

# Automazione

17 febbraio 2025

**Esercizio 1** (gli studenti con un progetto completato saltano questo esercizio)

Si consideri un sistema di automazione caratterizzato dai seguenti requisiti:

- un task periodico hard real time  $A_1$  deve essere eseguito ogni 24 t.u. e impiega un massimo di 5 t.u. per essere portato a termine;
- un task periodico hard real time  $A_2$  deve essere eseguito ogni 16 t.u. e impiega un massimo di 3 t.u. per essere portato a termine;
- un task periodico hard real time  $A_3$  deve essere eseguito ogni 12 t.u. e impiega un massimo di 5 t.u. per essere portato a termine;
- un task aperiodico soft real time  $A_4$  la cui prima istanza è caratterizzata dai parametri  $a_4(1) = 1$  t.u.,  $d_4(1) = 21$  t.u.,  $C_4(1) = 2$  t.u.;
- un task aperiodico soft real time  $A_5$  la cui prima istanza è caratterizzata dai parametri  $a_5(1) = 7$  t.u.,  $d_5(1) = 41$  t.u.,  $C_5(1) = 3$  t.u.

Ipotizzando che i task siano indipendenti, si chiede di risolvere i seguenti punti.

1. Verificare se sussiste la condizione necessaria di schedulabilità dei task hard real time.
2. Verificare se sussiste almeno una delle condizioni sufficienti di schedulabilità dei task hard real time, utilizzando l'algoritmo RMPO.
3. Eseguire lo scheduling dei task hard real time con algoritmo RMPO.
4. Eseguire lo scheduling dei task hard real time con algoritmo EDF.
5. In base all'esito dei punti 3 e 4 scegliere l'algoritmo di scheduling da utilizzare (se sia RMPO che EDF sono soluzione, scegliere a piacere) e verificare se il processore risulta essere completamente utilizzato.
6. Utilizzando l'algoritmo di scheduling scelto nel punto 5, verificare se i task aperiodici soft real time riescono a essere eseguiti entro la propria deadline assoluta utilizzando uno scheduling in background.
7. In caso ciò non sia possibile, verificare se i task aperiodici possono essere eseguiti entro la propria deadline assoluta utilizzando un processo deferring server caratterizzato da  $T_{\text{SRV}} = 8$  t.u. e  $C_{\text{SRV}} = 1$  t.u.
8. Spiegare cosa sarebbe successo se i task aperiodici fossero stati eseguiti utilizzando un processo polling server con gli stessi valori  $T_{\text{SRV}} = 8$  t.u. e  $C_{\text{SRV}} = 1$  t.u.

## Esercizio 2

In un processo industriale vengono avviate in parallelo due ricette di produzione, ciascuna composta da tre fasi di lavorazione distinte che si svolgono in sequenza per ogni ricetta e usano in modo diverso due tipi di risorse comuni,  $R_1$  e  $R_2$ , il cui impiego è esclusivo. Le prime ricette utilizzano la risorsa  $R_1$  per avviare la loro seconda fase di lavorazione e la rilasciano al termine della stessa. Per il suo rilascio necessita anche della risorsa  $R_2$ , che torna subito disponibile all'inizio della terza fase di lavorazione. In maniera del tutto speculare, la seconda ricetta utilizza la risorsa  $R_2$  per avviare la sua seconda fase di lavorazione, la rilascia solo al termine della stessa e necessita per questo anche della risorsa  $R_1$ , che torna di nuovo disponibile all'inizio della terza fase. Solo quando entrambe le ricette hanno completato la terza fase di lavorazione il processo può riavviare dall'inizio entrambe le ricette.

Modellare il comportamento di questo processo mediante una rete di Petri. Costruire il relativo albero di raggiungibilità, calcolare i P-invarianti e i T-invarianti, e verificare la presenza o meno delle proprietà di limitatezza, vivezza e reversibilità. In mancanza di una o più di queste proprietà, progettare un supervisore che le garantisca tutte.

### Esercizio 3

Si vuole dimensionare una linea di trasferta, costituita da  $N_s$  stazioni in serie, senza buffer intermedi e che avanza in maniera sincrona, dedicata alla produzione di un dispositivo elettronico che richiede complessivamente 12 operazioni elementari con le durate  $T_i$  (in minuti) indicate in Tab. 1, dove sono riportati anche i vincoli tecnologici di precedenza esistenti tra le stesse. La linea deve soddisfare un tasso di produzione di 36 dispositivi completati in 6h.

operazioni	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N
durata [in minuti]	5	3	4	3	6	5	2	6	1	4	4	7
precedenti	–	A	B	A	D	C,E	F	G	F	F	L	H,I,M

Tabella 1: Durata delle 12 operazioni elementari e lista delle operazioni direttamente precedenti.

Si costruisca il grafo delle precedenze tra le operazioni e si proceda a una assegnazione ammissibile delle stesse alle stazioni, minimizzando il numero  $N_s$  di stazioni utilizzate. Determinare lo sbilanciamento medio della linea rispetto al carico massimo teorico (in durata e in percentuale) e i tempi morti di ogni stazione. Fornire quindi il tasso di produzione effettivo della soluzione trovata e il tempo di attraversamento a regime dell'intera linea.

### Esercizio 4

Si consideri un pendolo in moto sotto gravità, modellato in prima battuta da una massa concentrata  $m$  (incognita) posta al termine di un braccio di lunghezza  $l$  (incerta). Il pendolo è attuato da una coppia  $\tau$  fornita da un motore alla base, con un sensore che misura la posizione angolare  $\delta$  del braccio. L'attrito è trascurabile e ci si limita a piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio inferiore ( $\delta = 0$ ). La Fig. 1 mostra la risposta del sistema a un gradino di coppia  $\tau = 0.4$  Nm a partire dallo stato zero.

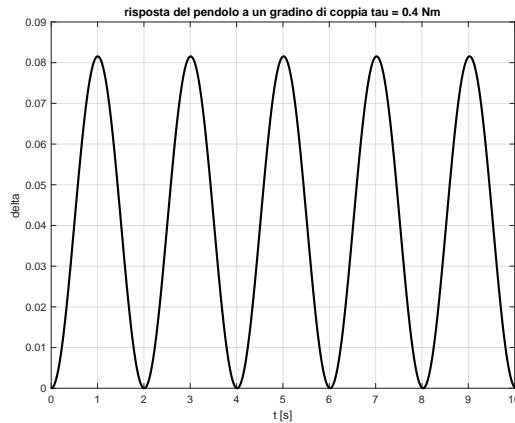


Figura 1: Risposta ad anello aperto a un gradino di coppia  $\tau = 0.4$  Nm.

