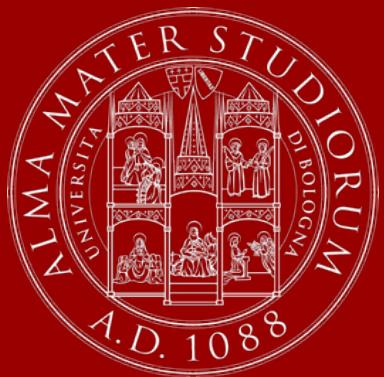




SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA



# Reti di Petri: analisi, modellistica e controllo

Automazione

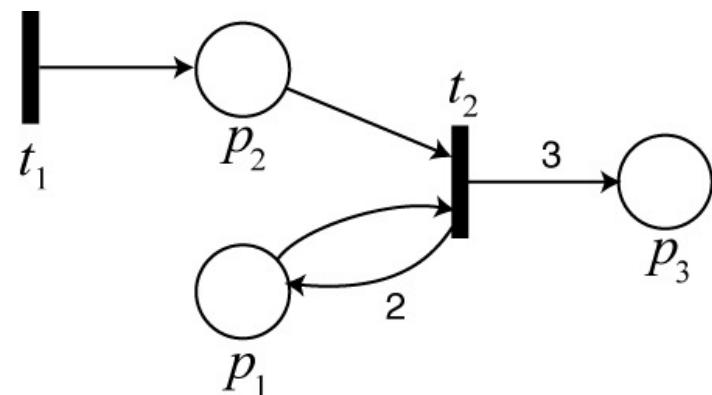
Alessandro De Luca

Sono un formalismo grafico/matematico per la modellazione di sistemi dinamici a eventi discreti

- introdotte nel 1962 da Carl Adam Petri nella sua tesi di dottorato
- definiscono l'evoluzione di sistemi guidati da eventi
  - ➔ lavorano con condizioni esplicite per l'**abilitazione** di tali eventi (associati quindi a **transizioni** dello stato)
  - ➔ lo stato è un'informazione **distribuita** tra delle entità dette **posti**
- vantaggi modellistici delle reti di Petri rispetto agli automi
  - ➔ facilmente **modificabili** (aggiunta di altre variabili, modifica dell'insieme di valori assumibili da una o più variabili), senza necessità di ripartire da capo e senza “esplosione” di complessità
  - ➔ **modulari**, costruibili “assemblando” sottomodelli relativi a parti del sistema
  - ➔ bene **interpretabili** in termini di evoluzione dello stato delle singole parti del sistema (lo stato ha un significato **locale**, essendo distribuito nella rete)
  - ➔ possono rappresentare sistemi ad infiniti stati con un numero finito di nodi di un grafo e in generale sono più compatte degli automi

Una rete di Petri è rappresentabile a partire da un grafo orientato e bipartito (nei nodi) detto grafo di Petri  $PG = (P, T, A, w)$  dove

- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{|P|}\}$  è l'insieme dei **posti**
  - $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{|T|}\}$  è l'insieme delle **transizioni**
  - $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  è la relazione di flusso che descrive due insiemi di **archi orientati** da posti a transizioni e da transizioni a posti
  - $w: A \rightarrow N \setminus \{0\}$  è una funzione che associa un **peso** agli archi
- } insiemi finiti con  
 $P \cap T = \emptyset$

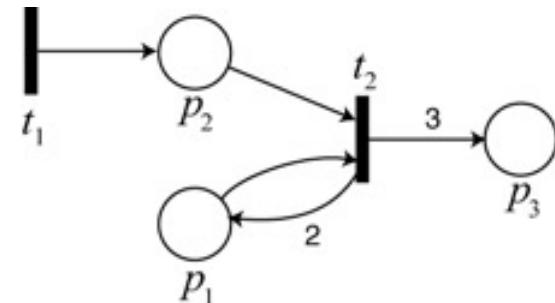


$$\begin{aligned}
 P &= \{p_1, p_2, p_3\} & T &= \{t_1, t_2\} \\
 A &= \{(t_1, p_2); (p_1, t_2); (p_2, t_2); (t_2, p_1); (t_2, p_3)\} \\
 w(t_1, p_2) &= w(p_1, t_2) = w(p_2, t_2) = 1 \\
 w(t_2, p_1) &= 2 & w(t_2, p_3) &= 3
 \end{aligned}$$

In relazione alla transizione  $t_j \in T$ , si definiscono i due insiemi:

- posti in ingresso  $I(t_j) = \{p_i \in P \text{ tali che } (p_i, t_j) \in A\}$
- posti in uscita  $O(t_j) = \{p_i \in P \text{ tali che } (t_j, p_i) \in A\}$

in modo analogo si possono definire anche  $I(p_j)$  e  $O(p_j)$  rispetto al posto  $p_j$



$$\begin{aligned} I(t_1) &= \emptyset & O(t_1) &= \{p_2\} \\ I(t_2) &= \{p_1, p_2\} & O(t_2) &= \{p_1, p_3\} \end{aligned}$$

La topologia di un grafo di Petri è espressa in modo compatto mediante due matrici di dimensioni  $|P| \times |T|$

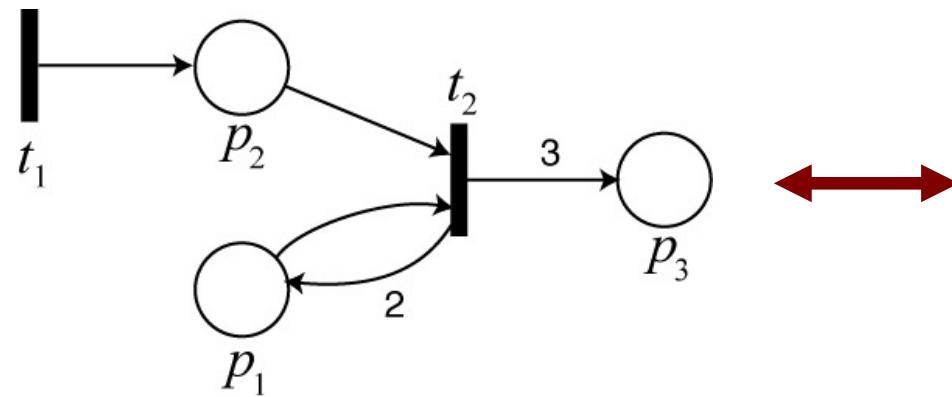
- matrice **I** di **input** (detta anche “**Pre**”) con i pesi degli archi da posti a transizioni
- matrice **O** di **output** (detta anche “**Post**”) con i pesi degli archi da transizioni a posti

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} w(p_1, t_1) & w(p_1, t_2) & \cdots & w(p_1, t_{|T|}) \\ w(p_2, t_1) & w(p_2, t_2) & \cdots & w(p_2, t_{|T|}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w(p_{|P|}, t_1) & w(p_{|P|}, t_2) & \cdots & w(p_{|P|}, t_{|T|}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} w(t_1, p_1) & w(t_2, p_1) & \cdots & w(t_{|T|}, p_1) \\ w(t_1, p_2) & w(t_2, p_2) & \cdots & w(t_{|T|}, p_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w(t_1, p_{|P|}) & w(t_2, p_{|P|}) & \cdots & w(t_{|T|}, p_{|P|}) \end{pmatrix}$$

da notare che

$w(p_i, t_j) = 0$  se  $p_i \notin I(t_j)$   
 $w(t_j, p_i) = 0$  se  $p_i \notin O(t_j)$

## □ esempio di matrici I e O



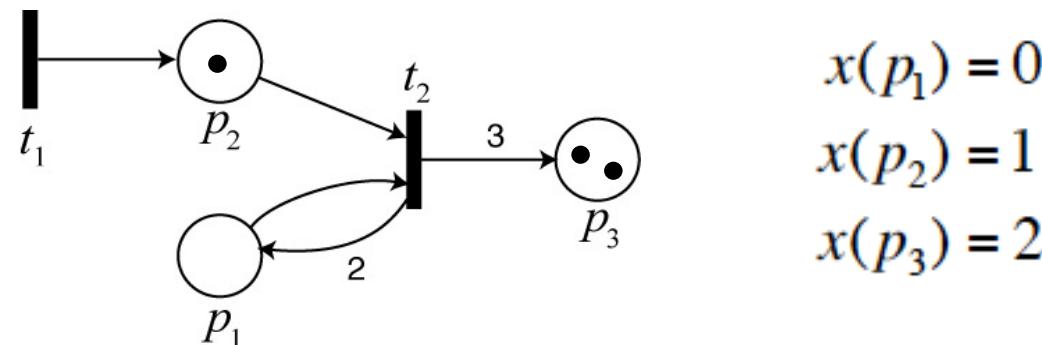
$$|P| = 3, \quad |T| = 2$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

tali matrici serviranno anche per descrivere l'evoluzione della rete di Petri

Il grafo di Petri  $PG$  descrive solo la topologia della rete; per avere una rete di Petri occorre introdurre il suo stato con la funzione di marcatura

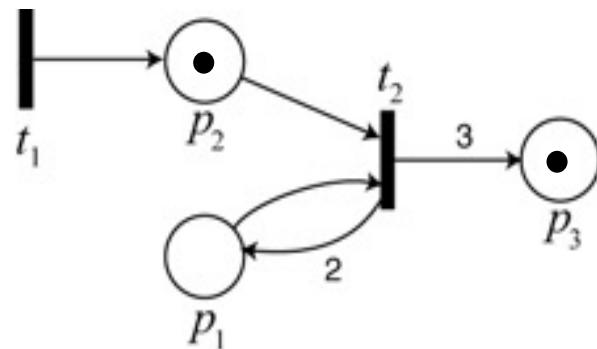
- $x: P \rightarrow N$  che associa ad ogni posto un numero naturale (**token**)



La funzione di marcatura definisce un vettore colonna il cui  $i$ -esimo elemento è il numero di token (gettoni/marche) nell' $i$ -esimo posto  $x(p_i)$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(p_1) \\ x(p_2) \\ \vdots \\ x(p_{|P|}) \end{bmatrix} \subseteq N^{|P|}$$

Una **rete di Petri**  $PN$  è quindi un grafo di Petri  $PG$  a cui è associata una funzione di marcatura (tipicamente, quella iniziale):  $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x})$



$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \subseteq N^3$$

Il vettore marcatura di una rete di Petri rappresenta lo **stato** della rete

- il numero di posti  $|P|$  è limitato, ma  $x(p_i)$  in generale può non esserlo
- una rete di Petri può quindi rappresentare un insieme di stati discreti di cardinalità infinita con un numero finito di posti
- queste sono le più semplici reti di Petri, dette “posti-transizioni” (P-T)
- in particolare, sono reti di Petri “ordinarie” se i pesi sugli archi sono solo unitari (o nulli)

# Dinamica delle reti di Petri

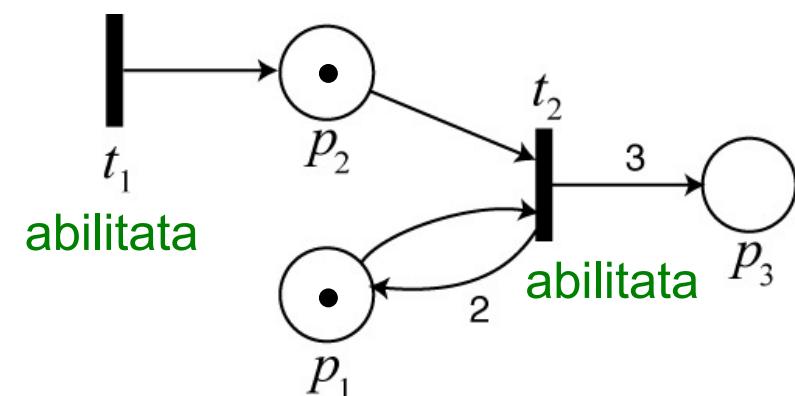
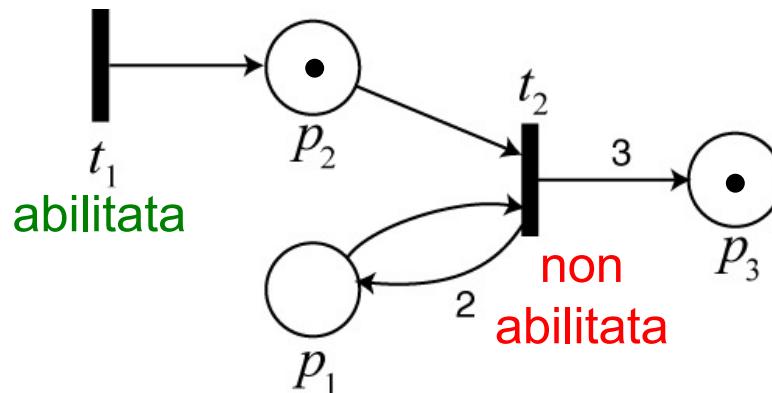
L'evoluzione di una rete di Petri è legata all'occorrenza di eventi

- quando può accadere un evento?
  - quando (almeno) una transizione è abilitata
- cosa succede alla rete in corrispondenza di un evento?
  - avviene un cambio di marcatura

Una transizione  $t_j$  è abilitata se

$$x(p_i) \geq w(p_i, t_j) \text{ per ogni } p_i \in I(t_j)$$

- se una transizione è abilitata allora può “scattare” (firing)
- accade l'evento ad essa legato



# Dinamica delle reti di Petri

Come cambia la marcatura quando scatta una transizione abilitata?

- in tutti i posti in ingresso alla transizione *si consumano* un numero di token pari al peso dell'arco che collega il posto alla transizione
- in tutti i posti in uscita dalla transizione *si generano* un numero di token pari al peso dell'arco che collega la transizione al posto

Si può definire allora una funzione  $f$  di transizione dello stato

$$f : N^{|P|} \times T \rightarrow N^{|P|}$$

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, t_j) \text{ se } x(p_i) \geq w(p_i, t_j) \forall p_i \in I(t_j)$$

“... (se e) quando **scatta**  
la transizione  **$t_j$**  ...”

$$\mathbf{x} = [x(p_1) \ x(p_2) \ \cdots \ x(p_{|P|})]^T \Rightarrow \mathbf{x}' = [x'(p_1) \ x'(p_2) \ \cdots \ x'(p_{|P|})]^T$$

$$x'(p_i) = x(p_i) - w(p_i, t_j) + w(t_j, p_i)$$

è una definizione corretta poiché si è posto

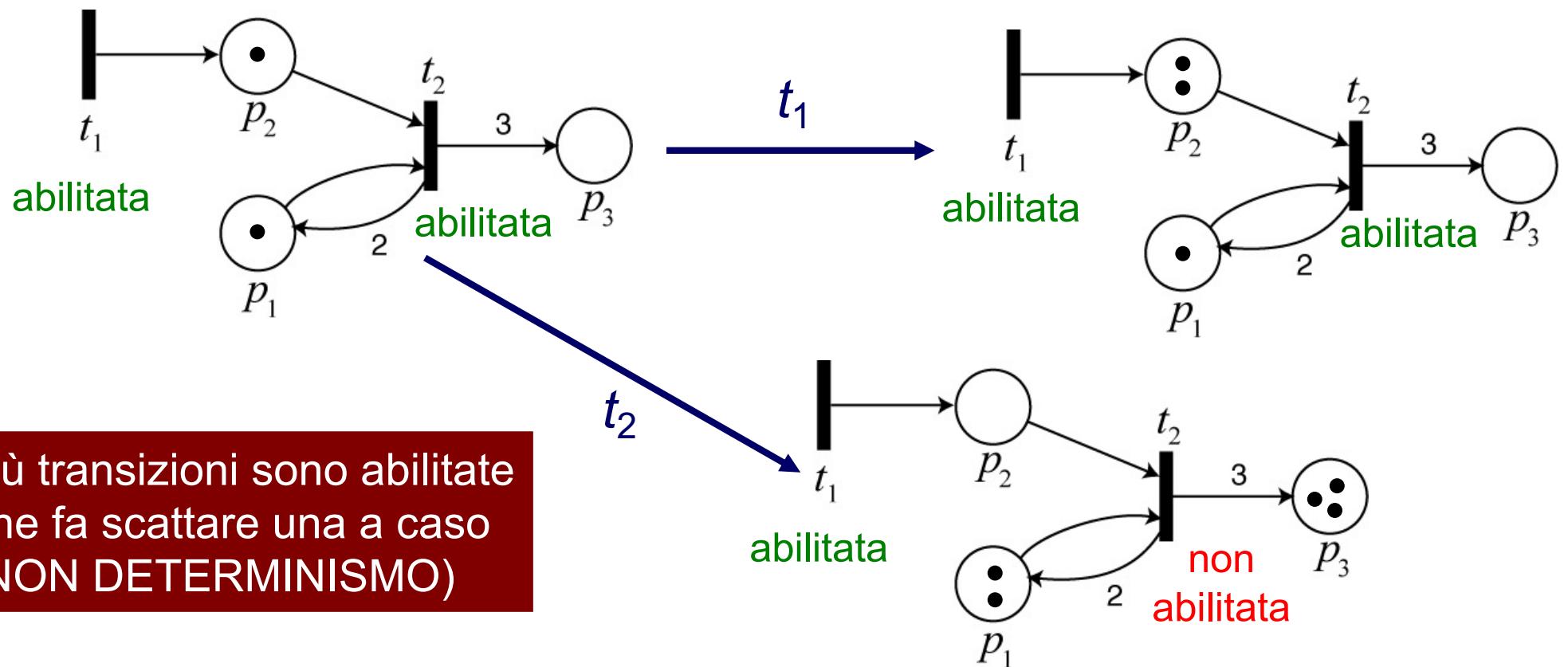
$$\begin{cases} w(p_i, t_j) = 0 & \text{se } p_i \notin I(t_j) \\ w(t_j, p_i) = 0 & \text{se } p_i \notin O(t_j) \end{cases}$$

# Dinamica delle reti di Petri

Con questo meccanismo si possono generare o far scomparire “risorse”

$$\sum_{p_i \in P} w(t_j, p_i) > \sum_{p_i \in P} w(p_i, t_j) \quad \text{genero token}$$

$$\sum_{p_i \in P} w(t_j, p_i) < \sum_{p_i \in P} w(p_i, t_j) \quad \text{elimino token}$$



# Transizioni concorrenti

---

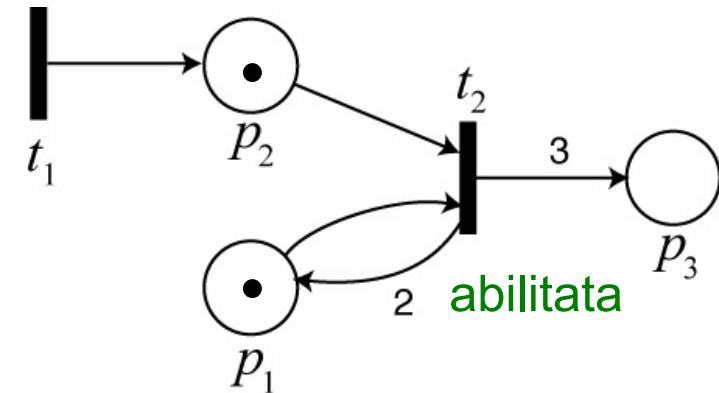
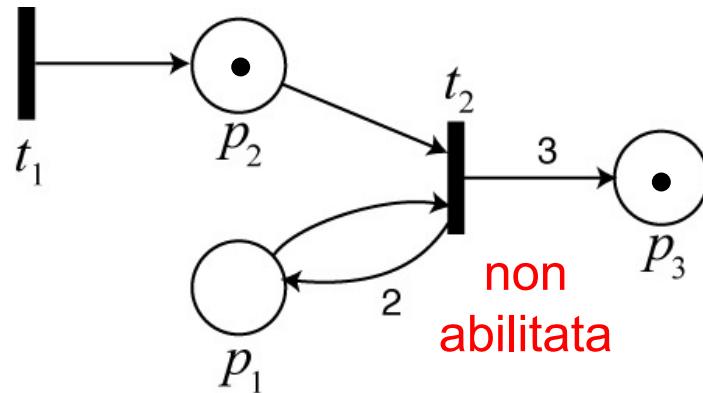
Cosa succede se una marcatura abilita più transizioni insieme?

