (e minimo possibile)

Si forniranno prima delle condizioni sufficienti (e alcune anche necessarie) per l'esistenza di risposta piatta in un sistema di controllo digitale e poi un procedimento di sintesi del controllore, che garantisce anche il minimo tempo per il raggiungimento di tale soluzione, basato su tali condizioni (costruttive)

Il problema ha senso solo in sistemi ibridi (controllo digitale di processi continui discretizzati)

Condizioni di risposta piatta per ingressi a gradino – 1

Teorema 1 Con riferimento allo schema del lucido #3, se $\exists$ un istante di campionamento k tale che $\forall h \geq k$ valgano le seguenti condizioni:

1. $e(h) = 0$
2. $u(h) = cost = P^* K_d$ con

$$P^* = \lim_{s \to 0} \frac{1}{P(s)} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{P(z)} = \begin{cases} 0 & \text{se } P(s) \text{ ha almeno un polo in } s = 0 \\ \text{finito} \neq 0 & \text{se } P(s) \text{ non ha poli in } s = 0 \end{cases}$$

allora, purchè si sia scelto il passo di campionamento T con una certa cautela, si avrà che l'uscita $y(t)$ del processo in risposta ad un gradino assume identicamente il valore desiderato K_d per ogni $t \geq kT$ (risposta piatta)

Prova (cenni) Nel caso di autovalori distinti ($\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$) si esprime l'uscita $y(t)$ nell'intervallo $[kT, (k+1)T)$ (usando l'hp 2) e si impone l'annullamento dell'errore (hp 1) in tutti gli istanti di campionamento $t = hT$, con $h \geq k$; ne risulta un sistema di equazioni con matrice V nella forma di Vandermonde che ha soluzione $y(t + kT) = K_d$ per ogni $t \geq 0$ se $\det V \neq 0$, il che accade per tutte le scelte di T tali che

$$e^{\lambda_i T} \neq e^{\lambda_j T} \quad \forall i \neq j$$

Condizioni di risposta piatta per ingressi a gradino – 2

Le condizioni del Teorema 1 si riscrivono come

1. $e(h) = 0 \quad \forall h \geq k \quad \Leftrightarrow \quad E(z) = \dfrac{Q(z)}{z^{k-1}}$
2. $u(h) = P^* K_d \quad \forall h \geq k \quad \Leftrightarrow \quad U(z) = P^* K_d \dfrac{z}{z-1} + \dfrac{S(z)}{z^{k-1}}$

con $Q(z)$ e $S(z)$ polinomi di grado $\leq k-1$. Sia inoltre

$$F(z) = \frac{1}{K_d} P(z) C(z) = \frac{N_F(z)}{D_F(z)}$$

Teorema 2 Con riferimento allo schema del lucido #3, le condizioni 1. e 2. sono soddisfatte se e solo se

A) $N_F(z) + D_F(z) = z^k$

B) $D_F(z)$ ha una radice in $z = 1$

C) non ci sono cancellazioni di zeri di $P(z)$ con poli di $C(z)$

Condizioni di risposta piatta per ingressi a gradino – 3

Prova Dalla

$$E(z) = W_e(z)\frac{z}{z-1} = \frac{K_d}{1+F(z)}\frac{z}{z-1} = \frac{K_d N_F(z)}{N_F(z)+D_F(z)}\frac{z}{z-1} = \frac{Q(z)}{z^{k-1}}$$

segue immediatamente la necessità di A) e B). Per provare la necessità di C), si fattorizzino $P(z)$ e $C(z)$ come al solito

$$P(z) = \frac{N_P^+(z)}{D_P^+(z)}\frac{N_P^-(z)}{D_P^-(z)} \qquad C(z) = \frac{D_P^+(z)}{N_P^+(z)}\frac{N_C(z)}{D_C(z)}$$

con i rispettivi polinomi al num/den coprimi tra loro e dove $N_P^+(z)$ sono gli eventuali zeri del processo cancellabili dal controllore. Segue

$$F(z) = \frac{N_P^-(z)N_C(z)}{K_d D_P^-(z)D_C(z)} = \frac{N_F(z)}{D_F(z)} \qquad \text{(con } N_F \text{ e } D_F \text{ coprimi)}$$

e quindi (dalla A)