E' possibile da questo esperimento identificare tutti i parametri del sistema necessari al suo controllo? Con o senza questa informazione, progettare un regolatore di tipo PID che abbia il minor numero di azioni presenti e che stabilizzi asintoticamente il pendolo a un desiderato valore di posizione angolare costante  $\delta_d \neq 0$  (sufficientemente piccolo da poter assumere un regime di dinamica lineare), con buone caratteristiche del transitorio. Se si utilizza MATLAB, mostrare la risposta del sistema ad anello chiuso quando il riferimento costante desiderato è  $\delta_d = 0.2$  rad.

[210 minuti = 3.5 ore (per tutti gli esercizi), 165 minuti (senza Esercizio 1); libri aperti]

# Soluzione

17 febbraio 2025

## Esercizio 1

1. Il problema di scheduling dei task periodici è così caratterizzato:

- $T_1 = 24$  t.u.,  $C_1 = 5$  t.u.;
- $T_2 = 16$  t.u.,  $C_2 = 3$  t.u.;
- $T_3 = 12$  t.u.,  $C_3 = 5$  t.u.

Per verificare la condizione necessaria si calcola il fattore di utilizzazione:

$$U = \frac{5}{24} + \frac{3}{16} + \frac{5}{12} = \frac{10 + 9 + 20}{48} = \frac{39}{48} = 0.8125.$$

Dato che  $U < 1$ , la condizione necessaria ( $U \leq 1$ ) è verificata.

2. Verificata la condizione necessaria, controlliamo se esiste almeno una condizione sufficiente. Dato che  $U > \ln 2$ , calcoliamo il limite superiore minimo per l'algoritmo RMPO per  $n$  task periodici:

$$U_{ism}(RMPO) = n \left( 2^{1/n} - 1 \right) = 3 \left( 2^{1/3} - 1 \right) \simeq 0.78.$$

Dato che  $U > U_{ism}$  e che i 3 task non sono legati tra loro da relazioni armoniche, nessuna delle tre condizioni sufficienti è verificata e quindi non possiamo dire a priori se RMPO è in grado di schedulare i task.

3. La soluzione dello scheduling RMPO è riportata in Fig. 2.

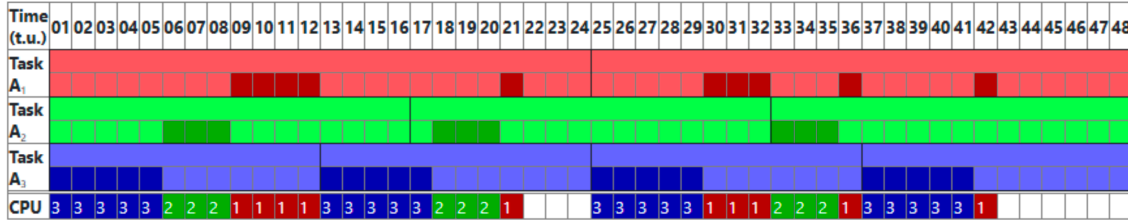


Figura 2: Scheduling RMPO dei task periodici.

4. La soluzione dello scheduling EDF è riportata in Fig. 3.

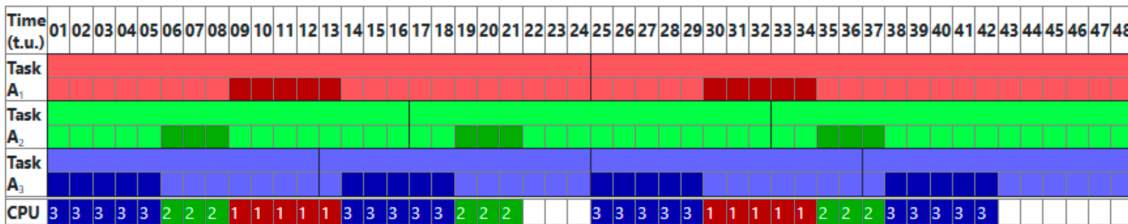


Figura 3: Scheduling EDF dei task periodici.

5. Per definizione, dato un algoritmo di scheduling e un insieme di task periodici, il processore viene detto completamente utilizzato se la schedulazione è fattibile e se un aumento comunque piccolo di uno qualsiasi dei computation time rende la schedulazione impossibile.

Dato che sia RMPO che EDF sono soluzione, nel prosieguo ove necessario verranno trattati entrambi i casi.

**RMPO:** Osservando la soluzione dello scheduling RMPO presentata nel punto 3, si può facilmente trovare un controesempio che viola la condizione di essere completamente utilizzato. Infatti, aumentando di un  $\epsilon$  sufficientemente piccolo (in particolare,  $\epsilon \leq 3/2$  t.u. assicura che tutte le istanze del Task  $A_1$  siano eseguite entro la deadline) uno qualsiasi dei computation time, lo schema viene semplicemente traslato senza che alcuna istanza di alcun task superi la propria deadline assoluta. Pertanto, il processore **non** è completamente utilizzato.

**EDF:** Osservando la soluzione dello scheduling RMPO presentata nel punto 4, si può facilmente trovare un controesempio che viola la condizione di essere completamente utilizzato. Infatti, aumentando di un  $\epsilon$  sufficientemente piccolo (in particolare,  $\epsilon \leq 13/8$  t.u. assicura che tutte le istanze del Task  $A_3$  siano eseguite entro la deadline) uno qualsiasi dei computation time, lo schema viene semplicemente traslato senza che alcuna istanza di alcun task superi la propria deadline assoluta. Pertanto, il processore **non** è completamente utilizzato.

6. Si presentano qui entrambe le possibili soluzioni.

**RMPO:** Con riferimento alla Fig. 4, l'istanza del task aperiodico  $A_4$  termina alla fine della 21-esima t.u., pertanto non riesce a essere eseguita entro la sua deadline assoluta e occupa il processore nel corso della 22-esima e 23-esima t.u. L'istanza del task aperiodico  $A_5$  — che viene gestito in modalità FIFO, quindi subito dopo il termine della esecuzione dell'istanza del task aperiodico  $A_4$  — esegue la prima delle sue 3 t.u. nel corso della 24-esima t.u. e poi termina oltre la sua deadline assoluta occupando il processore nel corso della 43-esima e 44-esima t.u.

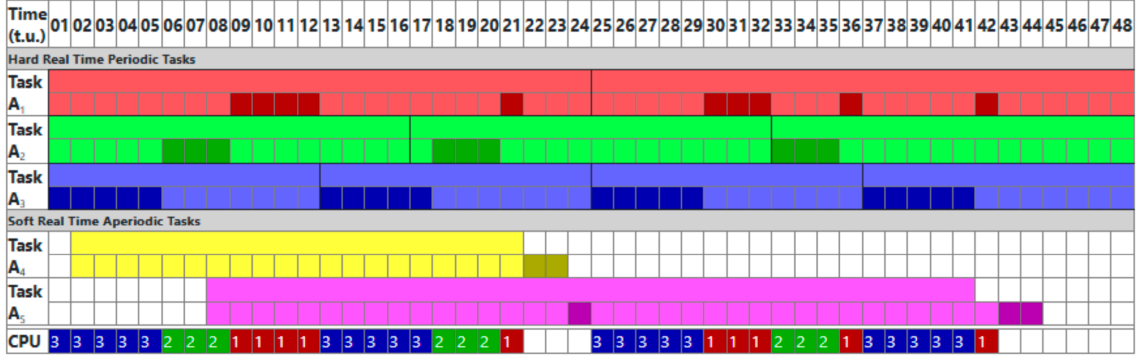


Figura 4: Scheduling RMPO dei task periodici con scheduling in BACKGROUND dei task aperiodici.