- nelle reti standard si assume per convenzione che scatti **una sola** transizione alla volta, **scelta a caso** (non determinismo)
- lo scatto di una transizione alla volta preserva la **località** dell'evoluzione della rete (idea: due eventi non correlati non accadono “*mai allo stesso istante*”)
- un'altra regola diffusa nei programmi di simulazione delle *PN* è far scattare insieme **tutte** le transizioni abilitate e **non** in conflitto (“*risorse*” sufficienti!)
- per quelle **in conflitto**, vi sono molte convenzioni diverse:
  - ➔ scelta casuale
  - ➔ priorità lessicografica
  - ➔ priorità con memoria
  - ➔ ...
- a transizione scattata, occorre comunque verificare di nuovo le condizioni di abilitazione di tutte le transizioni perché la marcatura è cambiata
- la scelta di scatto casuale di una delle transizioni abilitate ha un valore concettuale (ad es., in simulazione), ma **non** è ammissibile in generale nelle implementazioni (ad es., nella legge di supervisione di un processo)

# Dinamica delle reti di Petri

In termini di matrice  $I$  di input, una transizione  $t_j$  è abilitata se

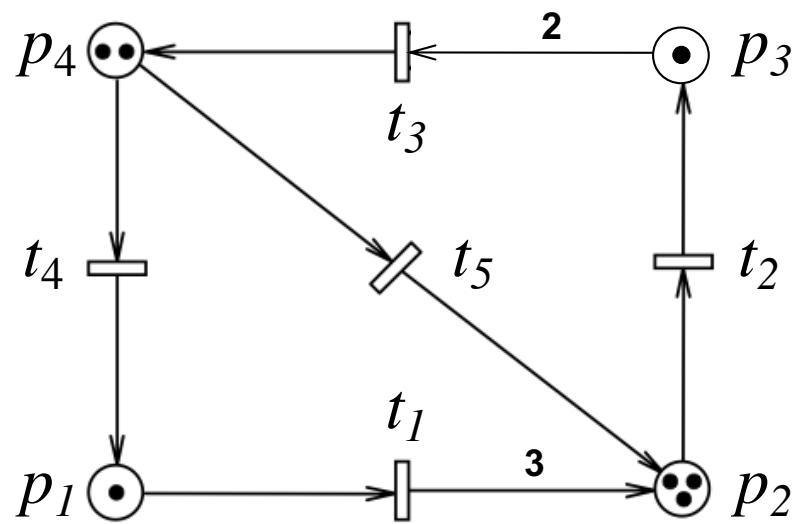
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{I}_j$$



$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} < \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Dinamica di evoluzione di una rete



- ① con la marcatura iniziale  $\mathbf{x}_0$ :  $t_1, t_2, t_4$  e  $t_5$  sono tutte *abilitate*, mentre  $t_3$  non lo è
- ② possibili marcature ottenibili dopo il primo scatto, effettuato con scelta casuale:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_0 \xrightarrow{t_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_0 \xrightarrow{t_4} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_0 \xrightarrow{t_5} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ③ una sequenza *ammissibile* di transizioni che porta la rete dalla marcatura iniziale  $\mathbf{x}_0$  alla marcatura  $\mathbf{x}_f = (0\ 3\ 3\ 3)^T$  è data per esempio da

$$S = t_1 t_4 t_1 t_2 t_2 t_2 t_2 t_2 t_3 t_3 = t_1 t_4 t_1 (t_2)^6 (t_3)^2$$

- ④ le sequenze  $t_1 t_2 t_3 t_4 t_5$ ,  $t_2 t_3 t_5 t_4 t_1$  e  $t_4 t_2 t_1 t_5 t_3$  sono tutte *ammissibili* e portano alla medesima marcatura finale  $\mathbf{x}_f = (1\ 6\ 0\ 1)^T$ 
  - ➔ si ottiene la stessa marcatura perché in ogni sequenza ciascuna transizione scatta lo stesso numero di volte

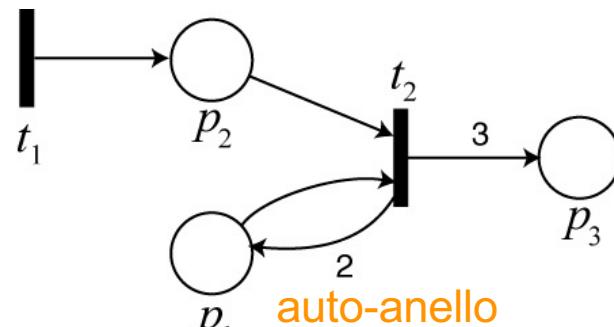
# Dinamica delle reti di Petri

In termini di matrici di input e output la funzione di transizione diventa

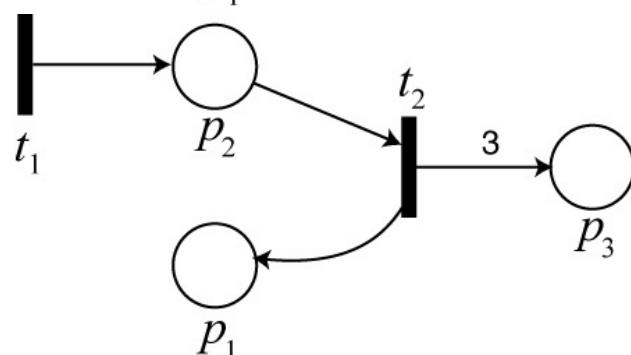
$$f : N^{|P|} \times T \rightarrow N^{|P|}$$
$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{I}_j + \mathbf{O}_j \quad \text{se } \mathbf{x} \geq \mathbf{I}_j$$

Si definisce anche la matrice di incidenza della rete di Petri  $\mathbf{C} = \mathbf{O} - \mathbf{I}$

- utile, anche se non caratterizza completamente la topologia della rete
- si perde informazione sul peso di archi in ingresso-uscita alla stessa coppia  $(p_i, t_j)$



$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \mathbf{O} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

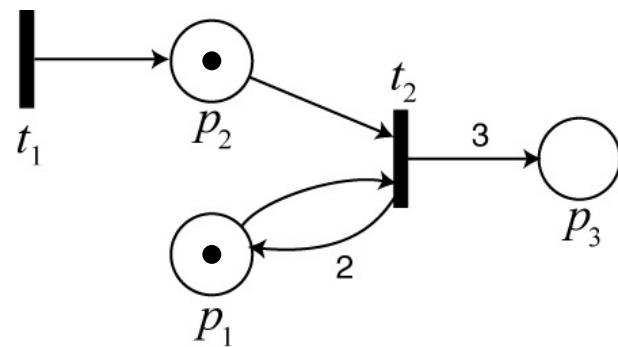


$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \mathbf{O} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

# Dinamica delle reti di Petri

La matrice di incidenza definisce la dinamica della rete

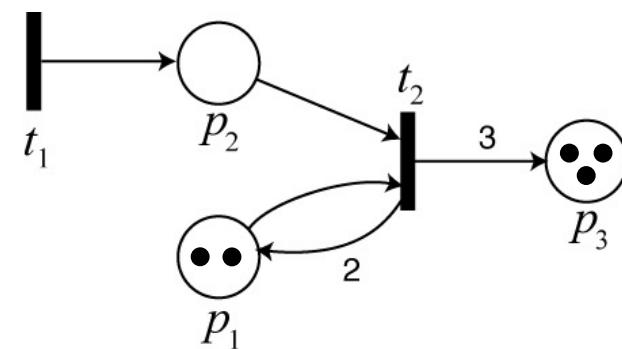
$$f : N^{|P|} \times T \rightarrow N^{|P|}$$
$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{C}_j \quad \text{se } \mathbf{x} \geq \mathbf{I}_j$$



$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \mathbf{O} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{transizione } t_2 \text{ è abilitata}$$

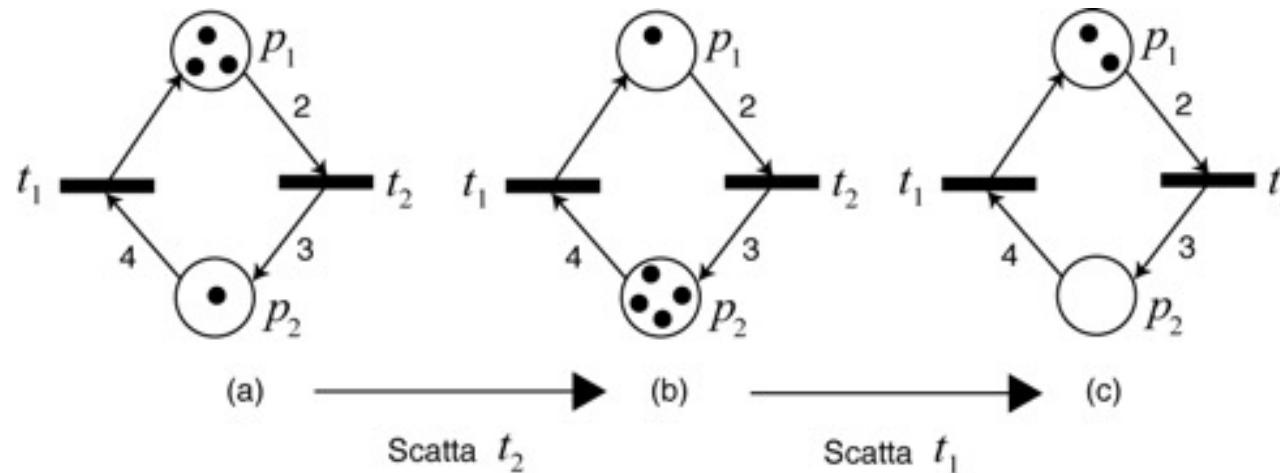
$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$



# Dinamica delle reti di Petri

Si definisce sequenza di scatti  $S$  una sequenza di  $n$  transizioni tali che

- la prima transizione della sequenza è abilitata nella marcatura corrente
- lo scatto di ogni transizione porta in una marcatura in cui è abilitata la transizione successiva nella sequenza



$$\mathbf{S} = t_2 t_1$$

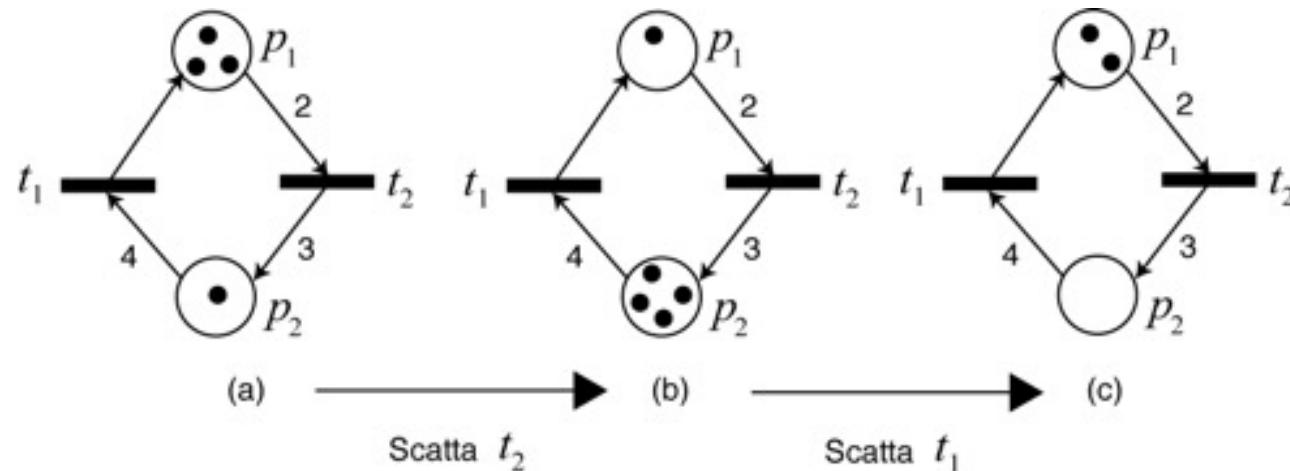
$$\mathbf{C} = \mathbf{O} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}'' = \mathbf{x}' + \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x} + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_1$$

# Dinamica delle reti di Petri

Si definisce vettore delle occorrenze  $s$  di una sequenza di scatti  $S$  un vettore colonna con  $|T|$  elementi tale che

- il  $k$ -esimo elemento  $s_k$  è pari al numero di occorrenze della transizione  $t_k$  in  $S$



$$\mathbf{S} = t_2 t_1 \Rightarrow s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

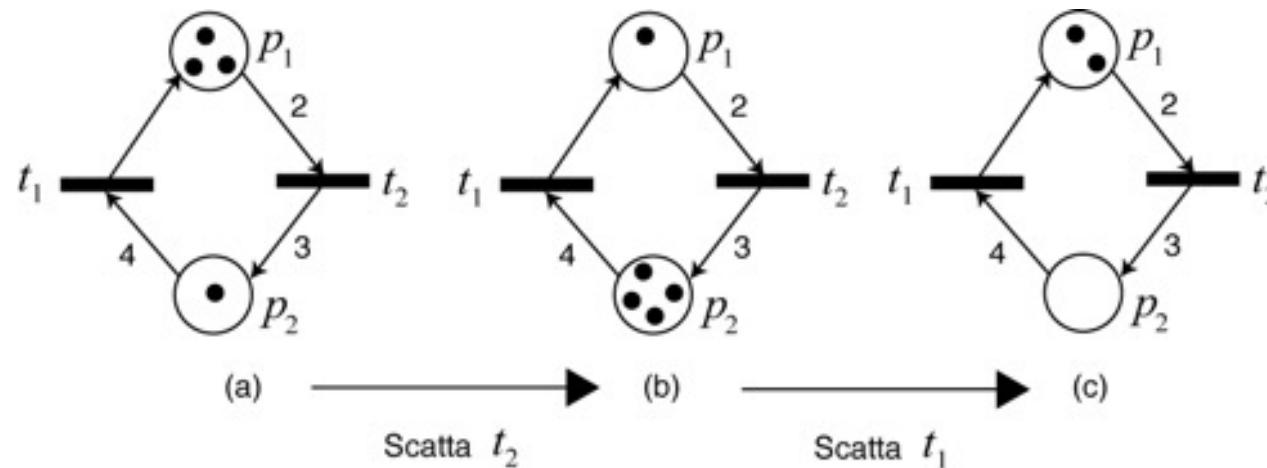
Nota bene: un vettore delle occorrenze corrisponde a più sequenze di transizioni, ma in generale **non** tutte sono sequenze di scatti (ammissibili)

- $s = (1 \ 1)^T$  corrisponde sia a  $\mathbf{S}_1 = t_1 t_2$  sia a  $\mathbf{S}_2 = t_2 t_1$ , ma solo  $\mathbf{S}_2$  è una sequenza di scatti

# Dinamica delle reti di Petri

L'evoluzione dinamica di una rete di Petri a seguito di una sequenza di scatti  $S$  a cui corrisponde un vettore delle occorrenze  $s$  è data da

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{C}_S$$

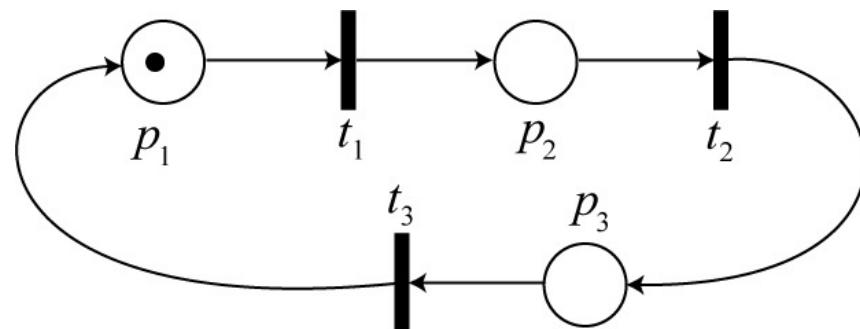


$$\begin{aligned}\mathbf{x}'' &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}'' &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}_S \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

# Proprietà strutturali delle reti di Petri

Si consideri una generica rete di Petri  $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$ , dove  $\mathbf{x}_0$  è la marcatura iniziale

- una marcatura  $\mathbf{x}_2$  è **raggiungibile** da una marcatura  $\mathbf{x}_1$  se esiste almeno una sequenza di scatti la cui esecuzione da  $\mathbf{x}_1$  porta a  $\mathbf{x}_2$
- ogni marcatura è raggiungibile da se stessa
- l'insieme delle marcature raggiungibili di  $PN$  è l'insieme  $R(PN)$  di tutte le marcature raggiungibili da  $\mathbf{x}_0$
- sono tutti gli stati in cui il sistema può portarsi durante una generica **evoluzione** (considerando anche tutte le possibili scelte di sequenze di scatto)

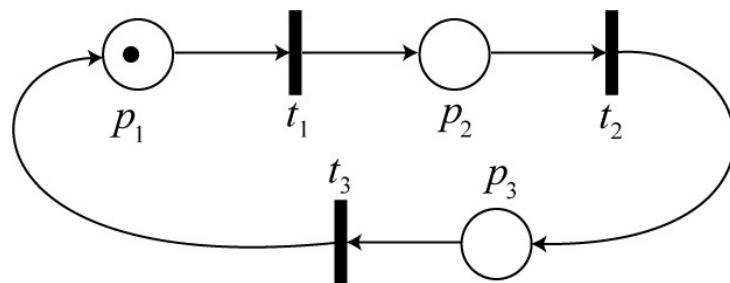


$$R(PN) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

# Proprietà strutturali delle reti di Petri

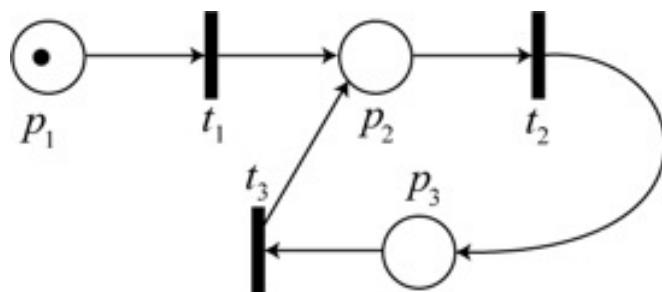
Si consideri una generica rete di Petri  $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$

- una marcatura  $\mathbf{x}^*$  è detta **marcatura base** se è raggiungibile da ogni marcatura  $\mathbf{x} \in R(PN)$ 
  - capacità del sistema di ripristinare sistematicamente una particolare condizione
- se la marcatura iniziale  $\mathbf{x}_0$  è una marcatura base, la rete è reversibile
  - capacità del sistema di riportarsi sistematicamente nella condizione iniziale



$$R(PN_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

tutte marcature base  
⇒ rete reversibile



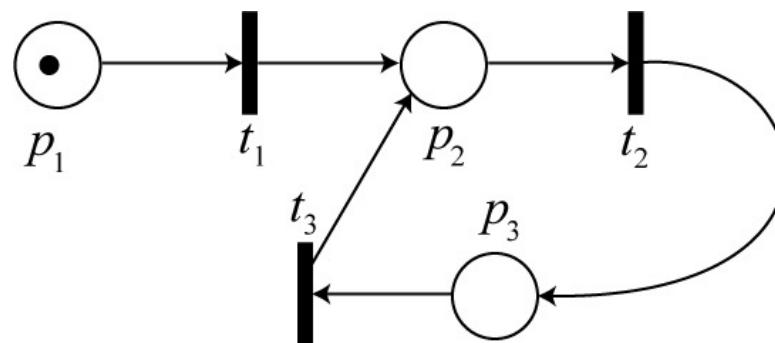
$$R(PN_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\mathbf{x}_0$  non è una marcatura base  
⇒ rete non reversibile

# Proprietà strutturali delle reti di Petri

Si consideri una generica rete di Petri  $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$

- una transizione  $t$  è **viva** se per ogni marcatura  $\mathbf{x} \in R(PN)$  esiste almeno una marcatura  $\mathbf{x}^*$  raggiungibile da  $\mathbf{x}$  che abilita  $t$ 
  - quando una transizione (viva)  $t$  che è abilitata in  $\mathbf{x}^*$  scatta, la rete si porterà in una marcatura da cui potrà, a seguito di una sequenza di scatti, raggiungere una marcatura finale ( $\mathbf{x}^*$  o un'altra) tale da far scattare nuovamente  $t$
  - una transizione viva può scattare infinite volte
- c'è vivezza della rete quando tutte le transizioni sono vive
  - nota: la non vivezza non implica l'impossibilità di evolvere



rete **non** viva perché  
 $t_1$  è abilitata solo da  $\mathbf{x}_0$   
(transizione non viva,  
mentre  $t_2$  e  $t_3$  lo sono)

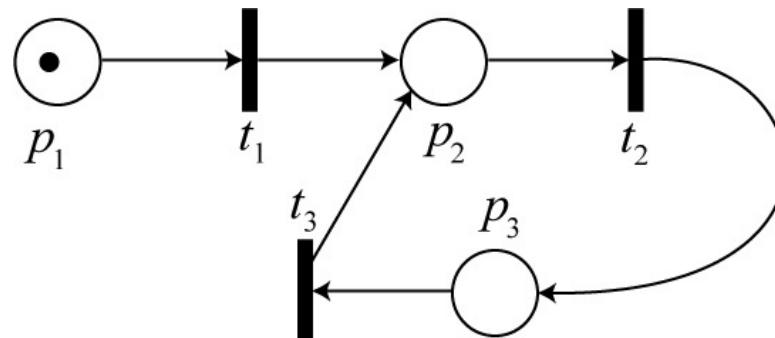
... la rete continuerà a  
evolvere senza mai bloccarsi!