$$N_F(z)+D_F(z) = N_P^-(z)N_C(z) + K_d D_P^-(z)D_C(z) = z^k$$

Condizioni di risposta piatta per ingressi a gradino – 4

Per la trasformata del segnale di controllo si ha

$$U(z) = \frac{C(z)}{1+F(z)}\,\frac{z}{z-1} = \frac{\dfrac{N_C(z)D_P^+(z)}{D_C(z)N_P^+(z)}}{1+\dfrac{N_P^-(z)N_C(z)}{K_d D_P^-(z)D_C(z)}}\,\frac{z}{z-1}$$

$$= \frac{K_d N_C(z)D_P^+(z)D_P^-(z)}{K_d D_P^-(z)D_C(z)+N_P^-(z)N_C(z)}\,\frac{1}{N_P^+(z)}\,\frac{z}{z-1}$$

$$= \frac{K_d N_C(z)D_P^+(z)D_P^-(z)}{z^k}\,\frac{1}{N_P^+(z)}\,\frac{z}{z-1}$$

$$= \frac{K_d N_C(z)D_P^+(z)D_P^-(z)}{z^{k-1}(z-1)}\,\frac{1}{N_P^+(z)} = P^* K_d\,\frac{z}{z-1}+\frac{S(z)}{z^{k-1}} = \frac{\dots}{z^{k-1}(z-1)}$$

da cui necessariamente $N_P^+(z) = cost$ (grado 0) e non possono esserci cancellazioni degli zeri (anche se a fase minima!) del processo

Per dimostrare la sufficienza delle A)-C), si ponga anzitutto $N_P^+(z) = 1$ [hp C)]

Condizioni di risposta piatta per ingressi a gradino – 5

Si ha allora per l'espressione si $U(z)$ il seguente sviluppo in frazioni parziali

$$U(z) = \frac{K_d N_C(z) D_P^+(z) D_P^-(z)}{z^{k-1}(z-1)} = \frac{S(z)}{z^{k-1}} + \frac{Az}{z-1}$$

con un trucco 'tecnico' per il residuo nel polo $z = 1$ (si sviluppa $U(z)/z$ anzichè solo $U(z)$ per far comparire la trasformata del gradino) che si calcola come

$$A = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{U(z)}{z} = \lim_{z\to 1} \frac{K_d N_C(z) D_P^+(z) D_P^-(z)}{z^k} \times \frac{N_P^-(z)}{N_P^-(z)}$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{1}{P(z)} \frac{K_d N_C(z) N_P^-(z)}{z^k} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{P(z)} \frac{K_d N_F(z)}{N_F(z) + D_F(z)} \quad \text{[dalla hp A)]}$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{K_d}{P(z)} \frac{F(z)}{1+F(z)} = \left(\lim_{z\to 1} \frac{K_d}{P(z)}\right) \cdot \left(\lim_{z\to 1} \frac{F(z)}{1+F(z)}\right) = P^* K_d \cdot 1 \quad \text{[dalla hp B)]}$$

da cui $U(z)$ ha la struttura 2. richiesta

c.v.d.

Progetto con risposta piatta per ingressi a gradino – 1

Le condizioni A) $N_F + D_F = z^k$, B) D_F ha una radice in $z = 1$, e C) nessuna cancellazione degli zeri di P si prestano bene a una sintesi costruttiva del controllore

Consideriamo dapprima il caso in cui $P(z)$ non abbia poli in $z = 1$. Sia allora

$$P(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{D_P^+(z)(z^r + a_{r-1}z^{r-1} + \ldots + a_1 z + a_0)} \qquad \text{con } grado(D_P^+) + r = n$$

dove $D_P^+(z)$ contiene gli eventuali poli (stabili) di $P(z)$ cancellabili senza problemi

Il controllore ha la struttura propria

$$C(z) = \frac{K_d}{z-1} \frac{D_P^+(z)(d_s z^s + d_{s-1}z^{s-1} + \ldots + d_1 z + d_0)}{z^m + c_{m-1}z^{m-1} + \ldots + c_1 z + c_0} \qquad \text{con } grado(D_P^+) + s = m + 1$$