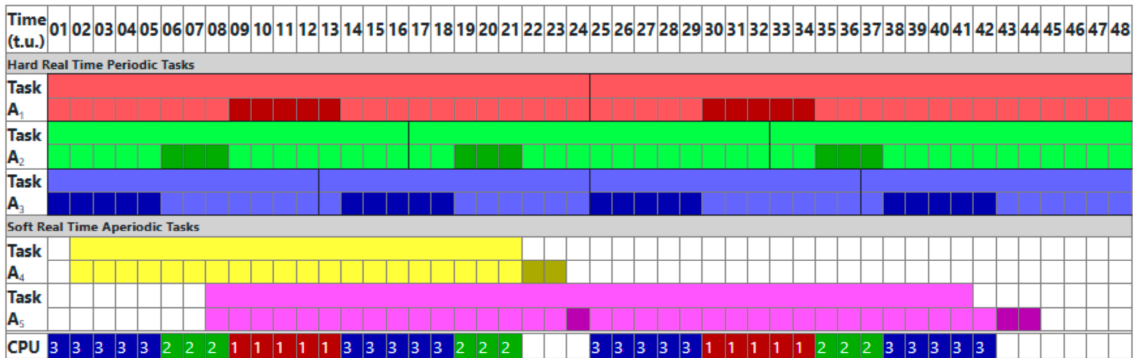


Figura 5: Scheduling EDF dei task periodici con scheduling in BACKGROUND dei task aperiodici.

**EDF:** Con riferimento alla Fig. 5, l'istanza del task aperiodico  $A_4$  termina alla fine della 21-esima t.u., pertanto non riesce ad essere eseguita entro la sua deadline assoluta ed occupa il processore nel corso della 22-esima e 23-esima t.u. L'istanza del task aperiodico  $A_5$  — che viene gestito in modalità FIFO, quindi subito dopo il termine della esecuzione dell'istanza del task aperiodico  $A_4$  — esegue la prima delle sue

3 t.u. nel corso della 24-esima t.u. e poi termina oltre la sua deadline assoluta occupando il processore nel corso della 43-esima e 44-esima t.u.

7. Non essendo possibile schedulare i due task aperiodici entro la relativa deadline con la politica in background, utilizziamo un processo deferring server caratterizzato da  $T_{SRV} = 8$  t.u. e  $C_{SRV} = 1$  t.u. Aggiungendo il processo (deferring) server, il coefficiente di utilizzazione diventa:

$$U = \frac{5}{24} + \frac{3}{16} + \frac{5}{12} + \frac{1}{8} = \frac{10 + 9 + 20 + 6}{48} = \frac{45}{48} = 0.9375.$$

**RMPO:** Verificata la condizione necessaria RMPO, è semplice verificare che non è possibile validare alcuna condizione sufficiente. Pertanto è necessario tracciare il diagramma in Fig. 6. Dall'analisi del diagramma di scheduling si evince che entrambi i task aperiodici vengono eseguiti entro la relativa deadline assoluta.

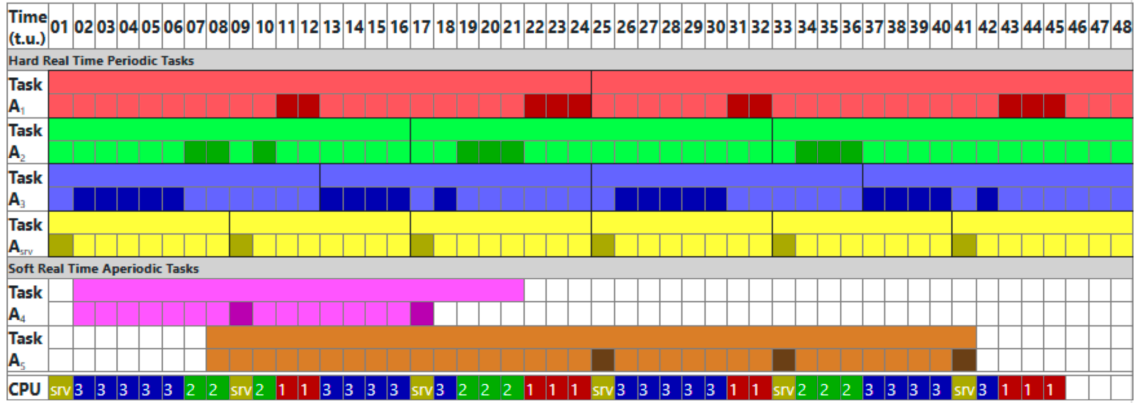


Figura 6: Scheduling RMPO dei task periodici con scheduling DEFERRING server dei task aperiodici.

**EDF:** Verificata la condizione necessaria e sufficiente per EDF, tracciamo il diagramma in Fig. 7 per verificare in quali t.u. i due task aperiodici possano essere eseguiti. Dall'analisi del diagramma di scheduling si evince che il task aperiodico  $A_5$  viene eseguito oltre la propria deadline assoluta.

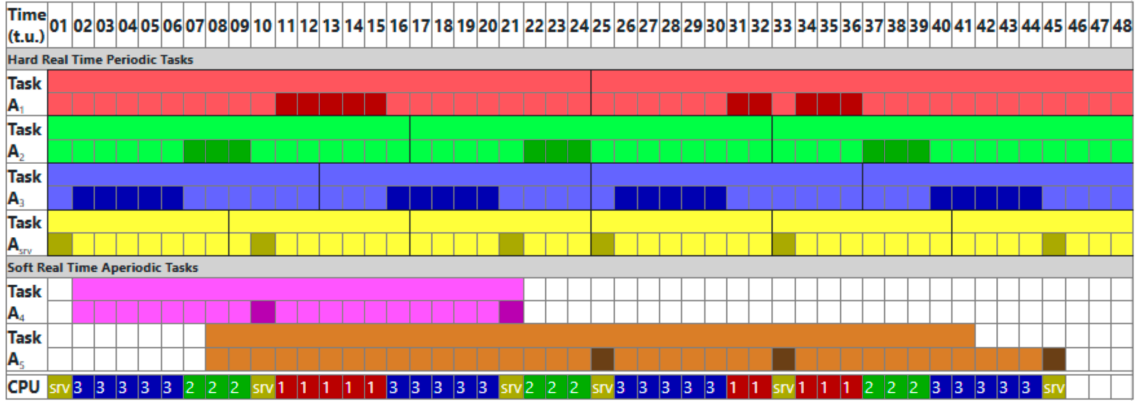


Figura 7: Scheduling EDF dei task periodici con scheduling DEFERRING server dei task aperiodici.