# Proprietà strutturali delle reti di Petri

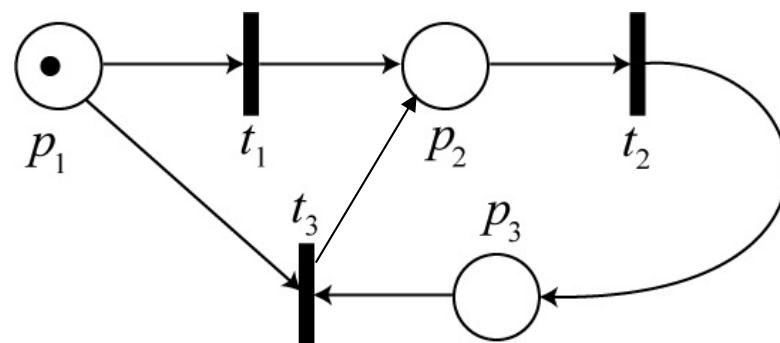
Si consideri una generica rete di Petri  $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$

□ la rete è bloccante se esiste una marcatura  $\mathbf{x}_b \in R(PN)$  in cui non è abilitata nessuna transizione

- la rete, una volta arrivata in  $\mathbf{x}_b$ , non può più evolvere (**deadlock**)
- una rete bloccante non è viva
- una rete non viva può non essere bloccante



- rete non viva in quanto  $t_1$  è abilitata solo in  $\mathbf{x}_0$
- rete non bloccante



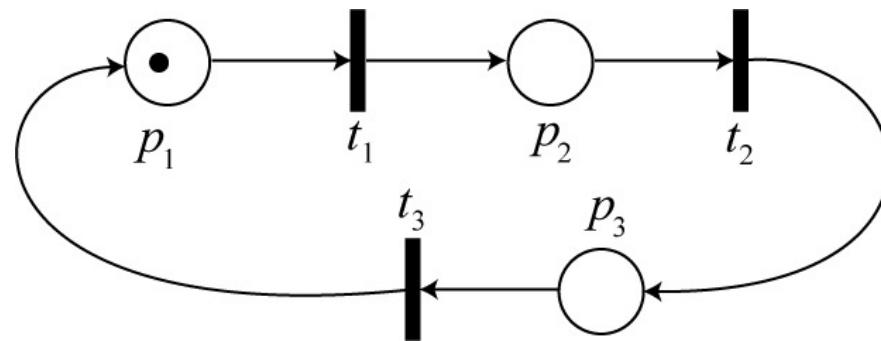
- rete bloccante (da  $\mathbf{x}_0$ )
- $\mathbf{x}_b = [0 \ 0 \ 1]^T \in R(PN)$

# Proprietà strutturali delle reti di Petri

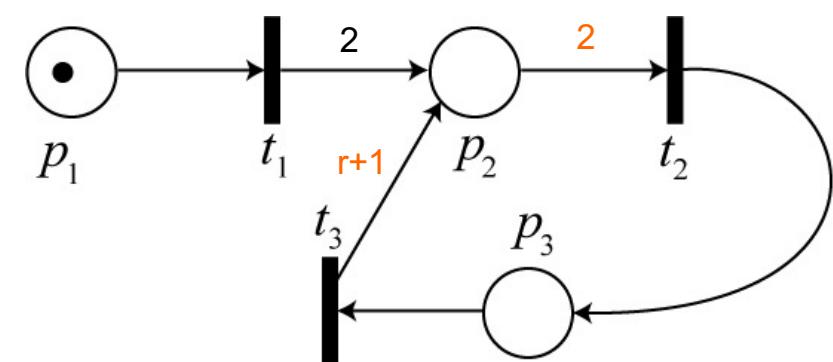
Si consideri una generica rete di Petri  $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$

Durante l'evoluzione si possono generare o distruggere token ad ogni transizione; è possibile che si *accumulino* token in posti della rete?

- un posto  $p_i$  si dice **k-limitato** se in ogni marcatura raggiungibile il numero di token in  $p_i$  è minore o uguale a k
- c'è limitatezza della rete quando ogni posto della rete è k-limitato per un qualche k finito (rete safe (o binaria) se è limitata con k=1)



rete safe

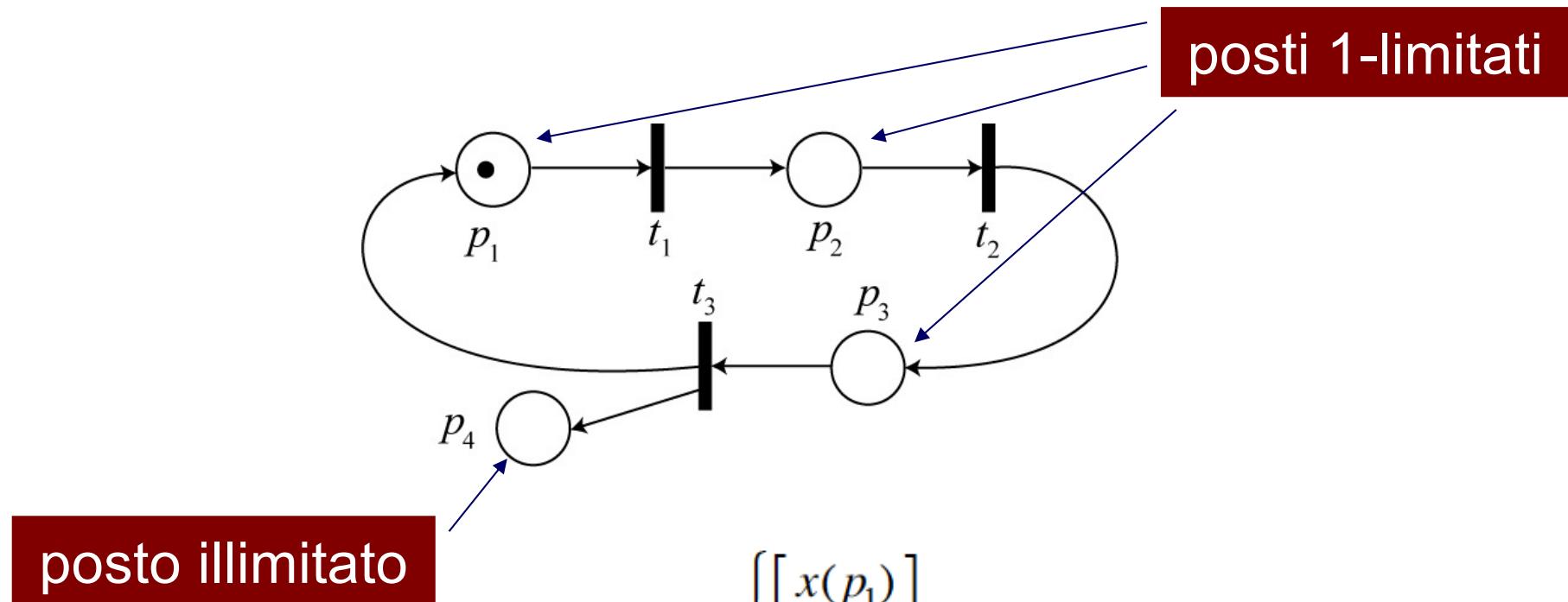


bloccante se  $r = 0$   
rete limitata (con  $k=2$ ) se  $r = 1$   
illimitata per  $r \geq 2$

# Proprietà strutturali delle reti di Petri

Si consideri una generica rete di Petri  $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$

- un posto  $p_i$  è detto **illimitato** se non è  $k$ -limitato per nessun  $k$  finito
- si ha una rete illimitata quando almeno un suo posto è illimitato

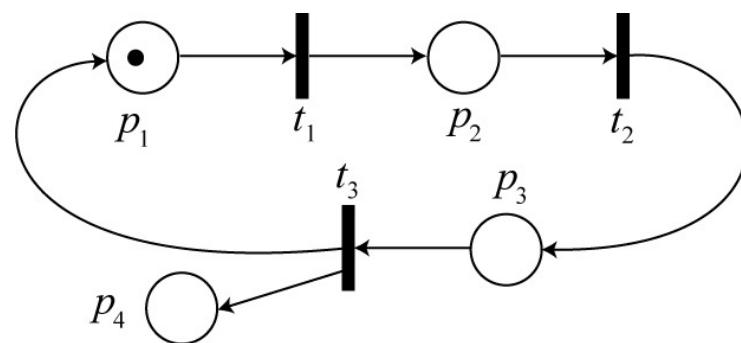


$$R(PN) = \left\{ \begin{bmatrix} x(p_1) \\ x(p_2) \\ x(p_3) \\ x(p_4) \end{bmatrix} \in N^4 \text{ tali che } x(p_1) + x(p_2) + x(p_3) = 1 \right\}$$

# Proprietà strutturali delle reti di Petri

Si consideri una generica rete di Petri  $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$

- la parte conservativa della rete è un sottoinsieme di posti in cui, durante qualunque evoluzione ammisible, si mantiene costante una combinazione lineare (a coefficienti interi naturali) di token



$$R(PN) = \left\{ \begin{bmatrix} x(p_1) \\ x(p_2) \\ x(p_3) \\ x(p_4) \end{bmatrix} \in N^4 \text{ tali che } x(p_1) + x(p_2) + x(p_3) = 1 \right\}$$

$\{p_1, p_2, p_3\}$  è la parte conservativa della rete

- se la rete ammette una parte conservativa, allora

$$\Lambda \cdot \mathbf{x} = c \quad \forall \mathbf{x} \in R(PN)$$

$$\text{con } c \in N \text{ e con } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{|P|} \end{bmatrix} \in N^{|P|} \quad (\lambda_i < \infty)$$

- se  $p_i$  non appartiene a parte conservativa  $\Rightarrow \lambda_i = 0$  (es:  $\Lambda = [1 \ 1 \ 1 \ 0]$ )
- le parti conservative della rete indicano limiti fisici nel sistema
- se le parti conservative coprono tutto l'insieme  $P$ , la rete è **limitata**

Si possono individuare alcune strutture fondamentali nell'interconnessione tra posti e transizioni, con una chiara *interpretazione modellistica*

- **transizioni in conflitto**

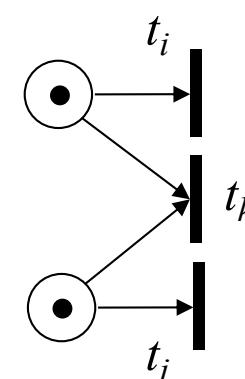
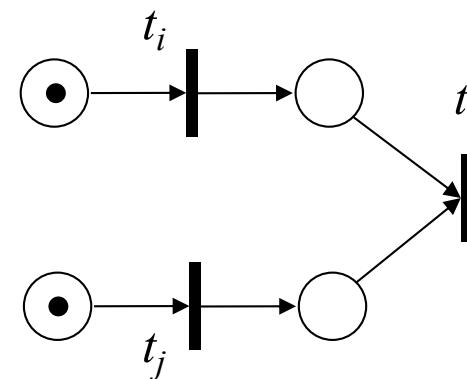
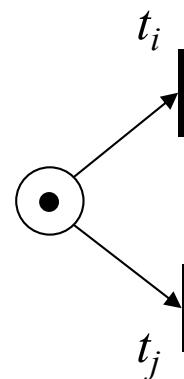
- transizioni con uno o più posti di ingresso in comune, ma aventi un numero di token non sufficienti a farle scattare tutte

- **transizioni in concorrenza con successiva sincronizzazione**

- transizioni senza posti di ingresso in comune, tutte abilitate e seguite da posti di uscita che sono anche di ingresso per una transizione comune

- **transizioni in alternativa (o in confusione)**

- transizioni in concorrenza tra loro, ma in conflitto con altre transizioni (terze)



$t_i$  in concorrenza con  $t_j$   
 $t_i$  e  $t_j$  in conflitto con  $t_k$

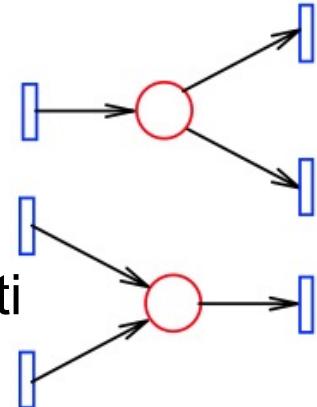
# Classi particolari di reti di Petri

Alcune classi di reti di Petri hanno vincoli extra sulla topologia del loro grafo  
⇒ minore capacità rappresentativa come modelli di DEDS, ma possibilità di avere risultati analitici più forti

Si considerano qui alcuni casi particolari solo di reti di Petri P-T **ordinarie**, ossia con archi di peso **unitario** (altrimenti sono dette **generalizzate = GPN**)

## □ macchina a stati (State Machine, SM)

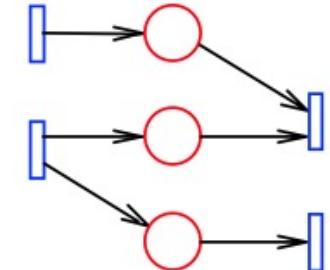
- ogni **transizione** ha il limite di un solo posto in ingresso e un solo posto in uscita
- il numero di token non cambia mai ⇒ rete conservativa
- se la marcatura iniziale ha un solo token ⇒ rete sicura (binaria)
- è viva ⇔ il suo grafo è fortemente连通的 e  $\exists$  almeno un token
- insieme di raggiungibilità è finito ⇒ equivale ad un automa a stati finiti
- *può rappresentare conflitti, ma non concorrenza e sincronizzazione*



# Classi particolari di reti di Petri

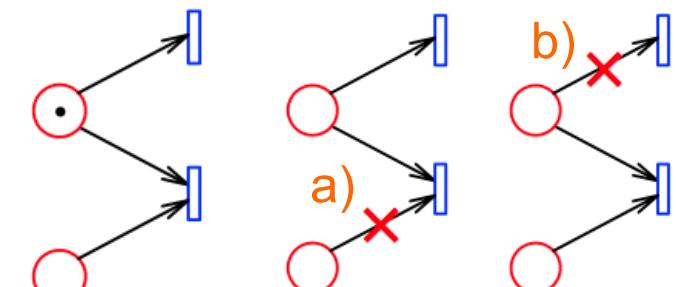
## □ grafo marcato (Marked Graph, MG)

- ogni **posto** ha il limite di una sola transizione in ingresso e una sola in uscita
- vivezza  $\Leftrightarrow$  ogni ciclo contiene almeno un posto marcato
- può modellare concorrenza e sincronizzazione, ma non i conflitti



## □ rete a scelta libera (Free Choice Petri Net, FC)

- può rappresentare concorrenza e conflitti, che però non si influenzano tra loro
- si vuole evitare che transizioni in potenziale conflitto possano non essere tutte simultaneamente abilitate
  - la risoluzione dei conflitti non sarebbe **libera**, dipendendo anche da altri posti (magari “lontani”) nella rete
- per ogni arco da un posto a una transizione
  - a) o il **posto** è l’unico in ingresso a quella transizione (non c’è sincronizzazione)
  - b) oppure la **transizione** è l’unica in uscita da quel posto (non ci sono conflitti)

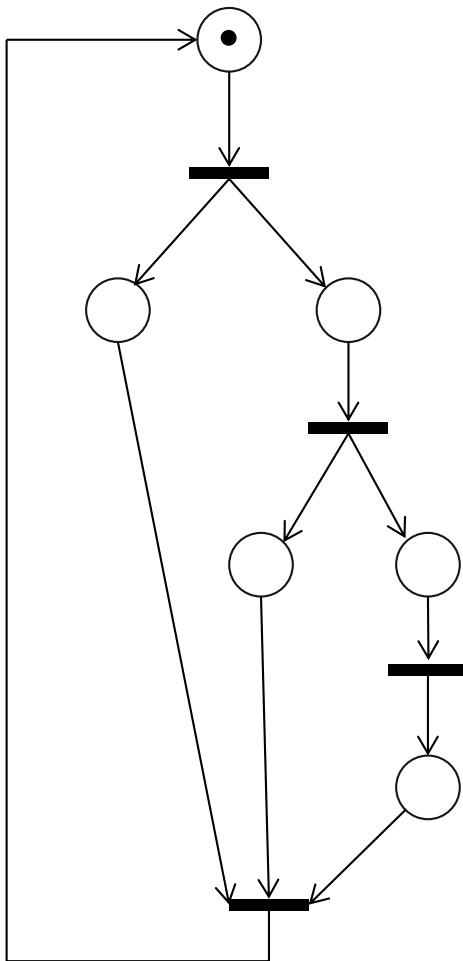


## □ se due posti nella rete hanno una o più transizioni di uscita in comune, allora ...

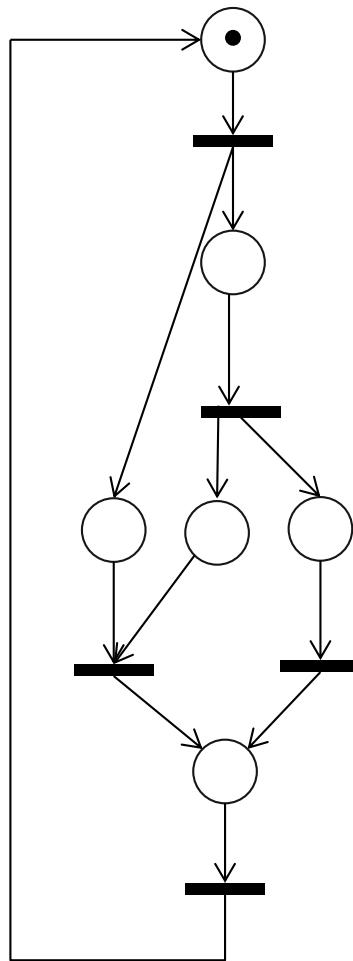
- rete **FC Estesa**: ... hanno tutte le transizioni di uscita in comune
- rete **FC Asimmetrica**: ... tutte le transizioni di uscita di uno lo sono anche dell’altro

# Esempi con Reti di Petri ordinarie

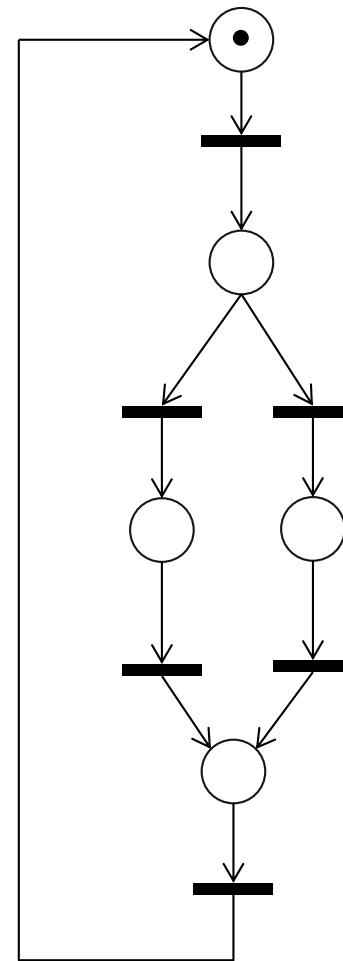
Marked Graph



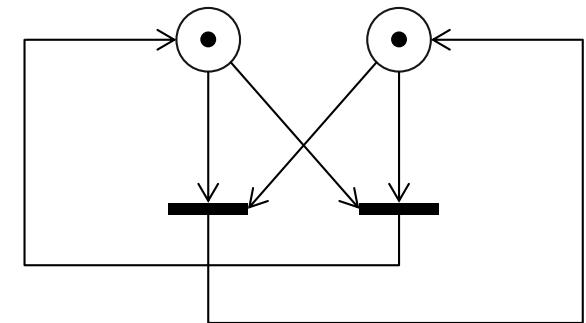
Free Choice



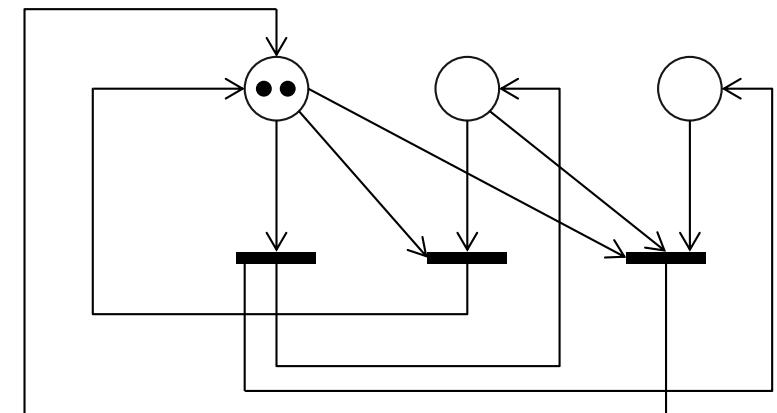
State Machine



Free Choice estesa



Free Choice asimmetrica

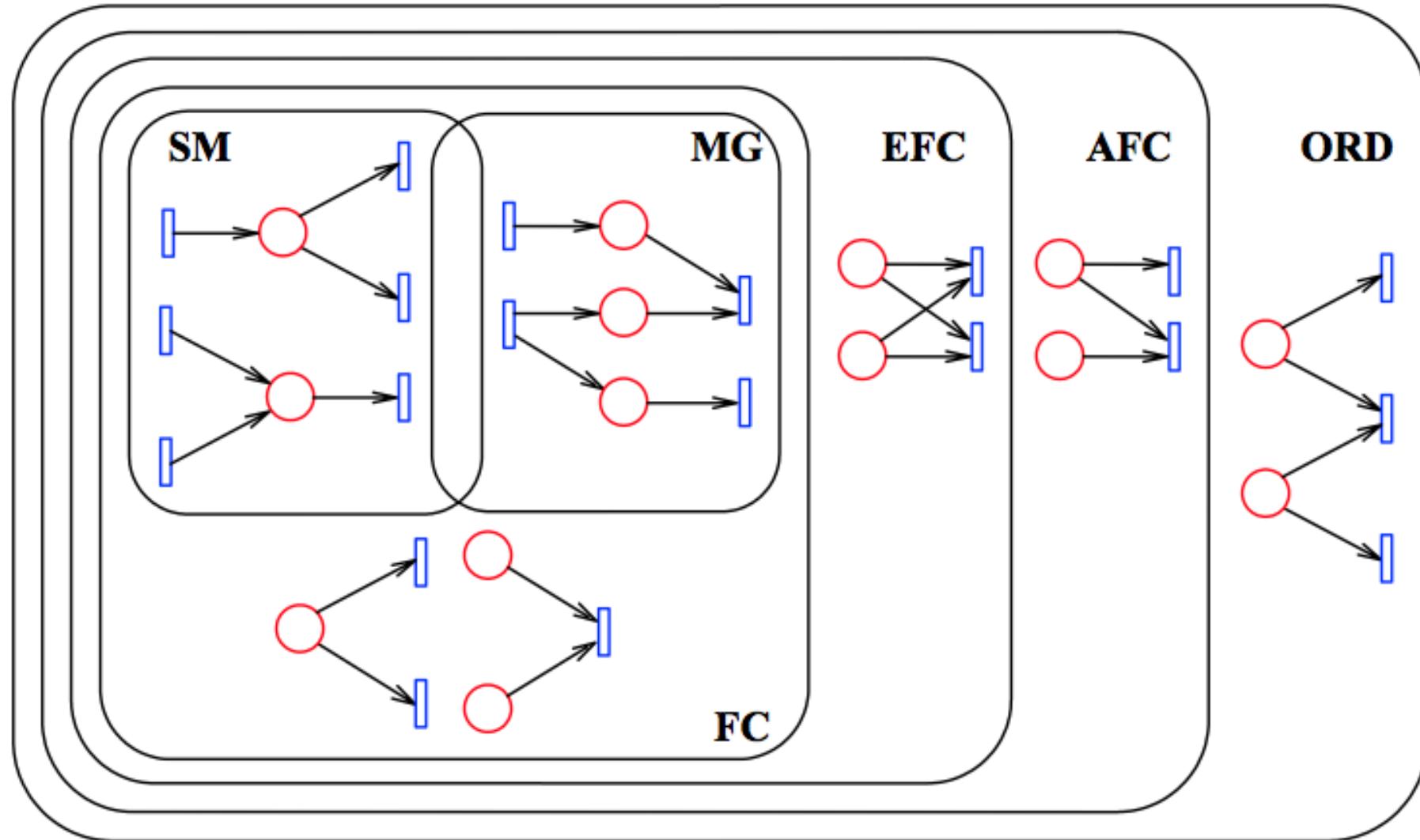


FC estesa  
⇒ FC:

se c'è un arco tra posto  $p$  e transizione  $t$ ,  
allora c'è un arco tra ogni posto in ingresso a  $t$   
e ogni transizione in uscita a  $p$