Dalle definizioni dei gradi dei polinomi segue che

$$s + n = r + m + 1 \qquad \text{con } m \text{ e } s \text{ da definire}$$

mentre il numero dei coefficienti incogniti $\{c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}, d_0, d_1, \ldots, d_s\}$ è pari a

$$m + s + 1$$

Progetto con risposta piatta per ingressi a gradino – 2

Dalla $D_F + N_F = z^k$ si ha l'equazione di progetto

$$\begin{aligned} z^k &= (z-1)(z^m + c_{m-1}z^{m-1} + \ldots + c_0)(z^r + a_{r-1}z^{r-1} + \ldots + a_0) \\ &\quad + (b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_0)(d_s z^s + d_{s-1}z^{s-1} + \ldots + d_0) \end{aligned}$$

in cui il polinomio a destra è certamente di grado $(m+r+1)$ con $(m+s+1)$ coefficienti incogniti

Per la risolubilità occorre allora che

$$s \geq r \qquad\qquad k = m + r + 1 \, (= n + s)$$

per cui il campione k a partire dal quale si può avere risposta piatta non può essere comunque inferiore al grado n del denominatore di $P(z)$

Il valore minimo di k si ottiene per $s = 0$, il che implica $k_{min} = n$ e $r = 0$. Ciò accade quando l'intero denominatore $den(P) = D_P^+$ è cancellabile, ossia il processo $P(z)$ è asintoticamente stabile. Il controllore diventa

$$C(z) = \frac{K_d \, d_0 \, D_P^+(z)}{(z-1)(z^m + c_{m-1}z^{m-1} + \ldots + c_1 z + c_0)} \qquad (m = n-1)$$

ed è possibile determinarne i coefficienti incogniti in forma esplicita

Progetto con risposta piatta per ingressi a gradino – 3

Infatti in tal caso l'equazione di progetto

$$z^n = (z-1)(z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \ldots + c_0) + (b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_0)d_0$$

è equivalente, per il principio di identità dei polinomi, a un sistema di n equazioni in n incognite della forma

$$\begin{aligned}
b_0d_0 - c_0 &= 0\\
b_1d_0 + c_0 - c_1 &= 0\\
b_2d_0 + c_1 - c_2 &= 0\\
\vdots &= \vdots\\
b_{n-2}d_0 + c_{n-3} - c_{n-2} &= 0\\
b_{n-1}d_0 + c_{n-2} &= 1
\end{aligned}$$

Sommando tutte le equazioni si ha $(b_{n-1} + b_{n-2} + \ldots + b_1 + b_0)\, d_0 = 1$ e poichè

$$num(P(1)) = b_{n-1} + b_{n-2} + \ldots + b_1 + b_0 \neq 0$$

cioè il processo non ha zeri in $z = 1$ (in caso contrario, non sarebbe neanche possibile per la $D_F(z)$ avere un polo in $z = 1$), il sistema è risolubile

Progetto con risposta piatta per ingressi a gradino – 4

Si ha allora

$$
\begin{aligned}
d_0 &= \frac{1}{b_{n-1} + b_{n-2} + \ldots + b_1 + b_0} \\
c_0 &= b_0\, d_0 \\
c_1 &= c_0 + b_1\, d_0 = d_0(b_1 + b_0) \\
&\vdots \\
c_{n-3} &= c_{n-4} + b_{n-3}\, d_0 = d_0(b_{n-3} + b_{n-4} + \ldots + b_1 + b_0) \\
c_{n-2} &= c_{n-3} + b_{n-2}\, d_0 = d_0(b_{n-2} + b_{n-3} + \ldots + b_1 + b_0)
\end{aligned}
$$

Ovviamente nel caso in cui non si possano cancellare tutti i poli del processo, la soluzione va trovata numericamente caso per caso. Si applicano i risultati del caso generale di risposta in tempo finito, tenendo presente che per avere risposta piatta si ha sempre $m_P = m$. La seguente tabella ricapitola le diverse situazioni:

l_{min}/k_{min}	deadbeat	risposta piatta
P: stabile, a fase minima	$n - m$	n
P: stabile, m_P zeri a fase non minima	$(n - m) + m_P$	n
P: a fase minima, n_P poli instabili	$(n - m) + n_P$	$n + n_P$
P: n_P poli instabili, m_P zeri a fase non minima	$(n - m) + n_P + m_P$	$n + n_P$