8. Verifichiamo cosa succederebbe se applicassimo un polling server al posto del deferring server. Anche in questo caso, aggiungendo il processo (polling) server il coefficiente di utilizzazione diventa:

$$U = \frac{5}{24} + \frac{3}{16} + \frac{5}{12} + \frac{1}{8} = \frac{10 + 9 + 20 + 6}{48} = \frac{45}{48} = 0.9375.$$

**RMPO:** Verificata la condizione necessaria RMPO, è semplice verificare che non è possibile validare alcuna condizione sufficiente. Pertanto è necessario tracciare il diagramma in Fig. 8. Dall'analisi del diagramma di scheduling si evince che entrambi i task aperiodici vengono eseguiti entro la relativa deadline assoluta.

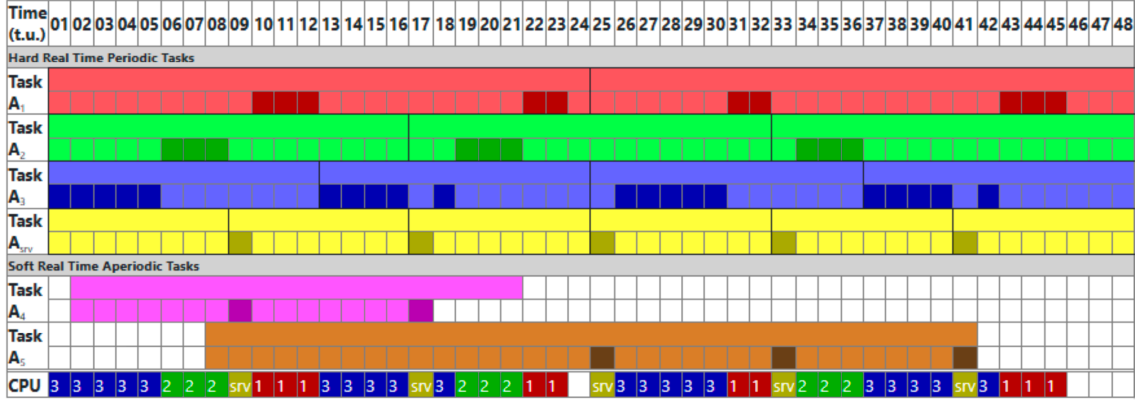


Figura 8: Scheduling RMPO dei task periodici con scheduling POLLING server dei task aperiodici.

**EDF:** Verificata la condizione necessaria e sufficiente per EDF, tracciamo il diagramma in Fig. 9 per verificare in quali t.u. i due task aperiodici possano essere eseguiti. Dall'analisi del diagramma di scheduling si evince che il task aperiodico  $A_5$  viene eseguito oltre la propria deadline assoluta.

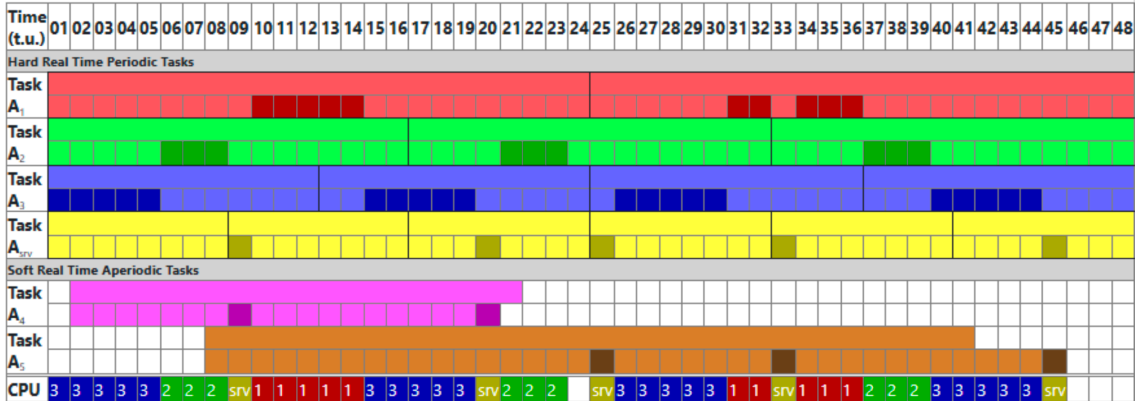


Figura 9: Scheduling EDF dei task periodici con scheduling POLLING server dei task aperiodici.

## Esercizio 2

La rete di Petri con 9 posti e 6 transizioni in Fig. 10 modella la situazione richiesta di produzione in parallelo di due ricette che utilizzano due risorse comuni in modo esclusivo. I posti e le transizioni rappresentano:

- $p_1$ : processo pronto alla produzione parallela (posto necessario per l'avvio del ciclo con un token);
- $p_2, p_4, p_6$ : le tre fasi di lavorazione della ricetta 1;
- $p_3, p_5, p_7$ : le tre fasi di lavorazione della ricetta 2;
- $p_8$ : risorsa 1 disponibile;
- $p_9$ : risorsa 2 disponibile;
- $t_1$ : avvio della produzione parallela con le due ricette (evento di sincronizzazione in avvio);
- $t_2$ : termine della fase 1 e avvio della fase 2 della ricetta 1;
- $t_3$ : termine della fase 1 e avvio della fase 2 della ricetta 2;

- $t_4$ : termine della fase 2 e avvio della fase 3 della ricetta 1;
- $t_5$ : termine della fase 2 e avvio della fase 3 della ricetta 2;
- $t_6$ : termine della produzione parallela, con le due ricette completate (evento di sincronizzazione finale).

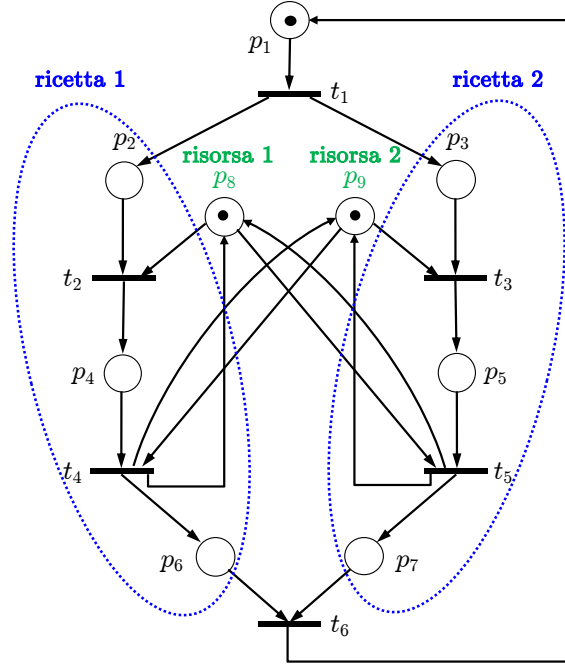


Figura 10: Rete di Petri del processo produttivo considerato.