# Classi particolari di reti di Petri

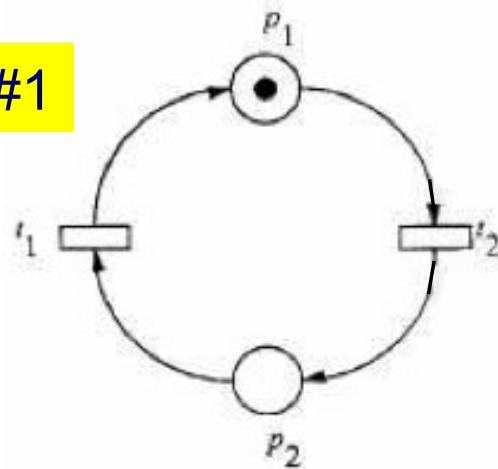
- relazioni tra classi di PN: ORD  $\supset$  AFC  $\supset$  EFC  $\supset$  FC  $\supset$  (SM  $\cup$  MG)



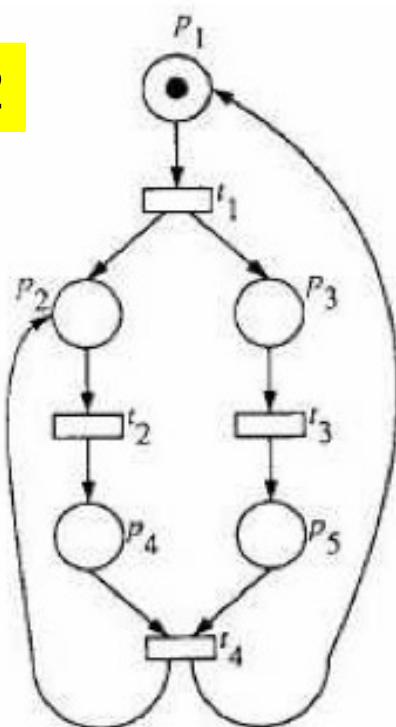
# Esempi di proprietà strutturali

limitatezza, vivezza e reversibilità sono proprietà indipendenti  
esempi tratti da materiale didattico di Luigi Piroddi, Politecnico di Milano

#1



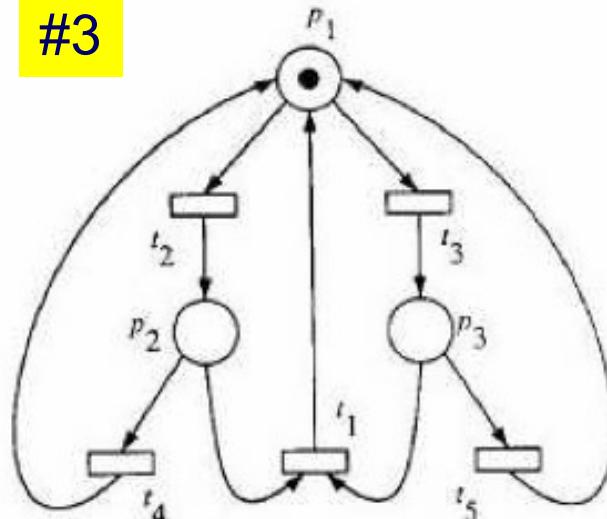
#2



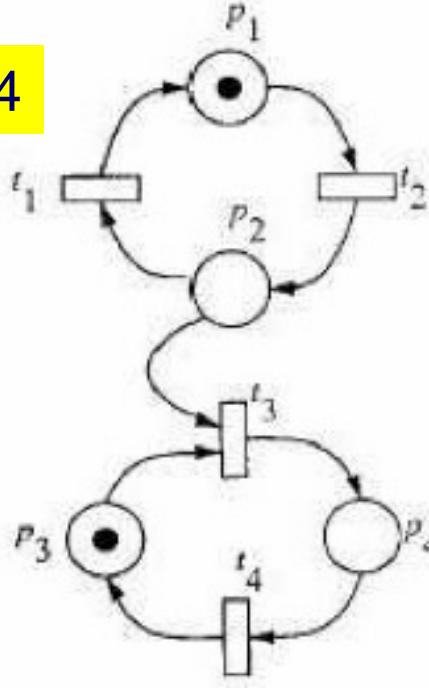
- limitatezza: SI, vivezza: SI, reversibilità: SI
- è una SM  $\Rightarrow$  rete binaria, conservativa
- è un MG con un token in ogni ciclo  $\Rightarrow$  vivezza
  
- limitatezza: NO  
 $\Rightarrow p_2$  e  $p_4$  sono illimitati (ad es., con la sequenza  $\{t_1 t_2 t_3 t_4\}^k$ )
- vivezza: SI
- reversibilità: NO  
 $\Rightarrow$  per marcare nuovamente  $p_1$  occorre far scattare  $t_4$ , ma così si aggiunge un token in  $p_2$
- è una FC

# Esempi di proprietà strutturali

#3



#4



- limitatezza: SI
- vivezza: NO
  - ⇒  $t_1$  non può scattare mai
- reversibilità: SI
  - ⇒ eliminando  $t_1$ , il resto è una SM con tre soli stati:  $\mathbf{x}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{x}_1 = [0 \ 1 \ 0]^T$  e  $\mathbf{x}_2 = [0 \ 0 \ 1]^T$
  - ⇒ da  $\mathbf{x}_1$  si torna in  $\mathbf{x}_0$  con lo scatto di  $t_4$ , mentre da  $\mathbf{x}_1$  si torna in  $\mathbf{x}_0$  con lo scatto di  $t_5$

- limitatezza: SI

- vivezza: NO

- ⇒ se scatta  $t_3$ ,  $t_1$  e  $t_2$  non saranno mai più abilitati
  - ⇒ scattato  $t_3$ , dopo  $t_4$  la rete si blocca in  $\mathbf{x}_b = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$

- reversibilità: NO

- ⇒ se scatta  $t_3$ , non si riesce più a marcare  $p_1$

- è una AFC:  $O(p_2) = \{t_1, t_3\} \supset O(p_3) = \{t_3\}$

- è una rete bloccante

# Esempi di proprietà strutturali

- limitatezza: NO

⇒ il posto  $p_1$  è illimitato (ad es., nelle sequenze  $\{t_2 t_1\}^k$  o  $t_2 t_3 \{t_1 t_2\}^k$ , con  $k$  arbitrario)

- vivezza: SI

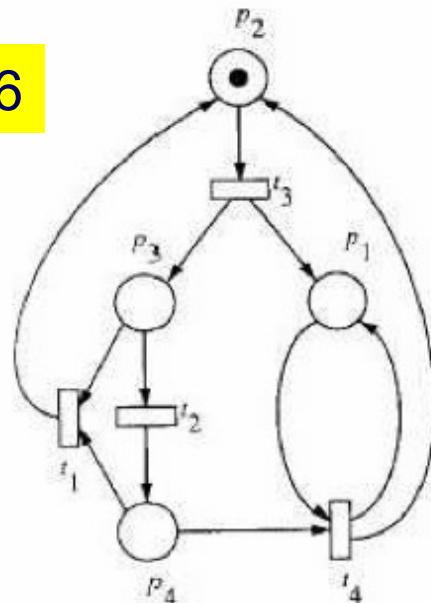
⇒ la rete è un MG e ogni ciclo contiene un posto marcato (condizione necessaria e sufficiente di vivezza)

- reversibilità: SI

⇒ ma solo se  $t_3$  scatta in media tante volte quante  $t_2$

- rappresenta un modello produttori-consumatori

#6



- limitatezza: NO

⇒  $p_1$  è illimitato: la sua marcatura cresce di un token per ogni scatto di  $t_3$  (sequenza ripetuta)

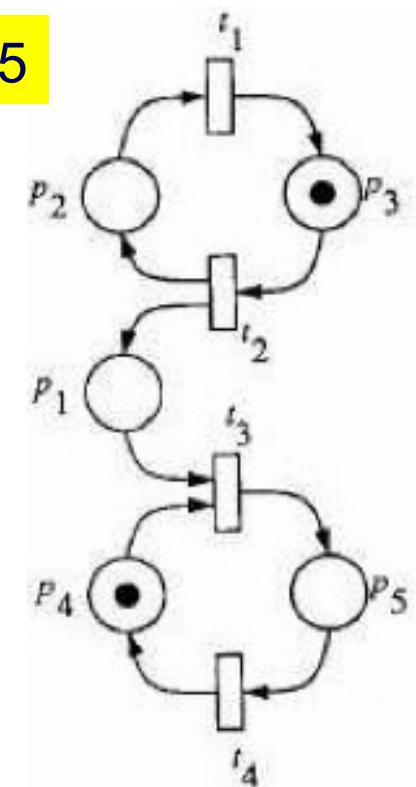
- vivezza: NO

⇒  $t_1$  non è mai abilitata

- reversibilità: NO

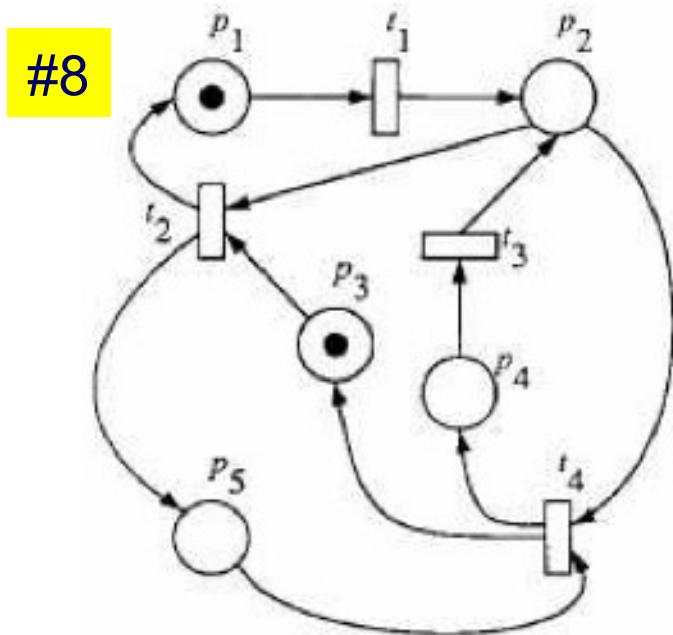
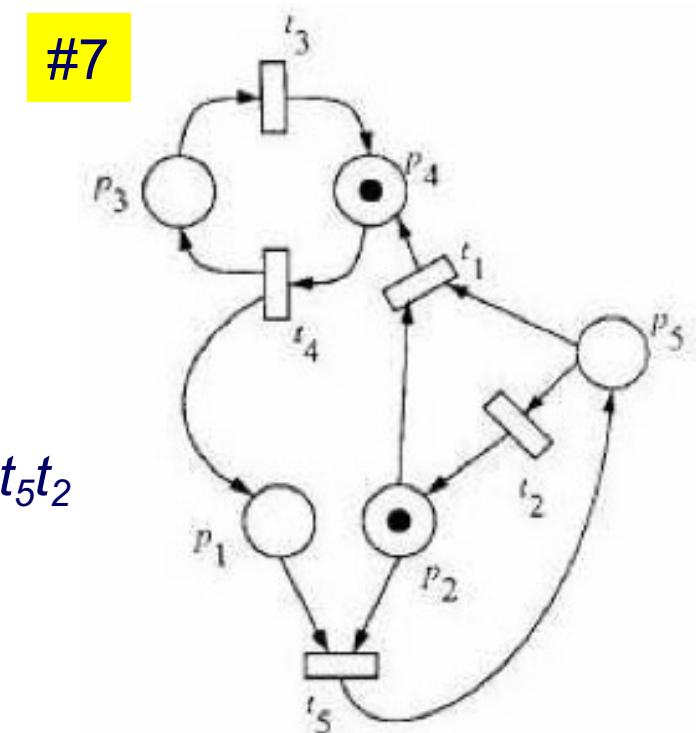
⇒ la sola sequenza ripetuta consentita è  $t_3 t_2 t_4$  e questa introduce token non eliminabili in  $p_1$

#5

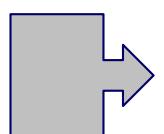


# Esempi di proprietà strutturali

- limitatezza: NO
  - ⇒ il posto  $p_1$  è illimitato (ad es., dalla sequenza  $t_4t_3$ )
- vivezza: NO
  - ⇒  $t_1$  non è mai abilitata
- reversibilità: SI
  - ⇒ c'è consumo di token in  $p_1$ , ripetendo la sequenza  $t_5t_2$



- limitatezza: SI, vivezza: SI, reversibilità: NO
  - ⇒ inizialmente può scattare solo  $t_1$
  - ⇒ dopo è consentita solo la sequenza ripetuta  $t_2t_1t_4t_3$
  - ⇒ è una AFC:  $O(p_2) = \{t_2, t_4\} \supset O(p_3) = \{t_2\} \cup O(p_5) = \{t_4\}$



# Analisi grafica delle reti di Petri

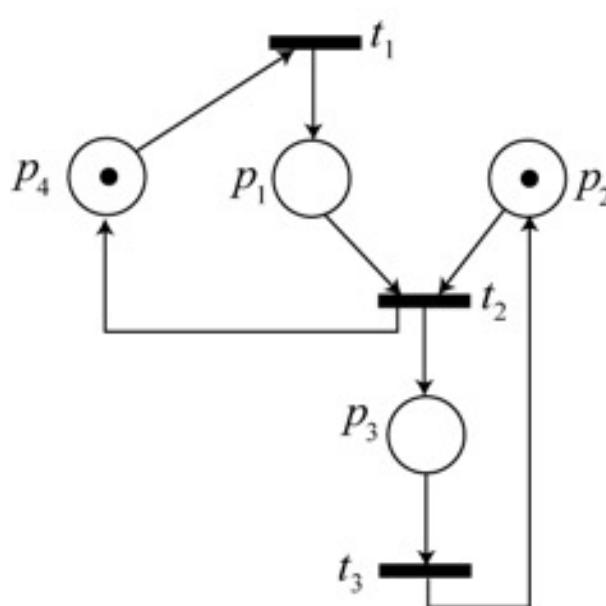
---

Studio delle proprietà di raggiungibilità di una Petri Net  $PN=(P,T,A,w,\mathbf{x}_0)$

- l'albero di raggiungibilità è uno strumento grafico che rappresenta visivamente tutte le marcature raggiungibili e le sequenze di scatti
- il nodo radice rappresenta la marcatura iniziale della rete
- i nodi di livello k rappresentano le marcature raggiungibili in k passi
- l'albero si sviluppa con una politica “depth-first”
- un nodo è una foglia dell'albero se rappresenta una marcatura già visitata o se non abilita più transizioni
- l'analisi dell'albero di raggiungibilità permette di studiare:
  - ➔ l'insieme di raggiungibilità della rete
  - ➔ la reversibilità della rete
  - ➔ la vivezza della rete
  - ➔ la limitatezza della rete

# Analisi grafica delle reti di Petri

esempio 1: sistema client/server con buffer delle richieste a capacità unitaria



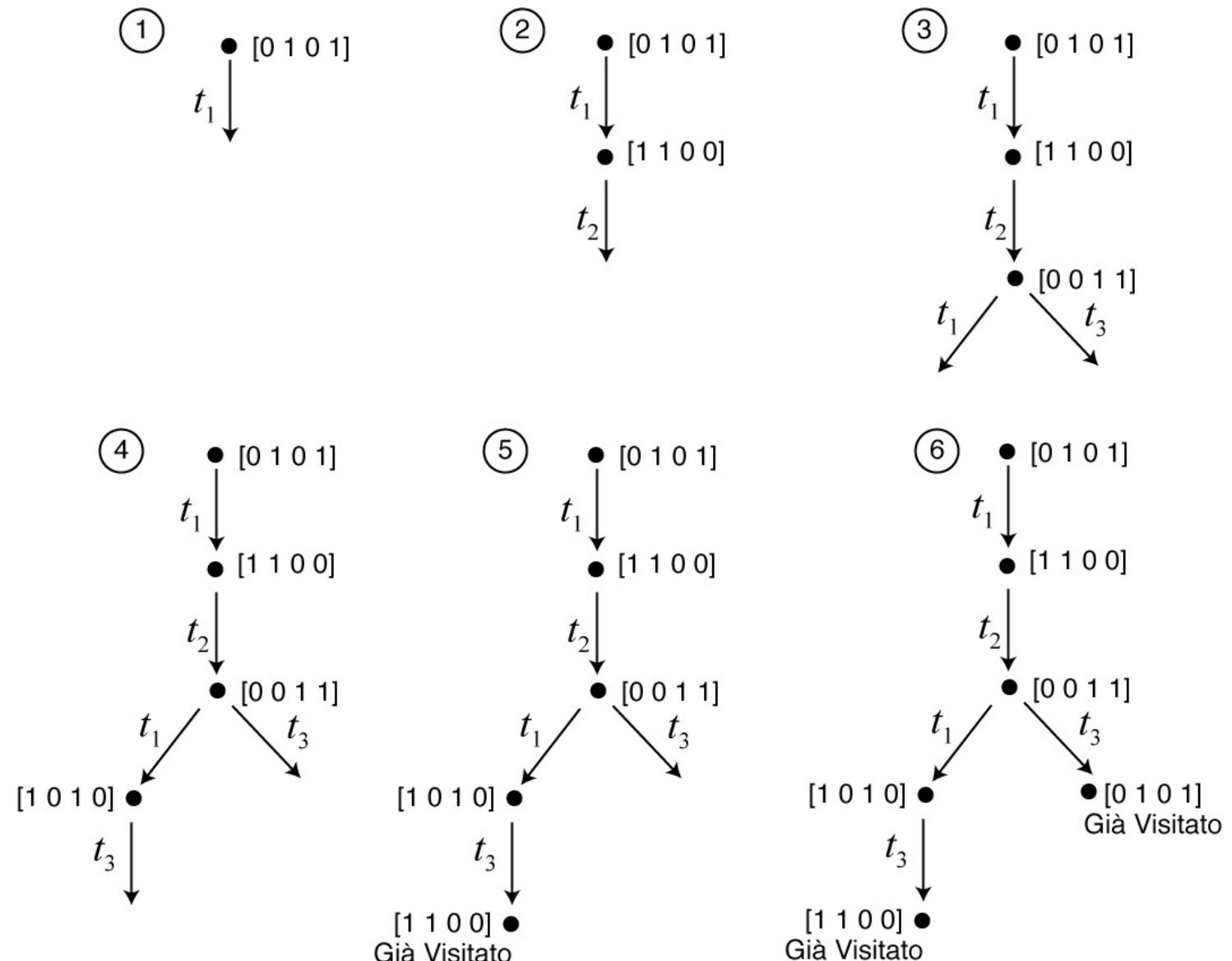
$p_1$  = buffer occupato

$p_2$  = server libero

$p_3$  = server occupato

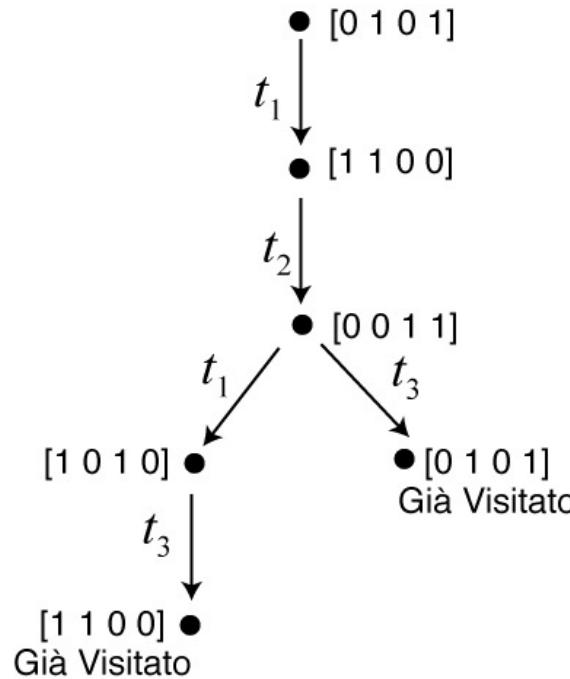
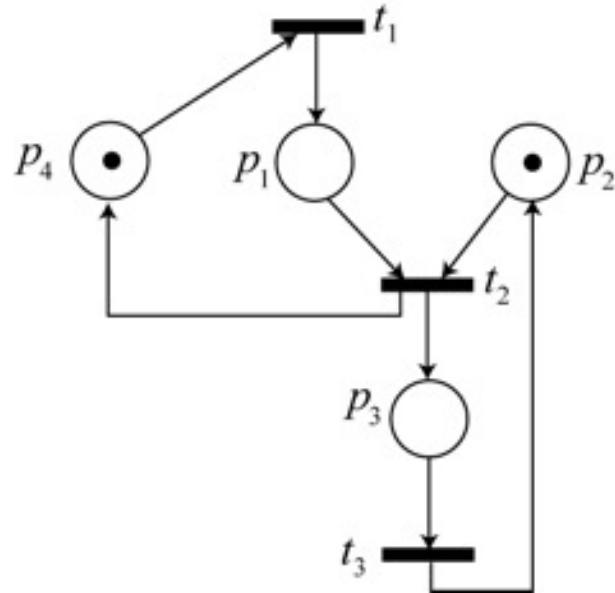
$p_4$  = buffer libero