Progetto con risposta piatta per ingressi a gradino – 5

Rimane da trattare il caso in cui $P(z)$ abbia un polo in $z = 1$, che però non presenta particolari differenze. Si ha allora

$$P(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{(z-1)D_P^+(z)(z^r + a_{r-1}z^{r-1} + \ldots + a_1 z + a_0)} \qquad \text{con } grado(D_P^+) + r + 1 = n$$

e il controllore ha ancora la struttura propria

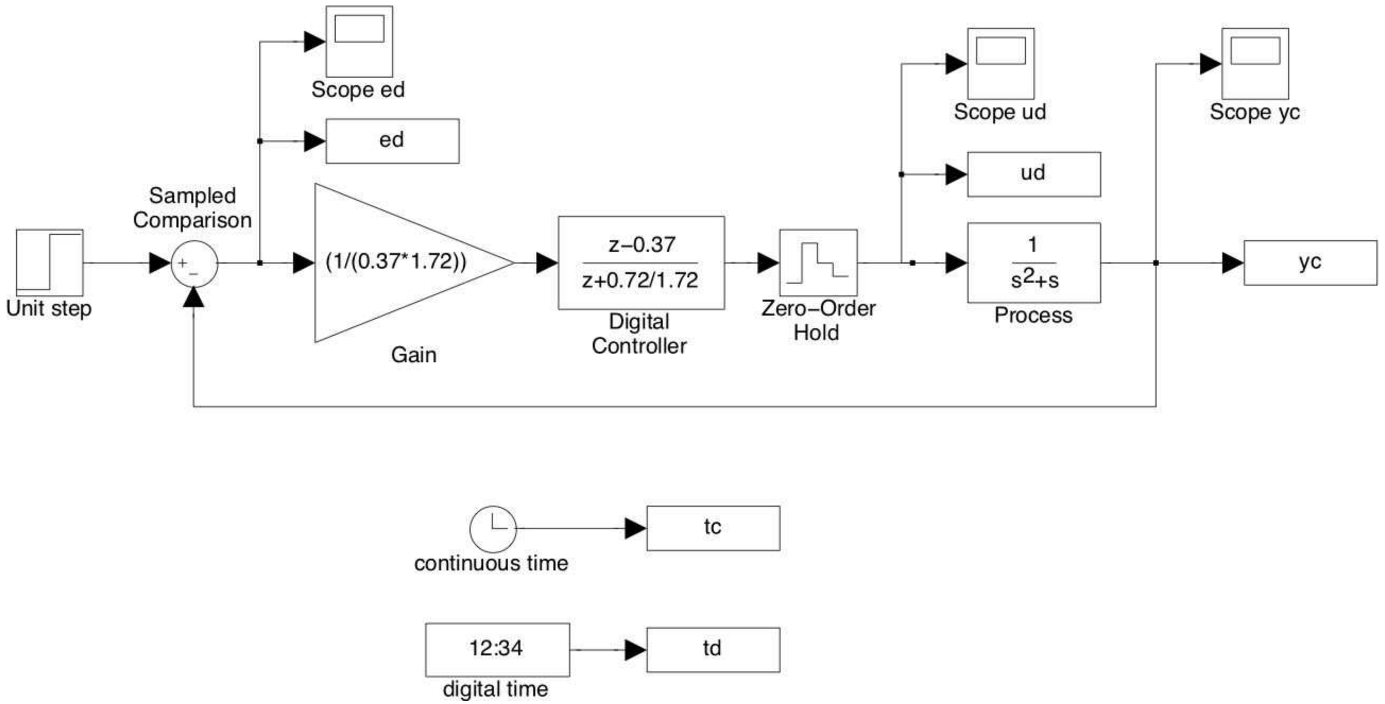
$$C(z) = \frac{K_d\, D_P^+(z)(d_s z^s + d_{s-1}z^{s-1} + \ldots + d_1 z + d_0)}{z^m + c_{m-1}z^{m-1} + \ldots + c_1 z + c_0} \qquad \text{con } grado(D_P^+) + s = m$$

Poichè dalle definizioni dei gradi dei polinomi segue la stessa relazione di progetto del caso di $P(z)$ senza azione integrale

$$s + n = r + m + 1 \qquad \text{con } m \text{ e } s \text{ da definire}$$

il resto della trattazione procede in modo del tutto analogo

Esempio di progetto con risposta piatta



Si riconsideri il processo $P(s)$ dell'esempio di progetto deadbeat

$$P(z) \simeq \frac{0.37(z+0.72)}{(z-1)(z-0.37)} \qquad T = 1\,\text{s} \qquad P^* = 0$$