L'albero di raggiungibilità della rete è mostrato in Fig. 11. La rete è limitata e ha 9 marcature raggiungibili. Si nota però la presenza della marcatura bloccante  $x_3$  a cui si arriva quando scattano in sequenza le transizioni  $\{t_2, t_3\}$  oppure  $\{t_3, t_2\}$ . Se questo **non** accadesse, la rete sarebbe reversibile e viva.

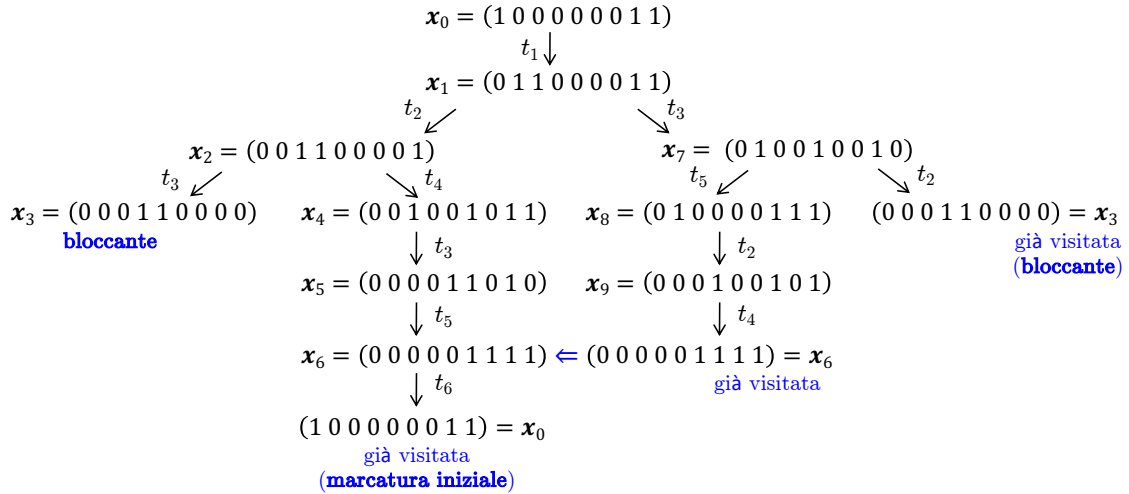


Figura 11: Albero di raggiungibilità della rete di Petri in Fig. 10.

La matrice di incidenza (di dimensioni  $p \times t = 9 \times 6$ ) della rete di Fig. 10 è

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \textcolor{red}{0} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \textcolor{red}{0} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si noti che gli elementi in riga 8, colonna 5 e in riga 9, colonna 4 (evidenziati in rosso) sono entrambi 0 per la presenza di due autoanelli, rispettivamente tra  $p_8$  e  $t_5$  e tra  $p_9$  e  $t_4$ . La matrice  $\mathbf{C}$  ha rango  $\rho = 5$ .

E' semplice ricavare l'unico T-invariante della rete osservando che la somma delle colonne di  $\mathbf{C}$  è nulla. Si ha quindi:

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\eta} = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T.$$

La reversibilità richiede quindi che tutte le transizioni scattino un numero uguale di volte. Tuttavia le sequenze di scatto ammissibili per la reversibilità sono solo  $s_1 = \{t_1, t_{2,4}, t_3, t_5, t_6\}$  e  $s_2 = \{t_1, t_3, t_5, t_2, t_4, t_6\}$ .

I P-invarianti indipendenti della rete sono in numero pari alla dimensione dello spazio nullo di  $\mathbf{C}^T$ , ossia 4, e anche in questo caso si possono ricavare per semplice ispezione. I P-invarianti canonici e a supporto minimo sono:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_1^T &= (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \\ \boldsymbol{\gamma}_2^T &= (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) \\ \boldsymbol{\gamma}_3^T &= (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) \\ \boldsymbol{\gamma}_4^T &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1). \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{C}^T \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C} = \mathbf{0}^T$$

I primi due P-invarianti sono relativi alle due parti conservative costituite rispettivamente dai posti  $(p_1, p_2, p_4, p_6)$  e  $(p_1, p_3, p_5, p_7)$ , nelle quali durante l'evoluzione della rete si conserva la somma dei token presenti (sempre e solo uno). Gli altri due P-invarianti sono relativi ai cicli  $(p_4, p_8)$  e  $(p_5, p_9)$  (anche qui uno solo token conservato). Gli insiemi di supporto dei P-invarianti coprono tutti i posti della rete che è quindi conservativa e limitata. Si noti inoltre che gli autoanelli (qui due) non contribuiscono mai alla valutazione delle parti conservative di una rete. L'analisi matriciale conferma quanto già visto sull'albero di raggiungibilità, anche se non fornisce informazioni sulla presenza di situazioni di blocco.

Per evitare quindi una situazione di blocco, si procede con una sintesi del supervisore basata sulla tecnica dei P-invarianti. Si impone infatti il vincolo  $\mathbf{x}(p_4) + \mathbf{x}(p_5) \leq 1$  in modo da evitare alla rete una evoluzione nella marcatura bloccante  $\mathbf{x}_3$  che infatti viene esclusa dall'insieme  $R(PN_s)$  di marcature raggiungibili della rete supervisionata. L'equazione di progetto<sup>1</sup> è

$$\mathbf{h}^T \mathbf{x} = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \mathbf{x} = x_4 + x_5 \leq 1 = k$$

che aggiunge un posto  $p_m$  con le connessioni alle transizioni della rete di Petri originaria specificate dalla riga aggiuntiva della matrice di incidenza

$$\mathbf{c}_m^T = -\mathbf{h}^T \mathbf{C} = (0 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}^m = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{c}_m^T \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>Alla stesso supervisore si potrebbe arrivare imponendo il vincolo  $x_8 + x_9 \geq 1$ , ossia che sia sempre disponibile almeno una delle due risorse; il vincolo si riscrive come  $\mathbf{h}^T \mathbf{x} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ -1) \mathbf{x} \leq -1 = k$ , fornendo esattamente la stessa riga  $\mathbf{c}_m^T = \mathbf{h}^T \mathbf{C}$  aggiuntiva alla matrice di incidenza  $\mathbf{C}$  e la stessa inizializzazione  $x_{m,0} = 1$ .



e dalla marcatura iniziale

$$x_{m,0} = k - \mathbf{h}^T \mathbf{x}_0 = 1 - 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_0^m = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ x_{m,0} \end{pmatrix}.$$

La rete supervisionata è mostrata in Fig. 12.