hp: richieste dal client  
sempre presenti



# Analisi grafica delle reti di Petri

esempio 1 (cont.): sistema client/server con buffer delle richieste a capacità unitaria

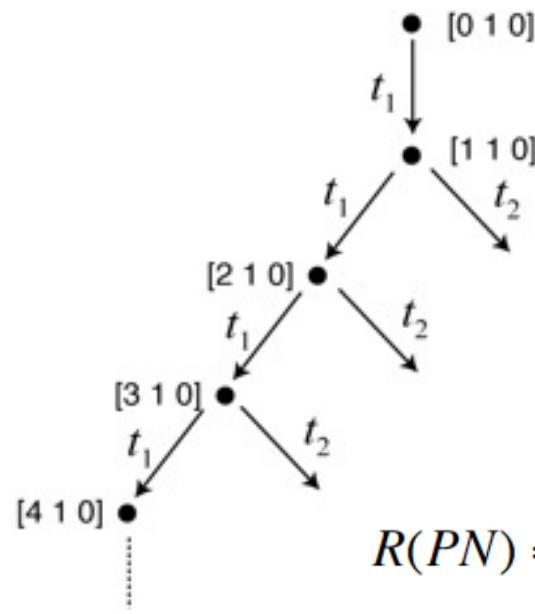
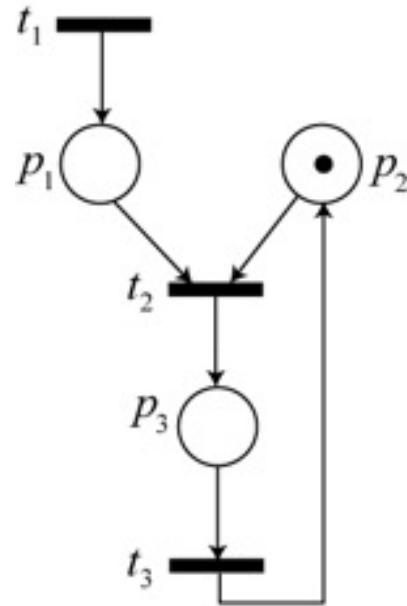


$$R(PN) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- la rete è limitata (in particolare, safe)
- $x_0$  è una foglia e le altre foglie sono marcature da cui si raggiunge  $x_0$   
⇒ la rete è reversibile
- da ogni nodo dell'albero si raggiunge un nodo nel quale possono scattare  $t_1$ ,  $t_2$  o  $t_3$  ⇒ la rete è viva

# Analisi grafica delle reti di Petri

esempio 2: sistema client/server con buffer delle richieste a capacità **illimitata**



$$R(PN) = \left\{ \begin{bmatrix} x(p_1) \\ x(p_2) \\ x(p_3) \end{bmatrix} \in N^3 \text{ tali che } x(p_2) + x(p_3) = 1 \right\}$$

l'insieme di raggiungibilità ha cardinalità infinita, e l'albero di raggiungibilità avrebbe infiniti nodi

- rappresentiamo un numero arbitrariamente grande di token con il simbolo  $\omega$

$$\omega + k = \omega \quad \omega - k = \omega \quad \forall k \in N$$

# Analisi grafica delle reti di Petri

---

Qual è il meccanismo che permette di avere infiniti token in un posto?

- supponiamo che una sequenza di scatti  $S$  porti la rete da  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{x}_2 \dots$
- ... e che la marcatura  $\mathbf{x}_2$  abbia in ogni posto almeno gli stessi token di  $\mathbf{x}_1$  ed esista un posto dove ne ha strettamente di più ( $\mathbf{x}_2$  ricopre  $\mathbf{x}_1$ )
- la sequenza  $S$  sarà quindi nuovamente ammissibile in  $\mathbf{x}_2$  (e così via)
- i posti con più token in  $\mathbf{x}_2$  rispetto a  $\mathbf{x}_1$  ne possono accumulare infiniti

Si utilizza questo meccanismo nella costruzione dell'albero

- siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  due nodi generati nell'albero ( $\mathbf{y}$  generato prima di  $\mathbf{x}$ )
- $\mathbf{x}$  ricopre  $\mathbf{y}$  se
  - ➔  $x(p_i) \geq y(p_i)$  per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, |P|\}$
  - ➔  $x(p_j) > y(p_j)$  per almeno un  $j \in \{1, 2, \dots, |P|\}$
- si sostituisce il simbolo  $\omega$  alla marcatura dei posti per cui  $x(p_j) > y(p_j)$
- si continua poi con la costruzione classica

# Analisi grafica delle reti di Petri

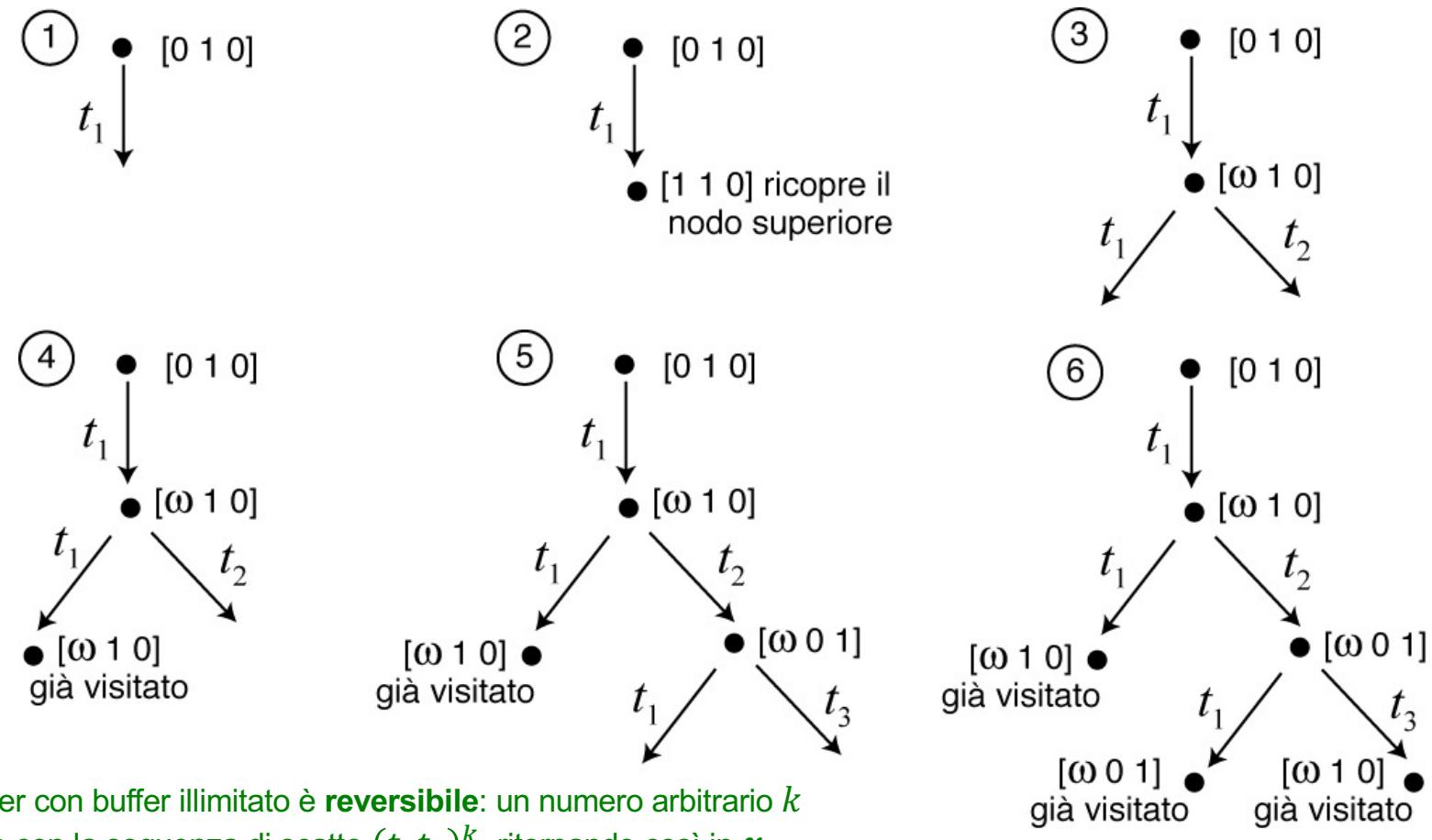
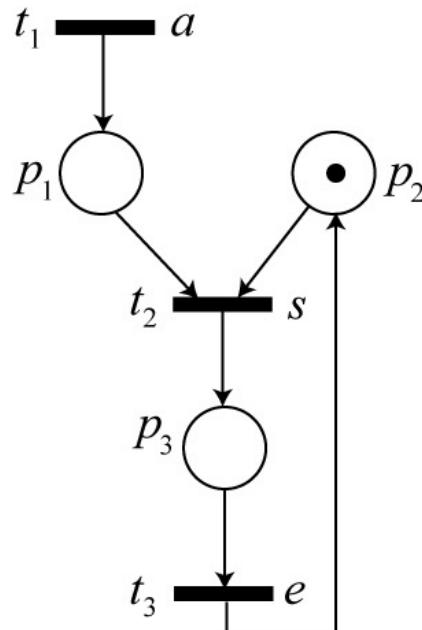
Un albero che contiene il simbolo  $\omega$  è detto albero di copertura

- rappresenta una rete illimitata
- ha un numero finito di nodi
- i posti con marcatura  $\omega$  sono posti illimitati



raggiungibilità di marcature e reversibilità della rete vanno analizzate con molta cautela...

esempio 2 (cont.)



➡ la rete del sistema client-server con buffer illimitato è **reversibile**: un numero arbitrario  $k$  di token in  $p_1$  si può eliminare con la sequenza di scatto  $(t_2 t_3)^k$ , ritornando così in  $x_0$

# Analisi matriciale delle reti di Petri

Per lo studio di varie proprietà strutturali di una rete di Petri  $PN$  si usa anche la rappresentazione matriciale  $(I, O)$  e l'equazione  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{Cs}$

Studio della conservatività della rete

- esiste un insieme di posti tali che la somma pesata dei token rimanga costante in tutte le marcature raggiungibili?
- se tale proprietà è soddisfatta, allora esiste un vettore colonna  $\gamma$  con componenti intere e non negative, detto P-invariante tale che

$$\gamma^T \cdot \mathbf{x} = \text{costante } \forall \mathbf{x} \in R(PN) \text{ con } \gamma \in N^{|\mathcal{P}|}, \gamma \neq \mathbf{0}$$

- ricordando l'equazione dinamica si ha

$$\gamma^T \cdot \mathbf{x} = \gamma^T \cdot \mathbf{x}_0, \quad \forall \mathbf{x} \in R(PN)$$

$$\gamma^T \cdot (\mathbf{x}_0 + \mathbf{Cs}) = \gamma^T \cdot \mathbf{x}_0, \quad \forall s \text{ vettore delle occorrenze ammissibili}$$

$$\gamma^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0}^T$$

# Analisi matriciale delle reti di Petri

- un P-invariante si cerca tra le soluzioni (non banali e anche nel dominio più ampio  $Z^{|P|}$ ,  $Z = \{\text{interi relativi}\}$ ) del sistema **lineare**

$$\gamma^T \mathbf{C} = \mathbf{0}^T \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{C}^T \gamma = \mathbf{0}$$

- data la struttura lineare del P-invariante, se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono P-invarianti anche ( $k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2$ ) è un P-invariante (con  $k_1, k_2$  in  $N = \{\text{naturali}\}$ )
- si definisce supporto di un P-invariante  $\gamma$  l'insieme  $|\gamma|$  di posti corrispondenti ad elementi *non nulli* di  $\gamma$
- il supporto è l'insieme dei posti che compaiono nell'equazione di invarianza

$$\gamma^T \mathbf{x} = \gamma^T \mathbf{x}_0$$

- dato un P-invariante  $\gamma$ , sia  $I_\gamma(PN)$  l'insieme delle soluzioni (nel dominio  $N^{|P|}$ ) dell'equazione di invarianza; allora vale la

$$R(PN) \subseteq I_\gamma(PN) \subseteq N^{|P|}$$

ossia tutte le marcature raggiungibili soddisfano anche l'equazione di invarianza

# Analisi matriciale delle reti di Petri

---

un P–invariante è detto

- a supporto minimo se il suo supporto non contiene quello di nessun altro P–invariante
- canonico se il massimo comun divisore dei suoi elementi  $\neq$  zero è pari a 1

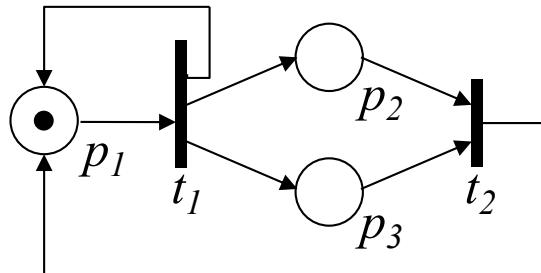
il supporto di un P–invariante **non negativo** (quindi con  $\gamma \in N^{|P|}$ ) indica la presenza di una parte conservativa della rete

- se l'intera rete è “coperta” da P–invarianti non negativi (ossia se ogni posto della rete è nel supporto di almeno un P–invariante  $\in N^{|P|}$ ) la rete è conservativa e pertanto **limitata**

# Analisi matriciale delle reti di Petri

esempio [soluzione della  $C^T \gamma = 0$  con componenti negative]

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

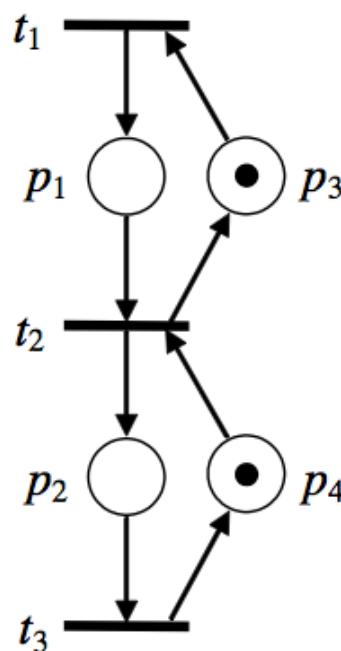


$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^T \cdot C = \mathbf{0}^T \Rightarrow \begin{cases} \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma^T = [0 \ 1 \ -1]$$

**non** è un P-invariante in  $N^3$   
(peraltro la rete è **illimitata!**)

esempio [diversi tipi di P-invarianti]



$$C^T \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 - \gamma_3 \\ -\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4 \\ -\gamma_2 + \gamma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$a \geq 0, b \geq 0$ , interi,

$$a^2 + b^2 > 0$$

$$\gamma_A^T = [1 \ 0 \ 1 \ 0] \quad \text{canonico e con supporto minimo} \quad \|\gamma_A\| = \{p_1, p_3\}$$

$$\gamma_B^T = [0 \ 1 \ 0 \ 1] \quad \text{canonico e con supporto minimo} \quad \|\gamma_B\| = \{p_2, p_4\}$$

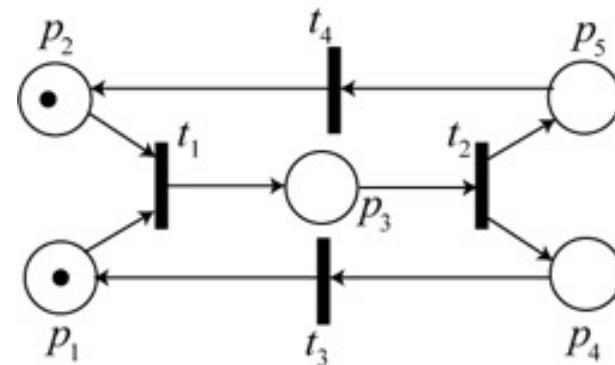
$$\gamma_C^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1] \quad \text{canonico, ma non a supporto minimo}$$

$$\gamma_D^T = [2 \ 0 \ 2 \ 0] \quad \text{a supporto minimo, ma non canonico}$$

# Analisi matriciale delle reti di Petri

esempio [conservatività basata sui P-invarianti]

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

N.B.  $\text{rango}(\mathbf{C}) = 3$   
 $\Rightarrow \dim \text{nullo}(\mathbf{C}^T) = 2$   
 (check con Matlab)

$$\gamma^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0}^T \Rightarrow \begin{cases} -\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ -\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_4 = 0 \\ \gamma_2 - \gamma_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = \gamma_4 \\ \gamma_2 = \gamma_5 \\ \gamma_3 = \gamma_1 + \gamma_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \gamma_A^T = [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0] \\ \gamma_B^T = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1] \end{array}$$

entrambi non negativi

entrambi a supporto minimo e canonici

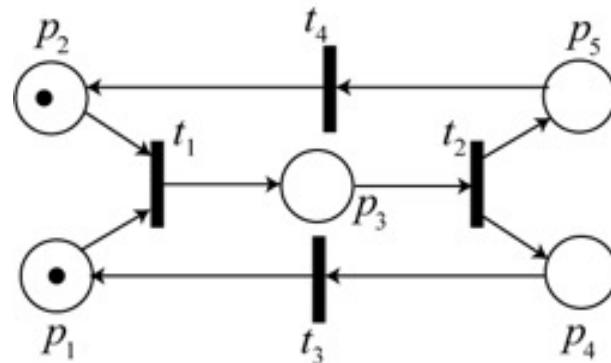
$$\left. \begin{array}{ll} \|\gamma_A\| = \{p_1, p_3, p_4\} & x(p_1) + x(p_3) + x(p_4) = 1 \\ \|\gamma_B\| = \{p_2, p_3, p_5\} & x(p_2) + x(p_3) + x(p_5) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rete conservativa}$$

gli insiemi di supporto degli invarianti  
 non negativi ricoprono  $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$

infatti con  $\gamma^T = [1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1]$   
 $\Rightarrow \gamma^T \mathbf{x} = \gamma^T \mathbf{x}_0 = 2, \quad \forall \mathbf{x} \in R(PN)$

# Analisi matriciale delle reti di Petri

esempio (cont)



$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma_A^T = (1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0) \\ \gamma_B^T = (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1)$$