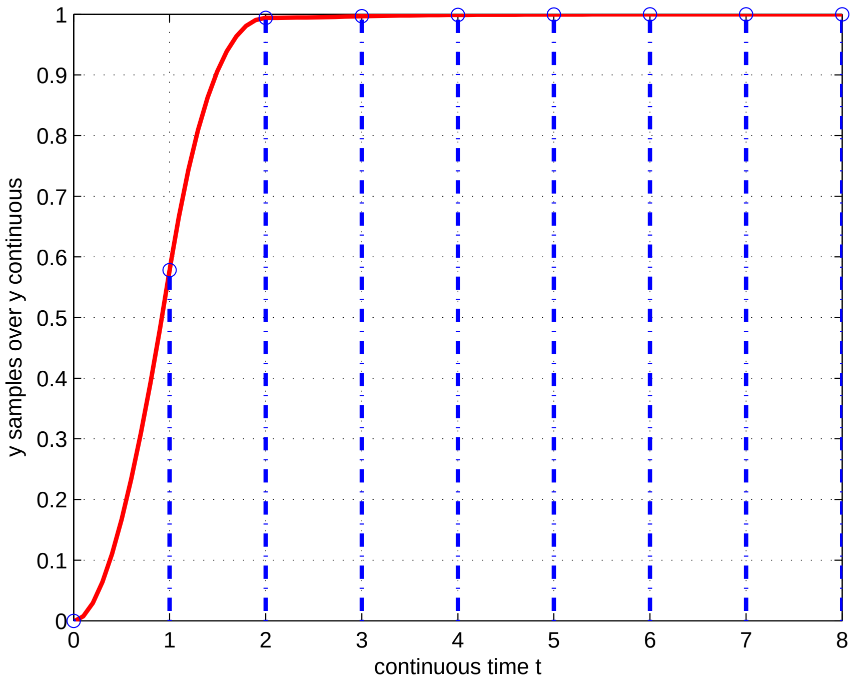
in cui $D_p^+(z) = (z - 0.37)$ è cancellabile, ma per avere risposta piatta lo zero non si può più rimuovere ($m_P = 1$; $b_1 = 0.37$, $b_0 = 0.37 \cdot 0.71$)

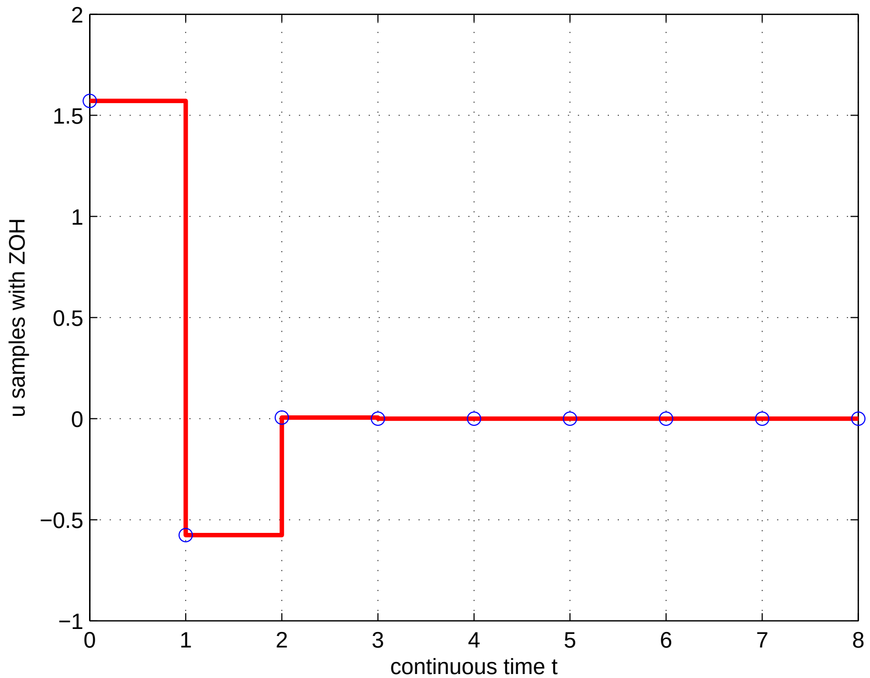
Esempio di progetto con risposta piatta – cont