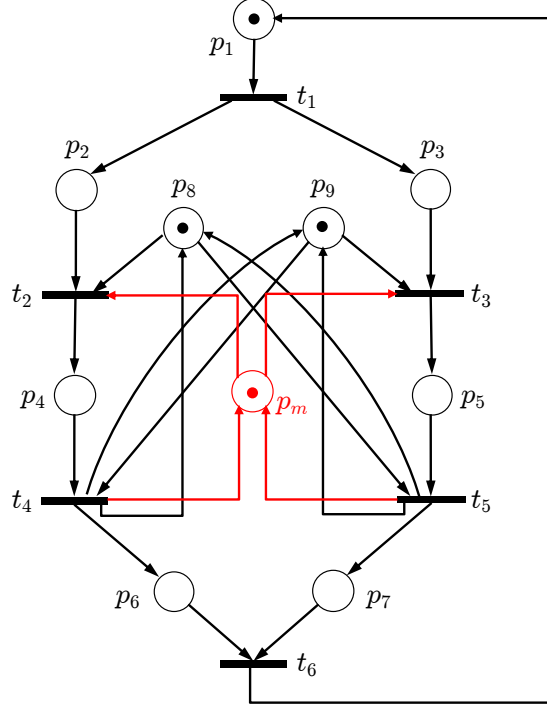


Figura 12: La rete di Petri di Fig. 10 con il supervisore progettato.

L'albero di raggiungibilità della rete supervisionata è semplicemente quello di Fig. 11 con l'eliminazione dei due nodi foglia  $xv_3$  bloccanti. La rete supervisionata è quindi reversibile, viva e limitata (safe). Per completezza, i suoi P-invarianti canonici sono i quattro derivati dalla rete originaria (aggiungendo uno zero in ultima posizione)

$$\gamma_{m,i}^T = \begin{pmatrix} \gamma_i^T & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

e quello aggiuntivo

$$\gamma_{m,5}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{h}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

relativo al ciclo conservativo  $(p_4, p_m, p_5)$ . L'unico T-invariante della rete non è invece cambiato (la riga aggiunta  $\mathbf{c}_m^T$  è sempre combinazione lineare delle precedenti e quindi  $\rho(\mathbf{C}_m) = \rho(\mathbf{C}) = 5$ ).

### Esercizio 3

La durata complessiva di tutte le  $M = 12$  operazioni elementari che devono essere eseguite dalle stazioni della linea di trasferta su ogni dispositivo elettronico è pari a

$$T_{tot} = \sum_{i=1}^M T_i = 50 \text{ minuti.}$$

Il tasso di produzione richiesto è

$$TP = 36 \text{ unità/6h} = 36 \text{ unità/360 minuti} = 0.1 \text{ unità/minuto.}$$

Il carico massimo teorico  $CMT$  per stazione e il numero minimo  $N_t$  di stazioni sulla linea sono quindi

$$CMT = \frac{1}{TP} = 10 \text{ minuti/unità} \Rightarrow N_t = \left\lceil \frac{T_{tot}}{CMT} \right\rceil = \left\lceil \frac{50}{10} \right\rceil = 5.$$

Il grafo delle precedenze tra le operazioni è riportato in Fig. 13.

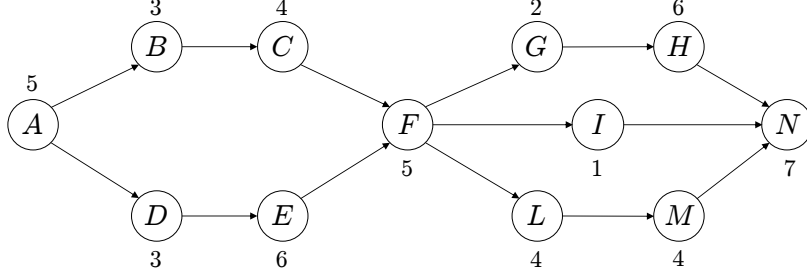


Figura 13: Grafo delle precedenze tra le operazioni, con i tempi di esecuzione in minuti.

Per il dimensionamento della linea di trasferta, occorre determinare un'assegnazione delle operazioni alle stazioni della linea che sia ammissibile (ossia tale da soddisfare i vincoli di precedenza del grafo e per cui le stazioni abbiano un carico  $C_j \leq CMT$ ,  $j = 1, \dots, N_s$ ), minimizzando il numero  $N_s$  di stazioni. Per la soluzione si utilizza l'euristica RPWT (Ranked Positional Weight Technique). A tal fine, la Tab. 2 riporta gli insiemi  $S_i$  delle operazioni successive a ogni lavorazione con i relativi pesi posizionali

$$PW_i = T_i + \sum_{k \in S_i} T_k, \quad i = 1, \dots, M.$$

operazioni	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N
<b>durata</b> [in minuti]	5	3	4	3	6	5	2	6	1	4	4	7
$S_i$	$A \rightarrow N$	$C, F \rightarrow N$	$F \rightarrow N$	$E \rightarrow N$	$F \rightarrow N$	$G \rightarrow N$	$H, N$	$N$	$N$	$M, N$	$N$	—
$PW_i$ [minuti]	50	36	33	38	35	29	15	13	8	15	11	7

Tabella 2: Insiemi  $S_i$  delle operazioni successive e pesi posizionali  $PW_i$  per le 12 operazioni.

Nella Tab. 3 le operazioni sono riordinate per peso posizionale  $PW_i$  decrescente. Si noti che è indifferente secondo l'algoritmo ordinare tra loro le operazioni  $G$  e  $L$  che hanno lo stesso peso posizionale. Si procede quindi all'assegnazione delle operazioni così ordinate alle stazioni della linea, fino a raggiungere il massimo carico  $C_j$  ammissibile per ciascuna stazione prima di passare a quella successiva (euristica RPWT). Il numero così determinato è  $N_s = 6$ , di una unità superiore al minimo teorico. In particolare, la stazione più carica è la  $j = 5$ , con carico pari al massimo teorico ( $C_5 = 10 = CMT$ ).

operazioni	A	D	B	E	C	F	G	L	H	M	I	N
<b>durata</b>	5	3	3	6	4	5	2	4	6	4	1	7
$PW_i$	50	38	36	35	33	29	15	15	13	11	8	7
<b>stazioni</b>	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6

Tabella 3: Assegnazione delle operazioni alle stazioni della linea di trasferta con l'euristica RPWT.

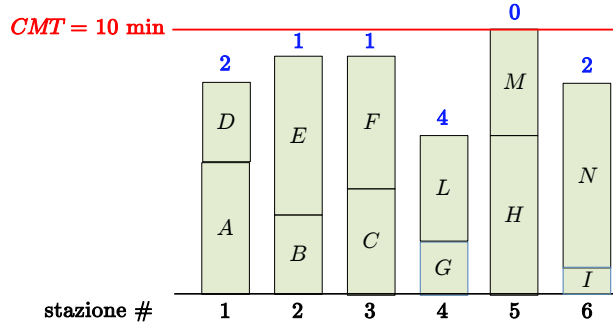


Figura 14: Carico delle stazioni con le operazioni e relativi tempi morti.