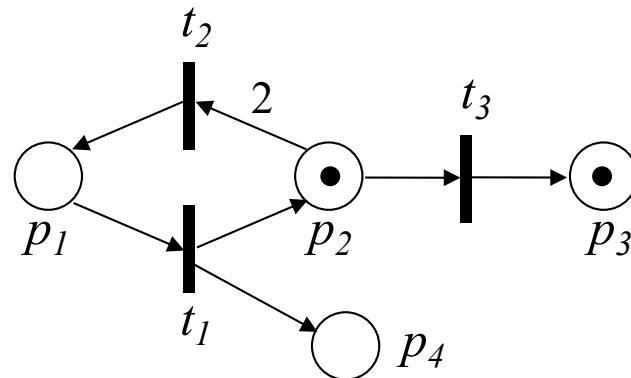
$$\gamma_A^T \mathbf{x} = \gamma_A^T \mathbf{x}_0 = 1 \quad I_{\gamma_A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ * \\ 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ 1 \\ 0 \\ * \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ 0 \\ 1 \\ * \end{pmatrix} \right\}$$

$$I_{\gamma_B} = \left\{ \begin{pmatrix} (*) \\ 1 \\ 0 \\ * \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} (*) \\ 0 \\ 1 \\ * \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} (*) \\ 0 \\ 0 \\ * \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \gamma_B^T \mathbf{x} = \gamma_B^T \mathbf{x}_0 = 1 \\ \text{equazione di invarianza di } \gamma_B$$

$$I_{\gamma_A + \gamma_B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = R(PN)$$

# Analisi matriciale delle reti di Petri

altro esempio



$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N.B.  $\text{rango}(\mathbf{C}) = 3$   
 $\Rightarrow \dim \text{nullo}(\mathbf{C}^T) = 1$

$$\gamma^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0}^T \Rightarrow \begin{cases} -\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_4 = 0 \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 = 0 \\ -\gamma_2 + \gamma_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma^T = [2\alpha \ \alpha \ \alpha \ \alpha] \Rightarrow \gamma^T = [2 \ 1 \ 1 \ 1]$$

P-invariante canonico  
 $\forall \alpha \in N \setminus \{0\}$  è un P-invariante non negativo  
 con supporto (minimo) che copre tutto  $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$   
 $\Rightarrow$  rete conservativa e limitata

equazione di  
 invarianza di  $\gamma$

$$\gamma^T \mathbf{x} = 2x(p_1) + x(p_2) + x(p_3) + x(p_4) = \gamma^T \mathbf{x}_0 = 2$$

↓  
 tutte le marcature  
 soluzione in  $\mathbb{N}^4$

$$I_\gamma(PN) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$R(PN) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset I_\gamma(PN)$$

insieme di raggiungibilità

# Analisi matriciale delle reti di Petri

Studio della possibilità di riportarsi alla condizione iniziale

- esiste una sequenza di scatti  $S$  non vuota che, partendo dalla marcatura iniziale  $\mathbf{x}_0$ , riporta la rete nella marcatura iniziale  $\mathbf{x}_0$ ?
- se esistono, è necessario che queste sequenze  $S$  siano associate ad un vettore delle occorrenze  $\eta$ , detto T-invariante, tale che

$$\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\eta = \mathbf{x}_0$$

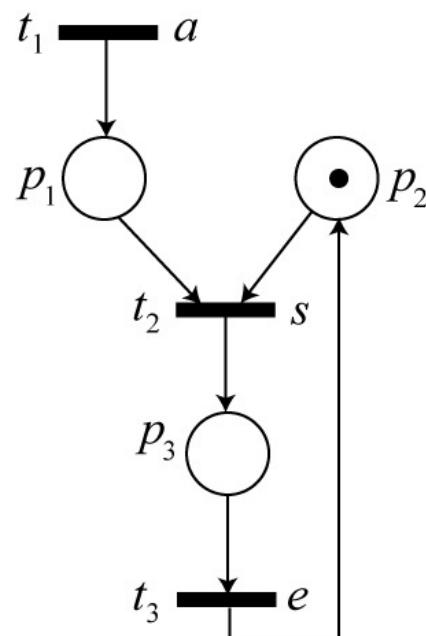
- un T-invariante è una soluzione a componenti intere e non negative, e non banale del sistema lineare (la soluzione banale è non muoversi da  $\mathbf{x}_0$ )

$$\mathbf{C}\eta = \mathbf{0}$$

- un T-invariante è solo un *vettore delle occorrenze*: bisogna però verificare che sia associabile a una *sequenza (ammissibile) di scatti*
- la reversibilità della rete è una condizione più forte (implica poter ritornare allo stato iniziale da *qualunque* stato raggiungibile da  $\mathbf{x}_0$ )

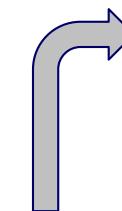
# Analisi matriciale delle reti di Petri

esempio



$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C\eta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \eta_1 - \eta_2 = 0 \\ -\eta_2 + \eta_3 = 0 \Rightarrow \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 \\ \eta_2 - \eta_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \eta = [\alpha \quad \alpha \quad \alpha]^T$$



$$\eta = (1 \ 1 \ 1)^T$$

vettore delle occorrenze per le sequenze di transizioni

unica  
sequenza di scatto ammissibile

$t_1 t_2 t_3$   
 $t_1 t_3 t_2$   
 $t_2 t_1 t_3$   
 $t_2 t_3 t_1$   
 $t_3 t_1 t_2$   
 $t_3 t_2 t_1$

⇒ eseguendo un numero di servizi (s,e) pari al numero delle richieste a il sistema ritorna nella condizione iniziale con buffer vuoto e server libero

## □ reti di Petri temporizzate

Per introdurre utili informazioni temporali, si introduce una **struttura di clock**  $\mathbf{v}_j$  per la generica **transizione**  $t_j$

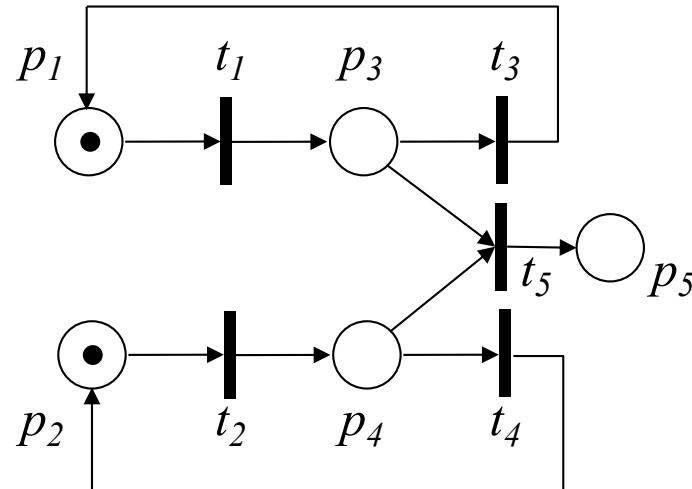
$$\mathbf{v}_j = \{v_{j,1}, v_{j,2}, \dots, v_{j,k}, \dots\} \quad \text{con } v_{j,k} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Una rete di Petri temporizzata  $TPN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0, \mathbf{V})$  è una rete di Petri  $PN$  con una struttura di clock  $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_j \text{ tale che } t_j \in T_D\}$

- ⇒ insieme  $T$  partizionato in transizioni temporizzate ( $T_D$ ) e non ( $T_O$ )
- ⇒ alla  $k$ -esima abilitazione, la transizione  $t_j \in T_D$ , scatta dopo  $v_{j,k}$  unità di tempo
- ⇒ [ $k=1$ ] la transizione è un'attività che richiede un tempo  $v_j$  per essere completata
- ⇒ [ $k=1$ ] evoluzione tipica per una transizione  $t_j$  abilitata all'istante  $\tau$ 
  - in  $\tau$ : token *tolti* dai posti d'ingresso di  $t_j$
  - in  $\tau + v_j$ : token *messi* nei posti d'uscita di  $t_j$
- ⇒ **varianti**: le durate possono avere una distribuzione di probabilità (rete **stocastica**); i **posti** possono essere temporizzati (come o invece delle transizioni); si possono definire degli **intervalli** di tempo  $[v_{j,min}, v_{j,max}]$  ammissibili per l'attivazione, ...
- ⇒ per transizioni temporizzate in conflitto **effettivo**, ci possono essere diverse **regole** (ad esempio,  $[*] =$  scatta quella associata ad un'unità di tempo  $v_j$  minore)

# Uso della temporizzazione

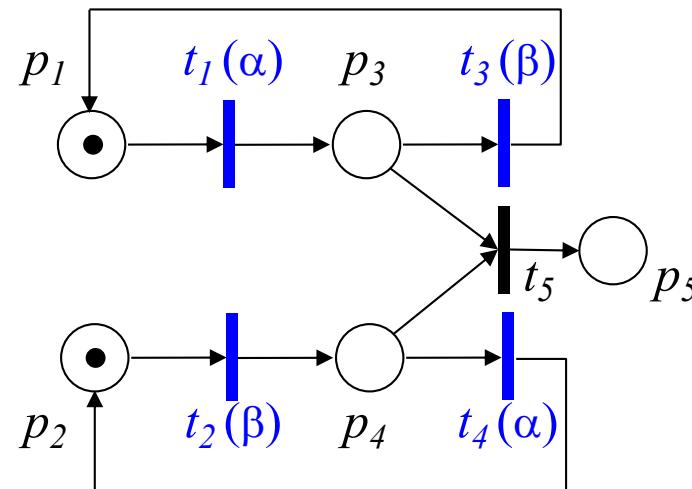
esempio: questa rete di Petri (ordinaria) può raggiungere una situazione di deadlock



$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R(PN) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

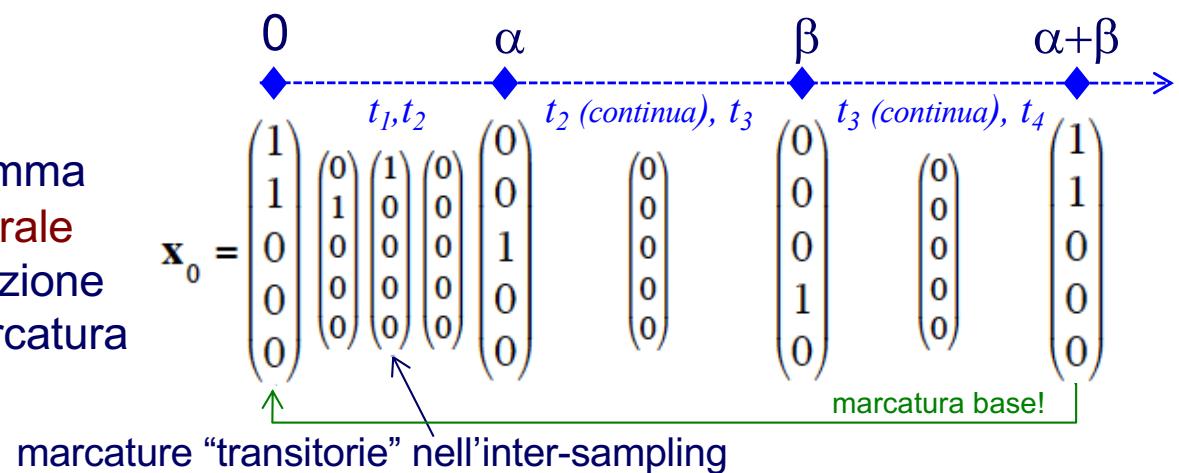
al primo scatto della transizione  $t_5$  (il conflitto con  $t_3$  e  $t_4$  viene risolto con scelta **casuale**), la rete raggiunge la marcatura  $\mathbf{x}_{\text{dead}} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$  dove **si blocca**

temporizzando in modo opportuno le transizioni, la TPN evita tale situazione e evolve in modo **univoco** e **senza blocco** (e la marcatura iniziale sarà **reversibile**)



$$\mathbf{V} = \{v_1 = v_4 = \alpha, v_2 = v_3 = \beta\} \quad \text{con arbitrari } \beta > \alpha > 0$$

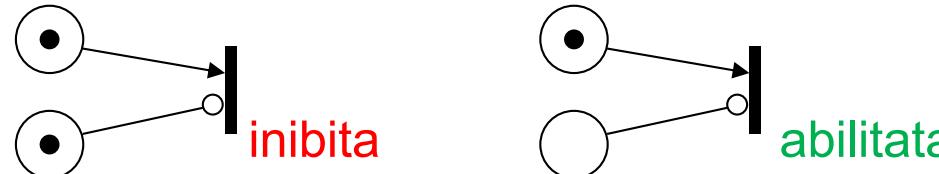
diagramma temporale di evoluzione della marcatura



# Estensioni delle reti di Petri

## □ altre estensioni (ad alto livello)

- si può distinguere la tipologia dei token (diverse informazioni/colore per ogni tipo)  
⇒ reti di Petri **colorate**
- si possono introdurre altre condizioni logiche per lo scatto delle transizioni  
⇒ ad esempio, con archi **inibitori** (la presenza di un token nel posto di ingresso collegato con un tale arco ad una transizione la disabilita comunque)



- si possono aggiungere vincoli di **capacità** su uno o più posti
  - si possono aggiungere limiti sul **numero di scatti** totale di una o più transizioni
  - ...
- 
- il **vantaggio** comune a queste estensioni è quello di ottenere maggiore espressività (e compattezza) della rete usata come modello di un DEDS
  - il **limite** comune è la maggiore difficoltà o impossibilità di verificare le proprietà della rete con metodi analitici (lo strumento della **simulazione** diventa essenziale)

Per rappresentare un sistema fisico guidato da eventi mediante una rete di Petri si possono seguire due possibili approcci, eventualmente combinati

## □ approccio fisico

- ➔ si suddivide il sistema in sottosistemi elementari
- ➔ si modellano tali sottosistemi con reti di Petri elementari
- ➔ si compongono tali reti elementari

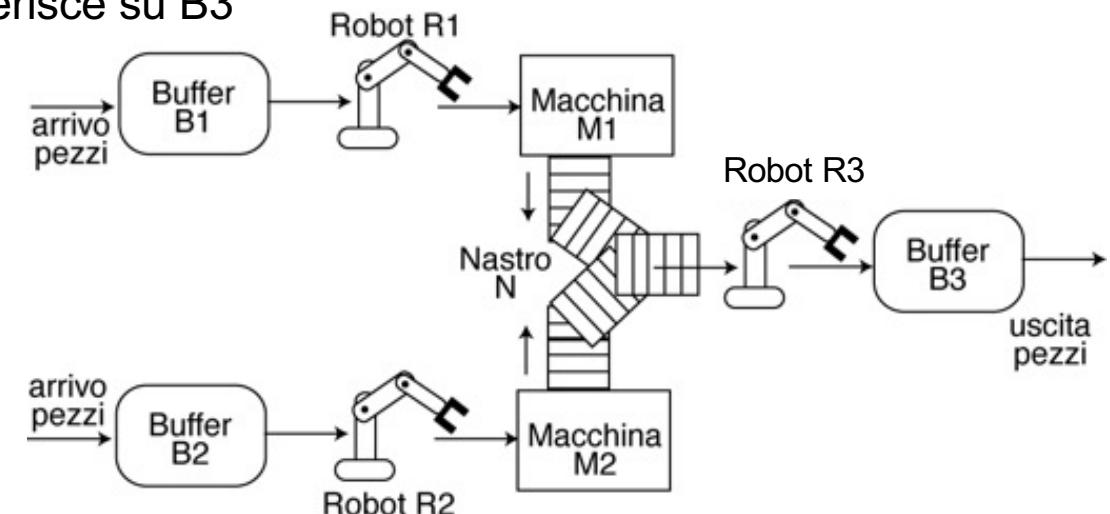
## □ approccio funzionale

- ➔ si individuano le fasi logiche del funzionamento del sistema
- ➔ si identificano le risorse fisiche che eseguono tali fasi
- ➔ si allocano le fasi sulle risorse

# Modellistica con reti di Petri

esempio: impianto di produzione e movimentazione composto da

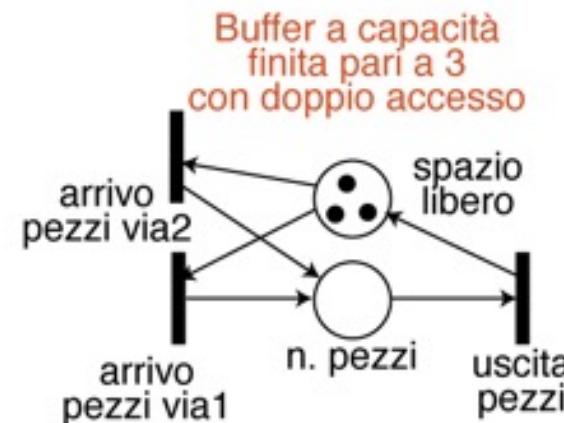
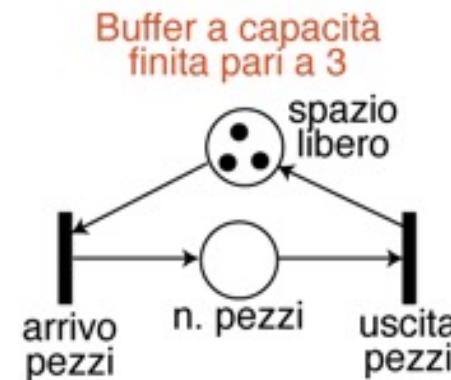
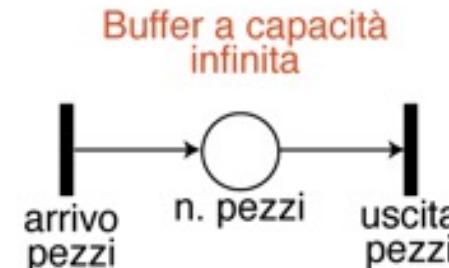
- tre magazzini di capacità infinita (B1, B2, B3)
- tre robot per il trasporto dei pezzi (R1, R2, R3)
- un nastro trasportatore di capacità pari a 3 (N)
- due macchine utensili che possono lavorare un pezzo alla volta (M1, M2)
- fasi del processo di lavorazione
  - ➔ i pezzi arrivano spontaneamente in B1 e B2
  - ➔ R1 preleva un pezzo alla volta da B1 e lo trasferisce su M1
  - ➔ R2 preleva un pezzo alla volta da B2 e lo trasferisce su M2
  - ➔ a lavorazione terminata M1 deposita il pezzo su N
  - ➔ a lavorazione terminata M2 deposita il pezzo su N
  - ➔ R3 preleva un pezzo alla volta da N e lo trasferisce su B3
  - ➔ i pezzi escono spontaneamente da B3



# Modellistica fisica con reti di Petri

I componenti possono essere classificati come

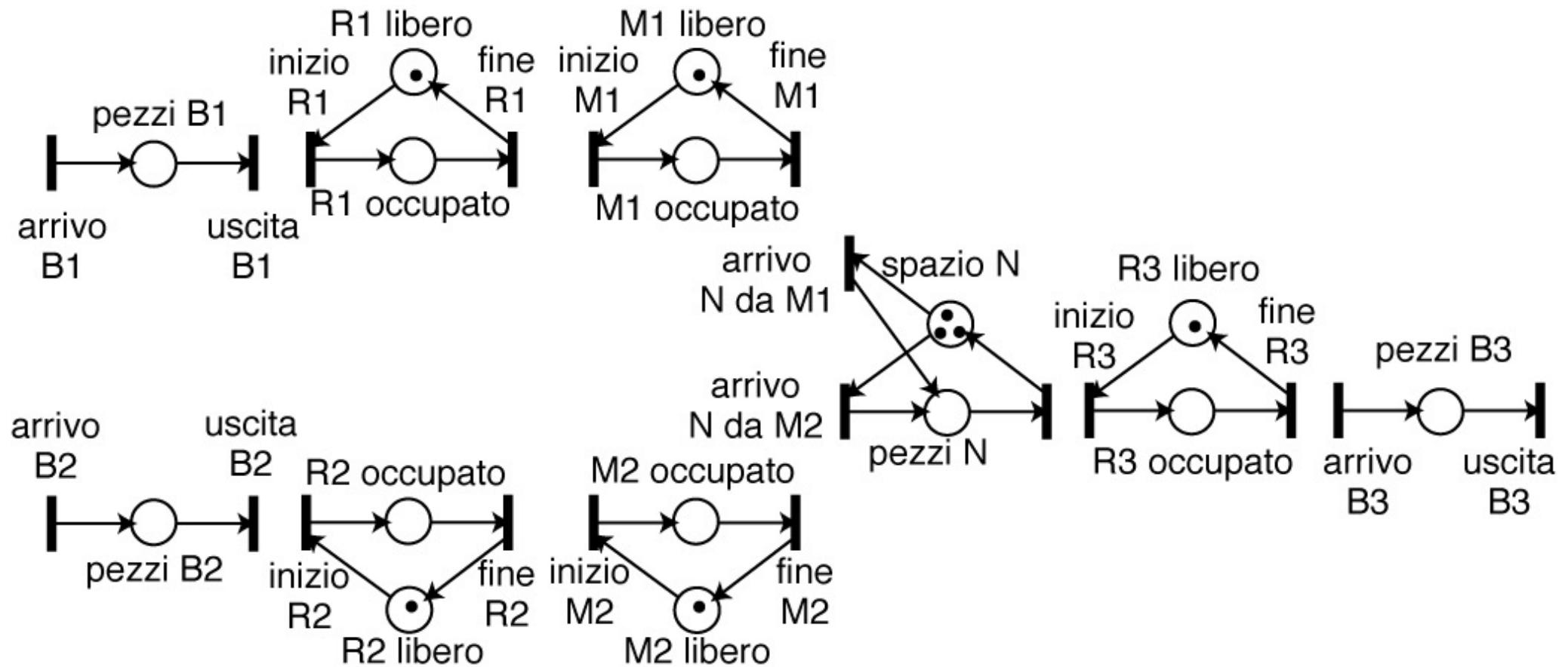
- risorse: eseguono una fase di lavorazione
  - capacità: numero di lavorazioni in parallelo
- buffer: contengono un sottoprodotto di una fase di lavorazione
  - capacità: numero di sottoprodotti che possono essere contenuti