Il progetto (con $k = (n - m) + m_P = 1 + 1 = 2$) prevede

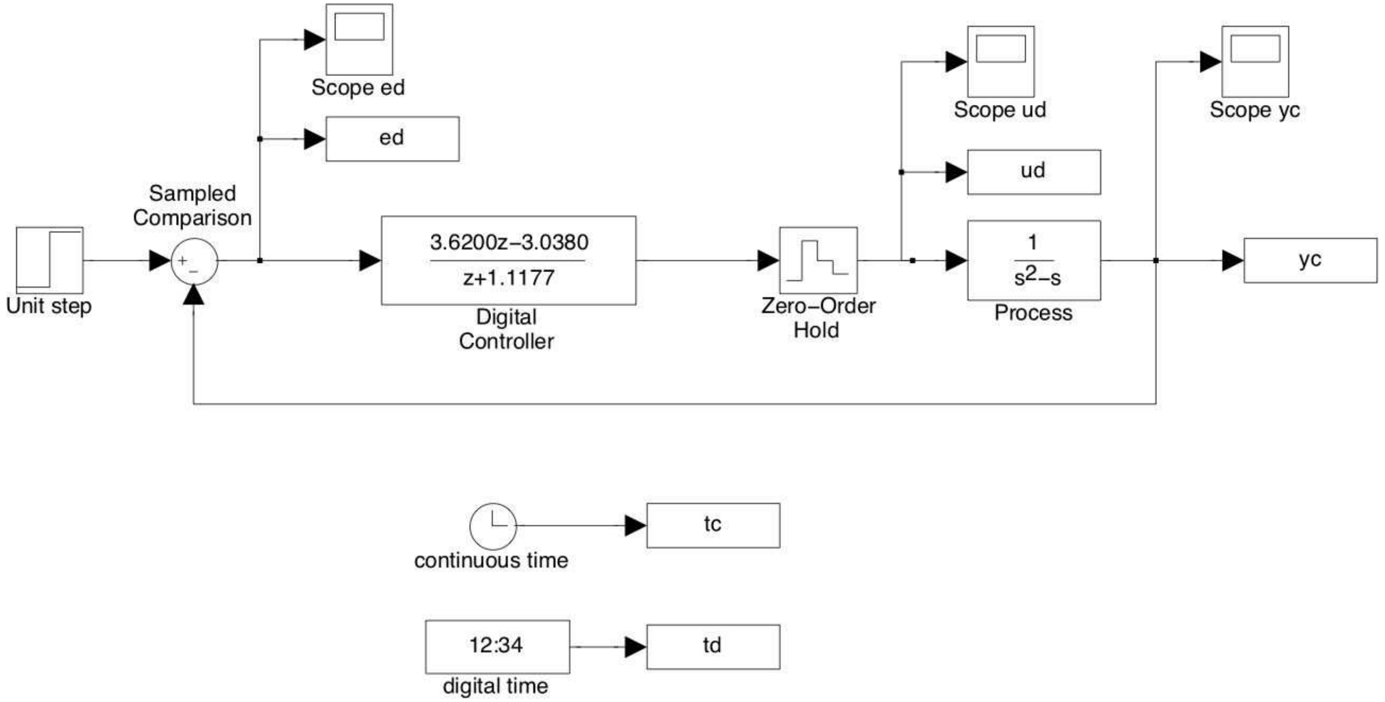
$$C(z) = \frac{(z - 0.37)d_0}{z + c_0} \quad (z-1)(z+c_0)+0.37d_0(z+0.72) = z^2 \quad d_0 = \frac{1}{0.37 \cdot 1.72} \; c_0 = \frac{0.72}{1.72}$$

L'uscita continua diviene piatta e assume il valore desiderato unitario ($K_d = 1$) a partire da $2T = 2$ s, con $u(h \geq k) = 0$





Secondo esempio di progetto con risposta piatta – 1



Si consideri il processo instabile $P(s) = \dfrac{1}{s(s-1)}$ con ZOH, $T = 1$ s e $K_d = 1$. Si ha

$$P(z) = \frac{b_1 z + b_0}{(z-1)(z+a_0)} = \frac{0.7183\, z + 1}{(z-1)(z-2.7180)} \simeq \frac{0.72\, z + 1}{(z-1)(z-2.72)} = P'(z)$$