Il carico sulle singole stazioni è riportato graficamente in Fig. 14. Si noti che questa non è l'unica soluzione con 6 stazioni. Assegnando infatti alla stazione 4 l'operazione *M* (in maniera ammissibile per i vincoli di precedenza, ma non seguendo l'euristica RPWT) e quindi l'operazione *I* alla stazione 5, si arriverebbe a una soluzione del tutto equivalente nelle sue caratteristiche (con la stazione 4 a pieno carico e non la 5).

Essendo il carico effettivo della linea pari al massimo teorico,  $C = CMT$ , si deducono le grandezze

$$\text{tasso di produzione} = \frac{1}{C} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ unità/minuto} = 360 \text{ unità/6h},$$

$$\text{tempo di attraversamento della linea (a regime)} = N_s \times C = 6 \times 10 = 60 \text{ minuti}.$$

L'avanzamento sincrono della linea di trasferta sarà quindi di 10 minuti: ogni 10 minuti entra un dispositivo grezzo e, a regime, esce un dispositivo elettronico completo. Nella Fig. 14 sono indicati anche i tempi morti,  $d_j = C - C_j \geq 0$ , di ciascuna stazione. Lo sbilanciamento medio è quindi

$$d = \frac{\sum_{j=1}^{N_s} d_j}{N_s} = \frac{10}{6} = 1.666 \text{ minuti} = 1'40'',$$

pari al 16.7% del carico della linea.

#### Esercizio 4

Il moto del pendolo sotto gravità, schematizzato come una massa  $m$  concentrata al termine di un braccio (privo di massa) di lunghezza  $l$ , è descritto dal seguente bilanciamento inerziale delle coppie sull'asse di rotazione alla base<sup>2</sup>

$$ml^2\ddot{\delta} + mgl \sin \delta = \tau, \quad (1)$$

dove  $\delta$  è la posizione angolare (calcolata dalla verticale inferiore, in senso antiorario),  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  è l'accelerazione di gravità e  $\tau$  è la coppia applicata alla base. Per piccoli scostamenti dalla posizione di equilibrio inferiore, si ha  $\sin \delta \simeq \delta$  e il modello linearizzato

$$ml^2\ddot{\delta} + mgl \delta = \tau. \quad (2)$$

La funzione di trasferimento del processo (2) è quindi

$$P(s) = \frac{\delta(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{ml^2s^2 + mgl} = \frac{k}{s^2 + \omega^2}.$$

<sup>2</sup>La (1) si può anche ricavare mediante un approccio energetico dall'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} - \frac{\partial L}{\partial \delta} = \tau,$$

essendo l'energia cinetica  $T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\delta}^2$ , l'energia potenziale  $U = U_0 - mgl \cos \delta$  (definita a meno di una costante  $U_0$  non rilevante) e la Lagrangiana  $L = T - U$ .

con  $k = 1/ml^2$  e due poli immaginari coniugati in  $\pm j\omega = \pm\sqrt{g/l}$  (la pulsazione è indipendente dalla massa!). La risposta a un gradino di coppia  $\tau_d = 0.4$  Nm, ossia l'andamento del grafico in Fig. 1, si calcola nel dominio di Laplace come

$$\delta(s) = P(s) \frac{\tau_d}{s} = \frac{k \tau_d}{s(s^2 + \omega^2)} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1 s}{s^2 + \omega^2} = \frac{R_0 (s^2 + \omega^2) + R_1 s^2}{s(s^2 + \omega^2)},$$

dove si è usato lo sviluppo in frazioni parziali con i residui per i due termini della risposta (quello costante con  $R_0$  relativo al polo nell'origine e quello cosinusoidale con  $R_1$  relativo alla coppia di poli immaginari coniugati). Dall'identità tra i numeratori si ha

$$R_0 = \frac{k \tau_d}{\omega^2} = \frac{\tau_d}{mgl} \quad R_1 = -R_0.$$

La risposta nel tempo (a partire dallo stato zero) è dunque

$$\delta(t) = \frac{\tau_d}{mgl} (1 - \cos \omega t).$$

Per ispezione della risposta nella Fig. 1 si ricava un periodo di oscillazione  $T = 2\pi/\omega \simeq 2$  (e da questo  $\omega = 2\pi/T \simeq \pi$ ) e un valore medio  $R_0 \simeq 0.041$ . Da questi, essendo noto  $g$ , si identificano i due parametri

$$l = \sqrt{\frac{g}{\omega^2}} = T \frac{\sqrt{g}}{2\pi} = 0.9970 \text{ m} \quad m = \frac{\tau_d}{glR_0} = \frac{0.4}{9.81 \cdot 0.9970 \cdot 0.041} = 0.9975 \text{ kg}.$$

Nel seguito, per tracciare i grafici si utilizzeranno i valori  $m = 1$  e  $l = 1$  (che sono peraltro quelli 'veri').

Poiché il processo non ha un polo nell'origine (altrimenti la risposta indiciale ad anello aperto divergerebbe), il regolatore utilizzerà, oltre a quella proporzionale, un'azione integrale per ottenere errore nullo a regime per un riferimento di posizione  $\delta_d$  costante. Dato che il sistema meccanico è del tutto privo di attrito, è necessario includere nel regolatore anche un termine derivativo per poter ridurre le oscillazioni durante il transitorio. Si adotterà quindi per il progetto un regolatore PID completo (e ideale) nella forma

$$PID(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) = \frac{K_p T_d s^2 + K_p s + K_p/T_i}{s} = \frac{K_p}{T_i} \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{s},$$

ovvero nella forma equivalente

$$PID(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}, \quad \text{con } K_d = K_p T_d, \quad K_i = \frac{K_p}{T_i}.$$

Al livello di implementazione occorrerà ovviamente rendere realizzabile questo regolatore, altrimenti non causale, aggiungendo un polo sufficientemente in alta frequenza nel termine derivativo (derivata in banda).

La necessità di includere tutti e tre i termini nel regolatore segue anche da un'analisi con il criterio di Routh, che non ha peraltro bisogno di impiegare valori numerici. A partire dalla catena diretta

$$F(s) = PID(s) \cdot P(s) = \frac{k (K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s(s^2 + \omega^2)},$$

la funzione di trasferimento  $W(s) = F(s)/(1 + F(s))$  del sistema ad anello chiuso ha al denominatore

$$\text{den } W(s) = s(s^2 + \omega^2) + k(K_d s^2 + K_p s + K_i) = s^3 + kK_d s^2 + (kK_p + \omega^2)s + kK_i.$$

Dalla tabella di Routh per questo polinomio si ha

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & kK_p + \omega^2 \\ 2 & kK_d & kK_i \\ 1 & kK_p + \omega^2 - \frac{K_i}{K_d} & \\ 0 & kK_i & \end{array}$$

da cui, essendo  $k > 0$ , per la stabilità asintotica ad anello chiuso è necessario e sufficiente che sia

$$K_i > 0 \quad K_d > 0 \quad K_p > \frac{\frac{K_i}{K_d} - \omega^2}{k},$$

ossia con le azioni integrale e derivativa del PID certamente presenti. Per la stabilità asintotica, è necessario un valore sufficientemente grande di  $K_p > 0$  solo se  $K_i/K_d > \omega^2$  (altrimenti l'azione proporzionale potrebbe in linea di principio anche essere rimossa). Tuttavia un guadagno proporzionale positivo e sufficientemente grande aiuta a migliorare la prontezza di risposta del transitorio.