# Modellistica fisica con reti di Petri

nell'esempio

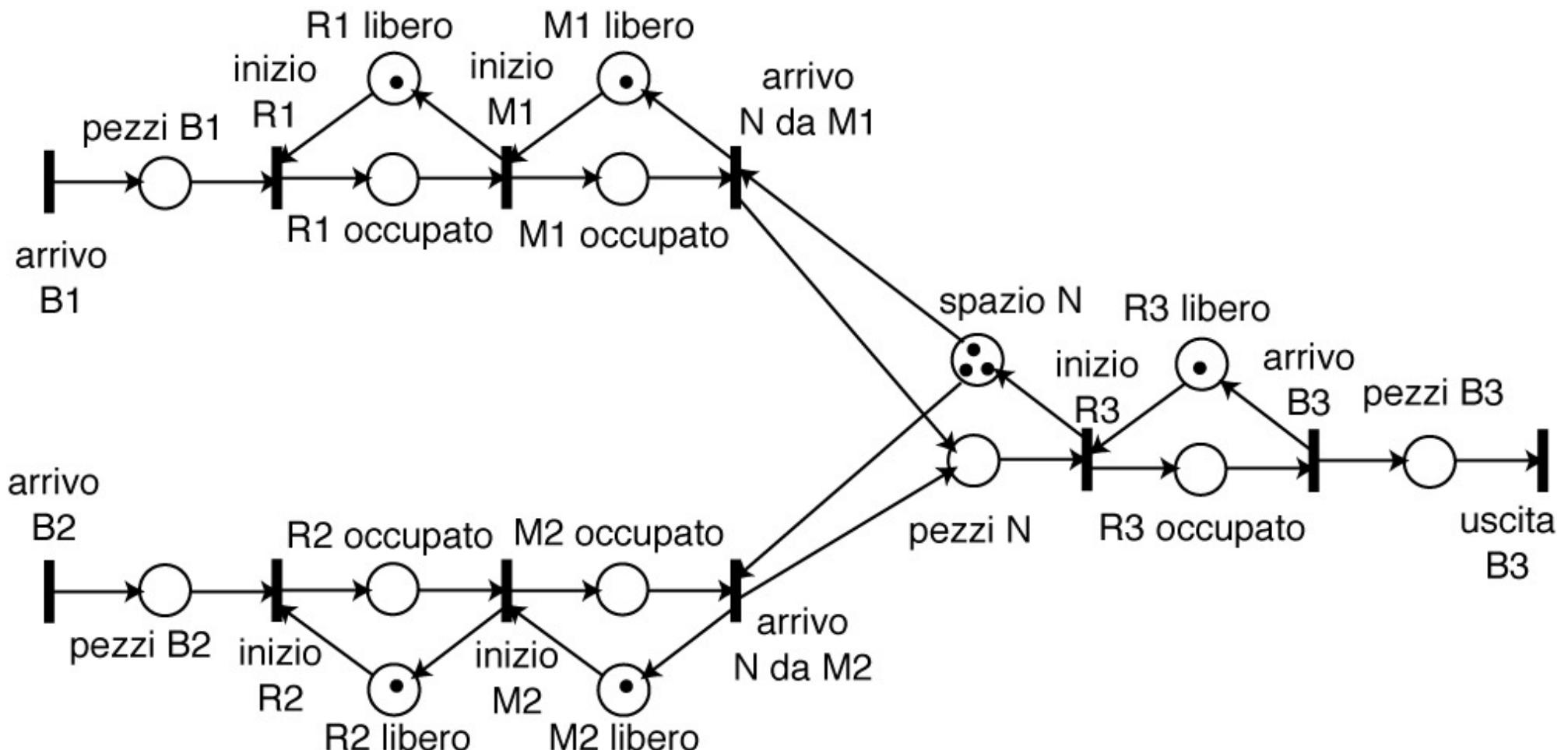
- B1, B2, B3: buffer illimitati
- N: buffer con capacità 3 a due vie di accesso
- M1, M2, R1, R2, R3: risorse a lavorazione singola



# Modellistica fisica con reti di Petri

Come si possono comporre reti di Petri elementari?

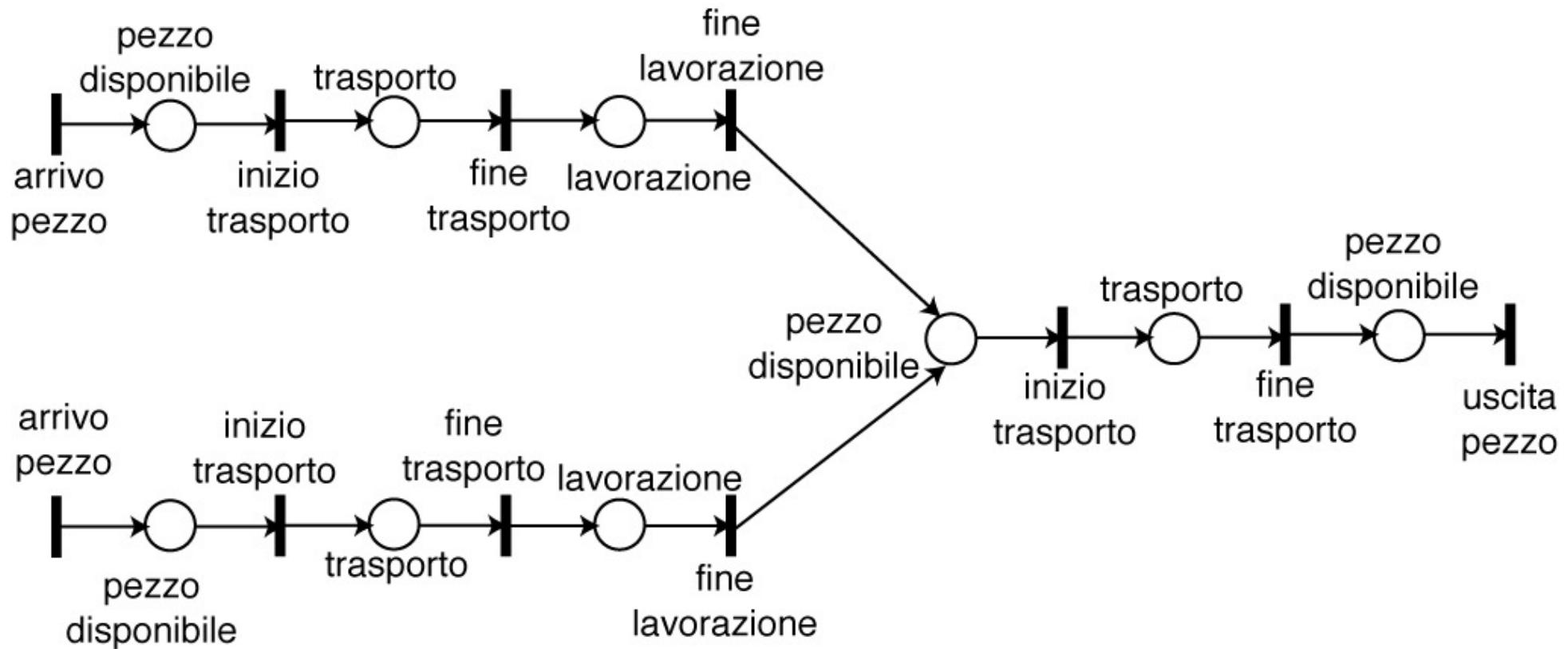
- facendo coincidere le transizioni
- esempio: la transizione di uscita dei pezzi dal buffer B1 coincide con la transizione di inizio lavoro di R1



# Modellistica funzionale con reti di Petri

Come si possono rappresentare le fasi logiche di lavorazione?

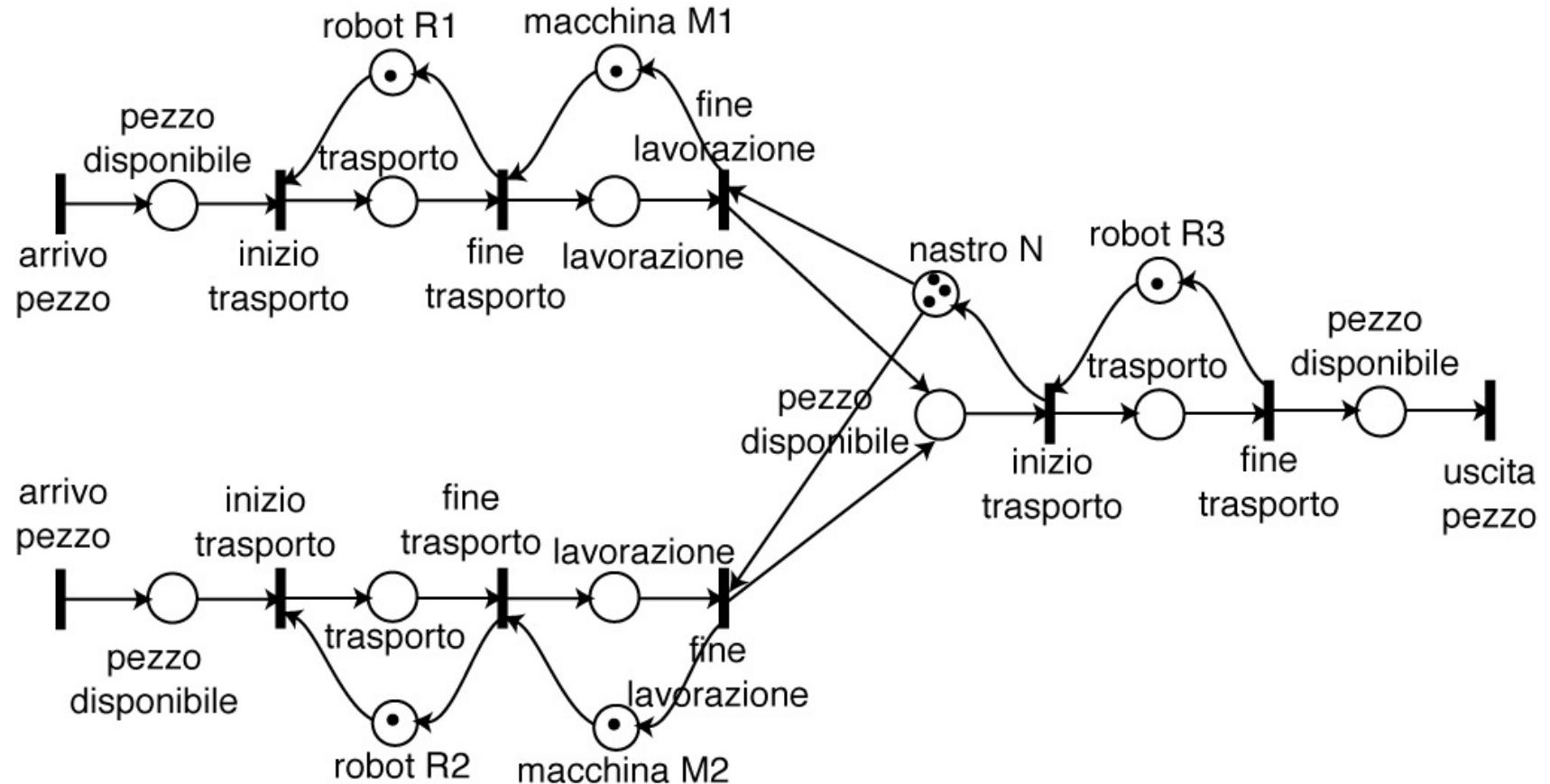
- sequenza di posti/transizioni
- un token in un posto indica la fase che si sta eseguendo



# Modellistica funzionale con reti di Petri

Come si possono rappresentare le risorse?

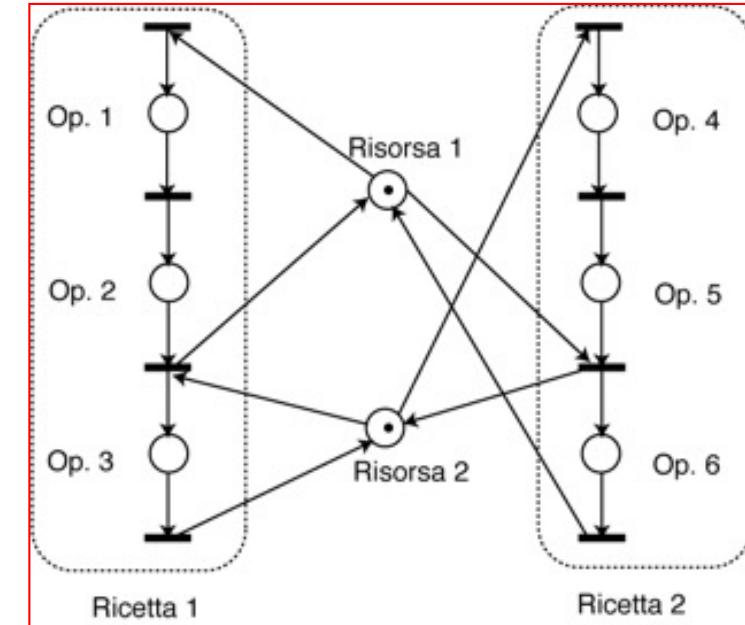
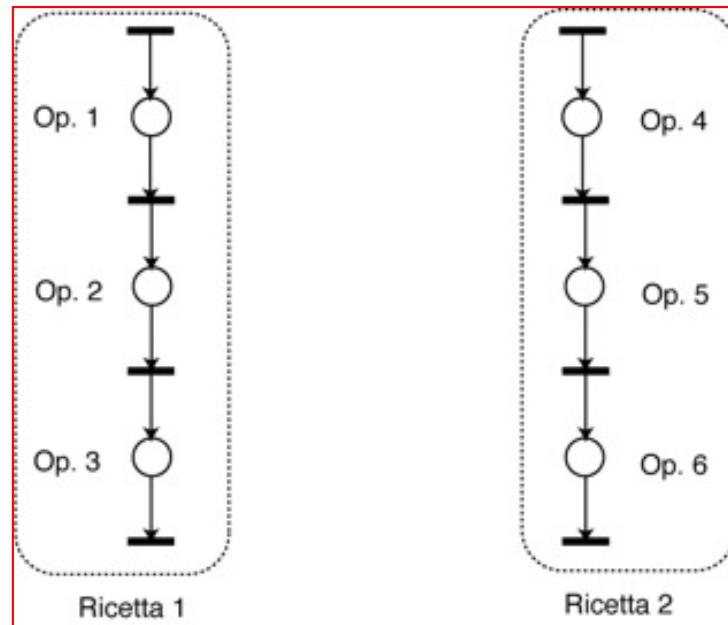
- un posto collegato alle transizioni di inizio/fine della fase di lavorazione
- il numero di token nel posto indica la capacità complessiva di lavorazione
- posti con infiniti token possono essere eliminati (capacità infinita)
- assenza di token indica l'impossibilità di compiere la lavorazione



# Modellistica funzionale con reti di Petri

Utili per la modellistica di **Flexible Manufacturing Systems (FMS)**

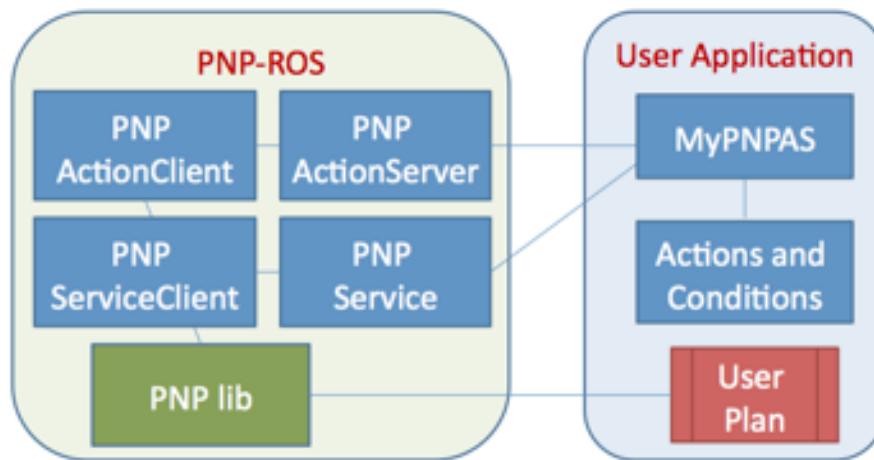
- più lavorazioni (dette anche ricette) possibili
- condivisione di risorse
- esempio
  - ➔ ricetta 1: sequenza di operazioni Op1-Op2-Op3
  - ➔ ricetta 2: sequenza di operazioni Op4-Op5-Op6
  - ➔ risorsa 1: utilizzata per eseguire la serie Op1-Op2 e Op6
  - ➔ risorsa 2: utilizzata per eseguire Op3 e la serie Op4-Op5



# Pianificatore di azioni basato su reti di Petri

Usato dal team multi-robot SPQR del DIAG nell'ambito delle competizioni RoboCup

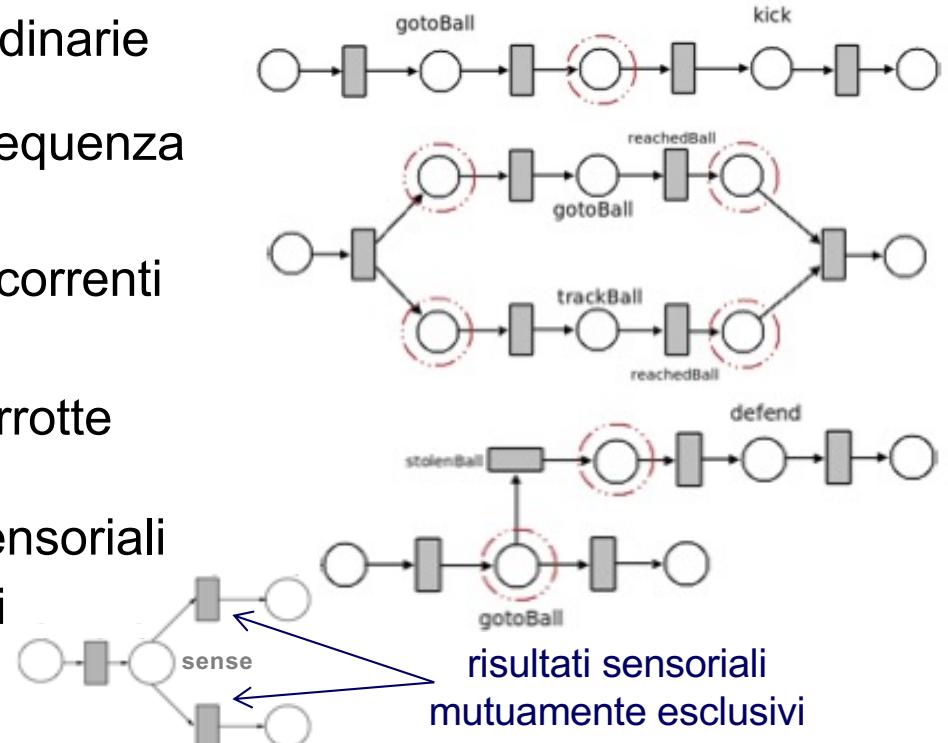
- per gestire informazioni sensoriali che **condizionano** l'esecuzione distribuita (con più agenti) di azioni complesse di alto livello
- azioni non istantanee, concorrenti e con possibilità di fallimento/interruzione
- strumento intuitivo da interpretare, per il debug dei comportamenti e la loro analisi (assenza di deadlock, raggiungibilità di una marcatura destinazione = “goal”)