Nel progetto si utilizzeranno sia i valori con quattro cifre decimali ($P(z)$) che quelli approssimati alla seconda cifra ($P'(z)$). A parte l'azione integrale, nè polo (instabile) nè zero (risposta piatta, comunque a fase non minima) sono cancellabili ($m_P = 1$, $n_P = 1$)

Secondo esempio di progetto con risposta piatta – 2

In questo caso $r = 1$, e quindi $s = 1, m = 1 \rightarrow k_{min} = 3$. Si pone

$$C(z) = \frac{d_1 z + d_0}{z + c_0} \qquad \Rightarrow \qquad (b_1 z + b_0)(d_1 z + d_0) + (z-1)(z+a_0)(z+c_0) = z^3$$

Il sistema da risolvere è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ a_0 - 1 & b_1 & b_0 \\ -a_0 & b_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a_0 \\ a_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

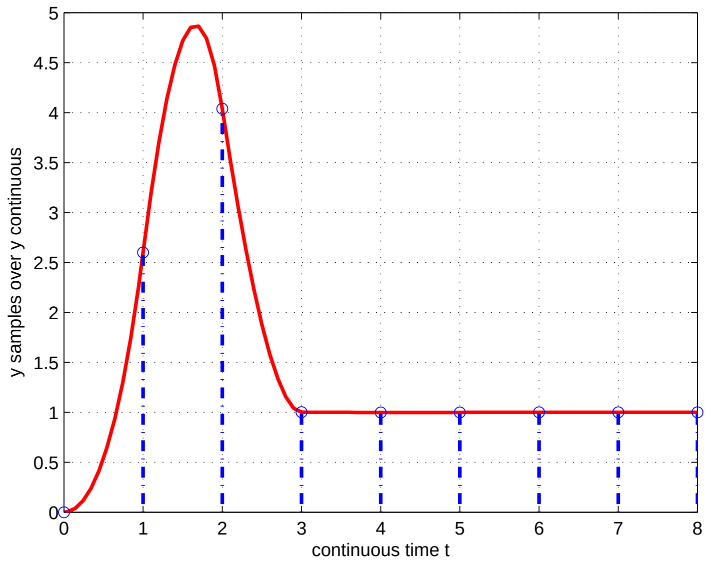
Sostituendo i valori numerici di $P(z)$ e, rispettivamente, $P'(z)$ si ottiene

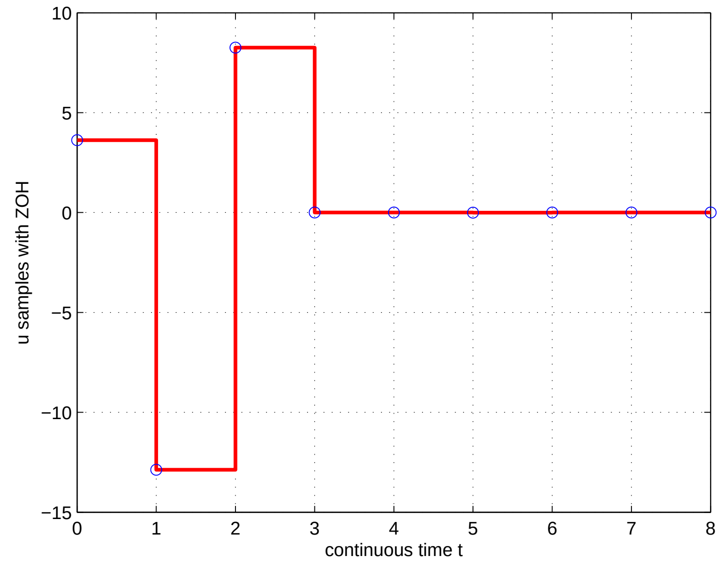
$$C(z) = \frac{3.6200z - 3.080}{z + 1.1177} \qquad \text{oppure} \qquad C'(z) = \frac{3.61z - 3.03}{z + 1.11}$$

La sensibilità ad arrotondamenti numerici è più elevata nei metodi di sintesi con prestazioni spinte (come il deadbeat e la risposta piatta) ed è anche accentuata dalle caratteristiche di instabilità del processo

Secondo esempio di progetto con risposta piatta – 3

Risposta al gradino e uscita del controllore (a valle dello ZOH) con $C(z)$ . . .





. . . e con $C'(z)$