Per il progetto effettivo, non è possibile applicare (almeno in modo diretto) nessuno dei due metodi di Ziegler–Nichols (Z-N). Da un lato, la risposta ad anello aperto a un gradino di coppia in ingresso non converge a un valore costante, quindi il 1° metodo di Z-N è escluso. D'altro lato, è facile verificare che un qualsiasi valore del guadagno  $K_p > 0$  di un controllore proporzionale che venga chiuso intorno al processo manterrebbe il sistema al limite di stabilità (come lo è già ad anello aperto), con oscillazioni permanenti nella risposta indiciale a frequenza crescente al crescere di  $K_p$ ; non è quindi possibile caratterizzare un guadagno  $K_c$  critico, come invece necessario nel 2° metodo di Z-N.

Si può però procedere analiticamente, in particolare semplificando la scelta dei guadagni. Si può imporre ad esempio che i due zeri della funzione  $PID(s)$  siano reali e coincidenti, ossia scegliendo

$$T_d = \frac{T_i}{4} \quad \Rightarrow \quad PID(s) = \frac{K_p T_i}{4} \frac{(s+z)^2}{s} \quad z = \frac{2}{T_i}.$$

Fissando inoltre  $T_i = 1$  (e quindi  $T_d = 0.25$ ), si può tracciare (anche solo qualitativamente!) il luogo delle radici per la funzione in catena diretta  $F(s)$ , al variare dell'unico guadagno rimasto ossia  $K_p > 0$ . Si avranno infatti ad anello aperto tre poli (uno nell'origine dovuto all'azione integrale del regolatore e due in  $\pm j\omega$  relativi al sistema meccanico) e due zeri reali e coincidenti in  $-z = -2$ , dovuti alle scelte fatte per le costanti di tempo  $T_i$  e  $T_d$  del regolatore. Aumentare il guadagno  $K_p$  permette di avere tre poli reali, di cui uno molto rapido, allontanando il più possibile dall'origine il polo più lento, intrappolato nell'intervallo reale negativo  $(-z, 0)$ .

Il tracciamento con MATLAB (per  $\omega = \sqrt{g/l} = \sqrt{9.81} = 3.13$ ) è in Fig. 15, dove si indica anche una conveniente localizzazione dei tre poli ad anello chiuso quando  $K_p = 100$ .

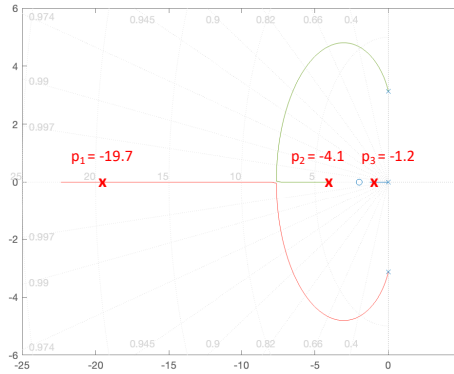


Figura 15: Luogo delle radici al variare di  $K_p > 0$  e posizionamento dei poli della  $W(s)$  finale.

Riassumendo, il regolatore PID progettato ha

$$K_p = 100 \quad K_i = 100 \quad (T_i = 1) \quad K_d = 25 \quad (T_d = 0.25) \quad \Rightarrow \quad PID(s) = \frac{25s^2 + 100s + 100}{s}.$$

La risposta ad anello chiuso (ottenuto con MATLAB) per un riferimento  $\delta_d = 0.2$  rad è riportata in Fig. 16. Il comportamento è buono anche nel transitorio (rimanendo peraltro ragionevolmente all'interno del dominio di linearità del modello).

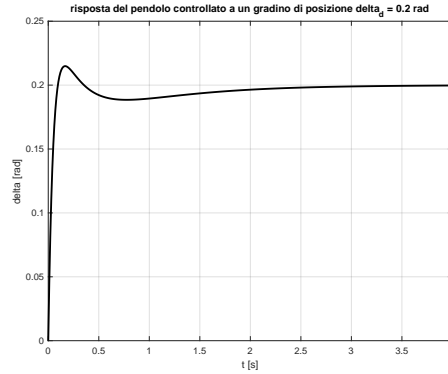


Figura 16: Risposta ad anello chiuso per un riferimento di posizione angolare  $\delta_d = 0.2$  rad.

Per confronto, si riportano nelle Figg. 17 e 18 il comportamento dell'uscita e, rispettivamente, lo sforzo di controllo quando si considera la versione realizzabile del PID già progettato, nel quale si è aggiunto un polo in  $p_h = -1/\tau_h$  per filtrare l'azione derivativa, con costante di tempo  $\tau_h = 0.02$  s:

$$PID_r(s) = \frac{27s^2 + 102s + 100}{s(1 + 0.02s)}. \quad (3)$$

Una costante di tempo più piccola fornirebbe una banda di filtraggio più sensibile al rumore di misura (qui trascurato). Per il calcolo (o la simulazione) dello sforzo di controllo, notevole (!! ) nei primissimi istanti, occorre usare il controllore (3) affinché la funzione di trasferimento  $W_u(s) = \tau(s)/\delta_d(s)$  risulti propria.

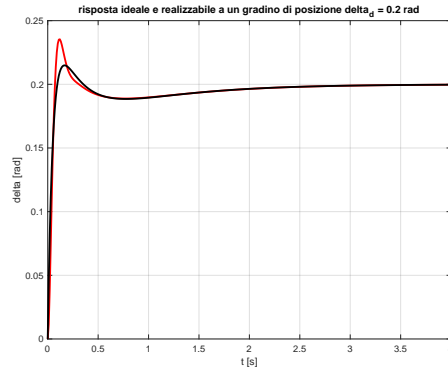


Figura 17: Confronto tra la risposta con il PID ideale [in nero] e quella con il PID realizzabile (3) [in rosso].

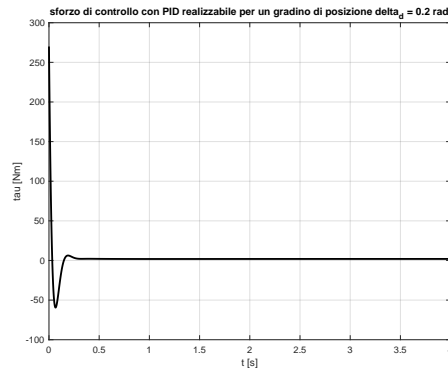


Figura 18: Sforzo di controllo con il PID realizzabile (3). Il valore a regime è pari a  $g\delta_d \simeq 2$  Nm.

\* \* \* \* \*