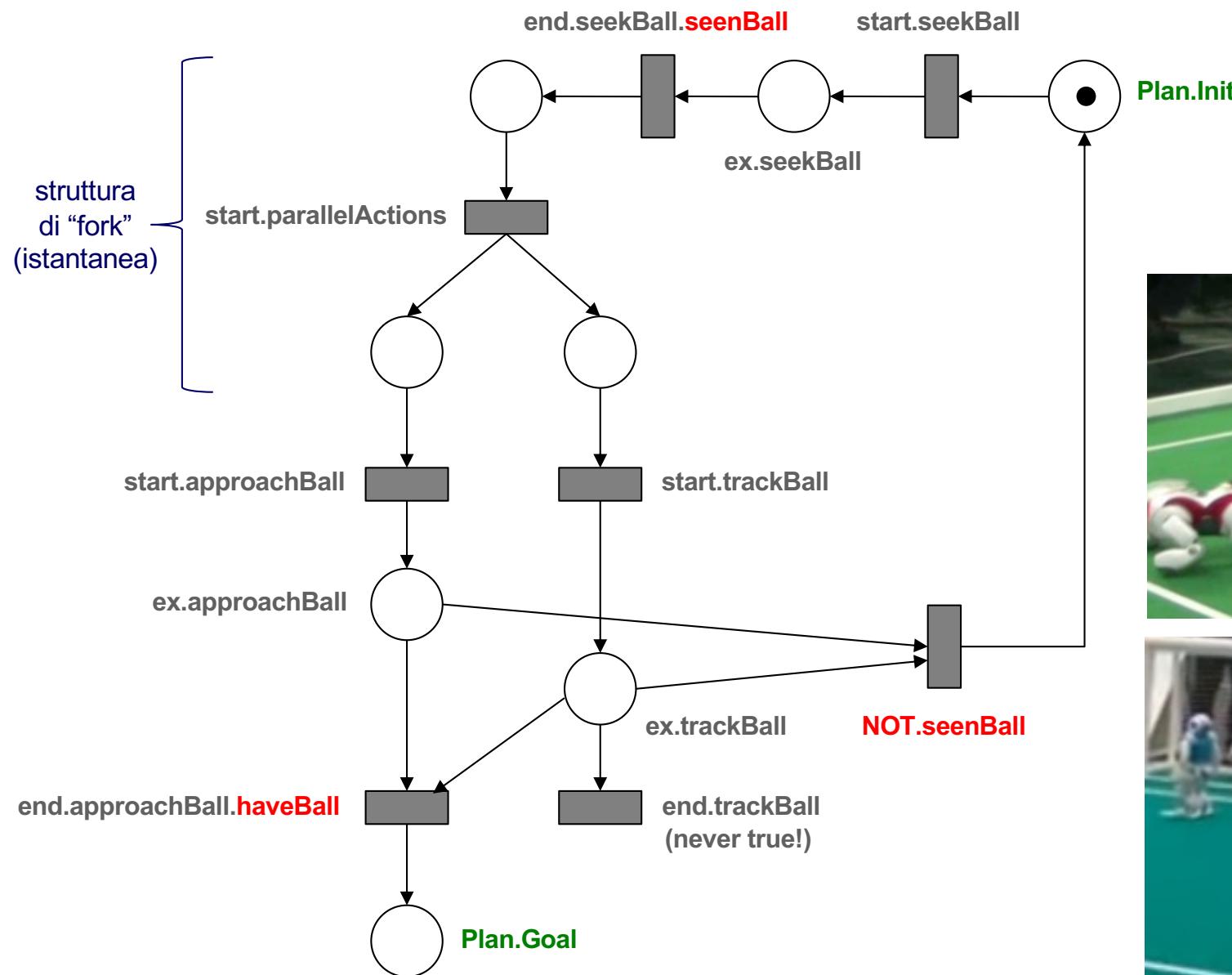
implementazione  
effettiva in ROS

PNP = Petri Net Planner

- azioni ordinarie
  - ✧ in sequenza
  - ✧ concorrenti
  - ✧ interrotte
- azioni sensoriali
- operatori



# Esempio di PN Planner



# Controllo delle reti di Petri

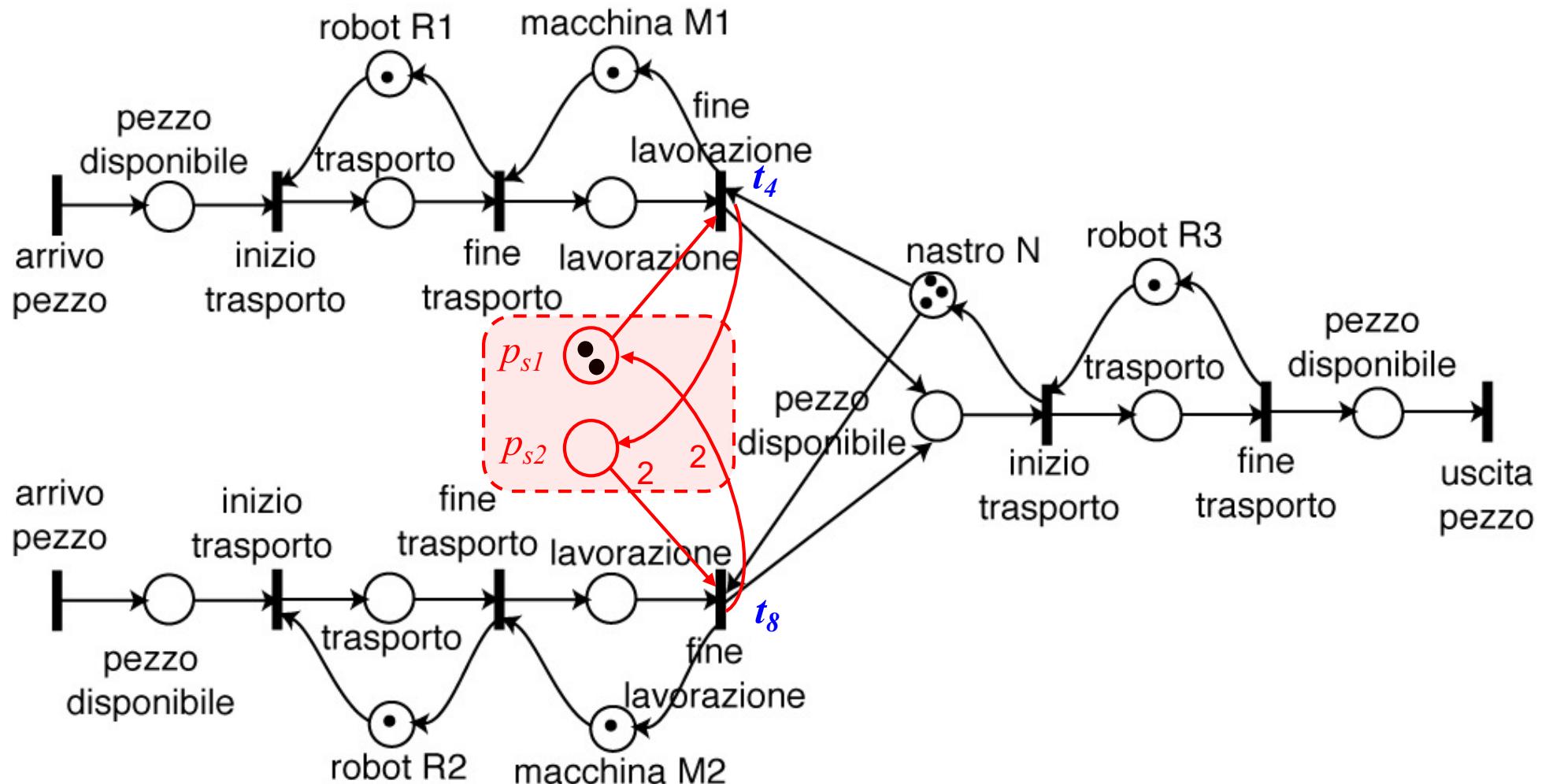
---

- una rete di Petri può inglobare una struttura di controllo dell'evoluzione del sistema che agisce in base alla marcatura corrente (in **feedback**)
- la struttura di controllo è essa stessa esprimibile come una sotto-rete di Petri, seguendo uno dei paradigmi di progetto del **supervisore** per i DEDS
- si **registrano** alcuni eventi del sistema e, in base a questa informazione/misura, si **comandano** altri eventi ammissibili e se ne **disabilitano** altri
- scenario più complesso quando gli eventi non sono tutti “osservabili” (registrabili dal supervisore) e/o non sono tutti “controllabili” (comandabili dal supervisore)
- due tipici problemi di controllo di una PN
  - ➔ **problema degli stati proibiti:** per evitare una collisione su risorse condivise, alcune marcature vanno rese non ammissibili
  - ➔ **problema delle specifiche mutuamente esclusive:** per soddisfare i limiti di capacità del sistema, vanno imposti dei vincoli sulle marcature raggiungibili durante tutta l'evoluzione della rete
- approcci al progetto del supervisore (con hp: osservabilità/controllabilità delle transizioni)
  - ➔ mediante l'aggiunta diretta di **posti di controllo  $P^c$**  opportunamente marcati
  - ➔ basato sull'analisi di **P-invarianti** modificati (usando **posti monitor  $P^m$** )

# Uso dei posti di controllo

esempio (reprise): impianto di produzione e movimentazione

- si vogliono posizionare sul nastro di uscita, in maniera sequenziale e ripetitiva, due pezzi lavorati dalla macchina M1 seguiti da un pezzo lavorato dalla macchina M2
- **PN originale:** 15 posti, 11 transizioni; **PN supervisore con 2 posti di controllo**



# Controllo mediante invarianti

- si assume che il comportamento desiderato (specifiche mutuamente esclusive) sia descritto da vincoli, nella forma di **disequazioni lineari** sulle marcature del tipo

$$h^T \mathbf{x} \leq k \quad \text{con} \quad h \in Z^{|\mathcal{P}|}, \quad k \in N \quad (\text{vedi anche nota})$$

- l'insieme delle marcature **ammissibili** sarà solo una parte di quelle raggiungibili

$$M(PN) = \left\{ \mathbf{x} \in N^{|\mathcal{P}|} \text{ tale che } h^T \mathbf{x} \leq k \right\} \cap R(PN)$$

- tipiche situazioni modellate

- i posti  $p_i, p_j$  e  $p_l$  rappresentano tre operazioni che usano la stessa risorsa

$$x(p_i) + x(p_j) + x(p_l) \leq 1$$

- due posti  $p_i$  e  $p_j$  sono buffer che devono contenere lo stesso numero di pezzi

$$x(p_i) = x(p_j) \Leftrightarrow x(p_i) - x(p_j) \leq 0 \cap x(p_j) - x(p_i) \leq 0$$

quindi le componenti del vettore  $h$  possono anche essere degli interi negativi

- in generale, ci saranno  $q$  disequazioni che le marcature ammissibili dovranno soddisfare contemporaneamente

$$h_i^T \mathbf{x} \leq k_i \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \dots, q$$

**nota:** in alcuni casi potrebbe essere  $k_i \in Z$  (e non ristretto  $\in N$ ): ad esempio, se si proviene da un **lower bound** si avrà  $h_i^T \mathbf{x} \geq c_i \geq 0 \Rightarrow -h_i^T \mathbf{x} \leq -c_i =: k_i \leq 0$ ; le disequazioni lineari del problema devono formare un insieme **convesso**

# Controllo mediante invarianti

- consideriamo prima il caso in cui tutte le transizioni siano **controllabili**: si possono inserire archi in ingresso a qualsiasi transizione (che partiranno da posti aggiunti ...)
- per soddisfare il generico vincolo  $i$ -esimo, si introduce un **posto monitor**  $p_i^m$  che aggiunge la **riga**

$$C_i^m = -h_i^T C$$

alla matrice di incidenza  $C$  originale della rete, e a cui si dà la **marcatura iniziale**

$$x_0(p_i^m) = k_i - h_i^T x_0$$

- l'informazione nel vettore riga  $C_i^m$  permette di collegare il posto monitor  $p_i^m$  alle transizioni della rete (per costruzione, il posto monitor non è mai in un autoanello)
- fatte queste operazioni per tutti i  $q$  vincoli, si ha una matrice di incidenza estesa  $C_e$  con  $q$  righe aggiunte, relative ai posti monitor
  - ⇒ i **P-invarianti preesistenti** si conservano nella forma “embedded”  $\gamma_e^T = [\gamma^T \quad 0^T]$

$$C_e = \begin{bmatrix} C \\ -H^T C \end{bmatrix} \quad H = [h_1 \quad \cdots \quad h_q] \quad \gamma^T C = 0^T \quad \Rightarrow \quad \gamma_e^T C_e = 0^T$$

- ⇒ esistono  $q$  **nuovi P-invarianti** indipendenti della forma (l'1 è al posto  $i$ -esimo,  $i = 1, \dots, q$ )

$$\gamma_{e,i}^T = [h_i^T \quad 0 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 0] \quad \Rightarrow \quad \gamma_{e,i}^T C_e = h_i^T C - h_i^T C = 0^T$$

# Controllo mediante invarianti

- le relative *equazioni di invarianza* implicano che ogni marcatura raggiungibile della rete controllata soddisfa tutti i vincoli del problema (quindi risulta ammisible) **se e solo se** la marcatura iniziale  $\mathbf{x}_0$  è ammisible (allora è anche  $x_0(p_i^m) \geq 0$ )

► dimostrazione

$$\mathbf{x}_{e,0} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_0^m \end{pmatrix} = \left( \mathbf{k} - H^T \mathbf{x}_0 \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ k_1 - h_1^T \mathbf{x}_0 \\ \vdots \\ k_q - h_q^T \mathbf{x}_0 \end{pmatrix}$$

$$\forall \mathbf{x}'_e \in R(PN_e) \implies \mathbf{x}'_e = \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{x}'(p^m) \end{pmatrix} = \mathbf{x}_{e,0} + C_e \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_0^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C \\ -H^T C \end{pmatrix} \mathbf{s}$$

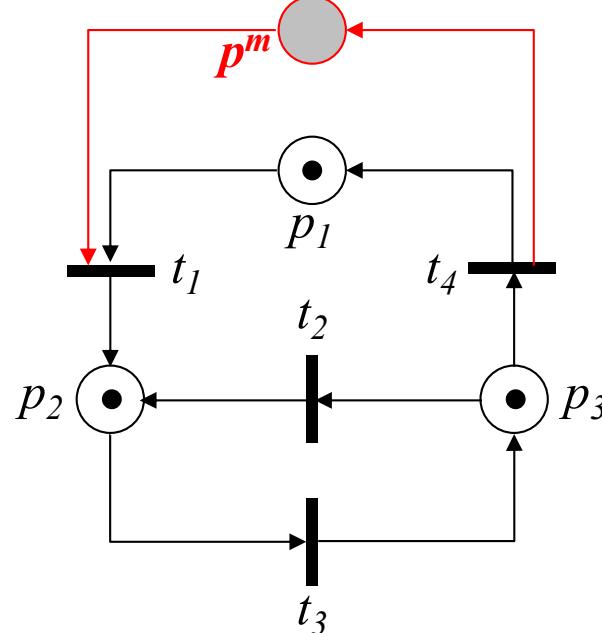
utilizzando i nuovi P-invarianti (per  $i = 1, \dots, q$ )

$$\begin{aligned} \gamma_{e,i}^T \mathbf{x}'_e &= \gamma_{e,i}^T (\mathbf{x}_{e,0} + C_e \mathbf{s}) = \gamma_{e,i}^T \mathbf{x}_{e,0} = (h_i^T \quad 0 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 0) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{k} - H^T \mathbf{x}_0 \end{pmatrix} \\ &= h_i^T \mathbf{x}_0 + k_i - h_i^T \mathbf{x}_0 = k_i \end{aligned} \quad \boxed{h_i^T \mathbf{x}' \leq k_i}$$
$$\gamma_{e,i}^T \mathbf{x}'_e = h_i^T \mathbf{x}' + x'(p_i^m) \geq h_i^T \mathbf{x}'$$

# Uso dei posti monitor

esempio

- alla PN in figura (3 posti, 4 transizioni) si vuole imporre il vincolo  $x(p_2) + x(p_3) \leq 2$  tramite un **supervisore** con **1 posto monitor**



$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

la marcatura iniziale soddisfa il vincolo

$$R(PN) = \left\{ \underbrace{\left( \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 3 \end{array} \right)}_{\text{queste marcature raggiungibili}}; \underbrace{\left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right)}_{\text{non sono ammissibili per il vincolo}} \right\}$$

queste marcature raggiungibili  
non sono ammissibili per il vincolo

$$h^T x = [0 \ 1 \ 1] \cdot x \leq 2 = k \quad \text{vincolo}$$

l'assenza di marca iniziale nel posto monitor  
disabilita la  $t_1$  finché non scatta  $t_4$

$$C^m = -h^T C = [-1 \ 0 \ 0 \ 1]$$
$$x_0^m = k - h^T x_0 = 2 - 2 = 0$$

equazioni  
di progetto  
del monitor

# Controllo mediante invarianti

- nel caso in cui ci siano transizioni **non controllabili** (un sottoinsieme  $T_{uc}$  di  $T$ ) occorre verificare che nel precedente progetto *ciascun* posto monitor del supervisore non disabiliti *nessuna* transizione non controllabile, ossia

$$x(p_i^m) \geq w(p_i^m, t_j) \quad \forall t_j \in T_{uc}$$

- una condizione **sufficiente** affinché ciò sia vero è che *nessuna* delle transizioni non controllabili abbia posti monitor in ingresso

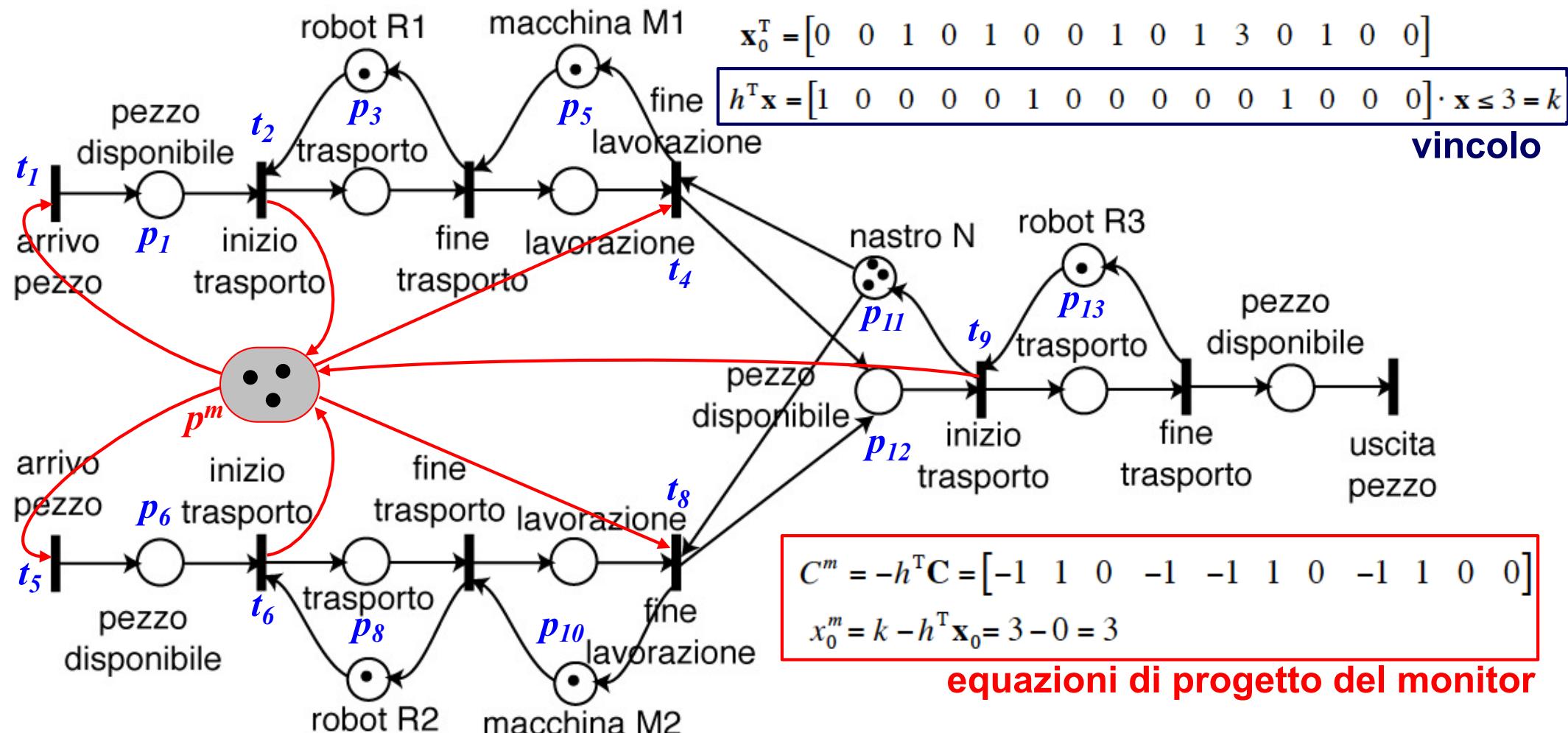
$$\forall t_j \in T_{uc} \Rightarrow p_i^m \notin I(t_j), \quad i = 1, 2, \dots, q$$

- se alcuni vincoli risultano non ammissibili a causa dell'ipotesi di non controllabilità, esistono allora metodi per definire supervisori aventi monitor approssimati o sub-ottimi...
- in maniera duale, se esistono transizioni **non osservabili**  $\Rightarrow$  non ci possono essere archi da queste transizioni a posti monitor ...
- oltre all'aggiunta di posti (con archi da/verso transizioni del processo), il supervisore potrebbe avere anche proprie transizioni aggiunte (**supervisore dinamico**) ...

# Uso dei posti monitor

esempio (reprise): impianto di produzione e movimentazione

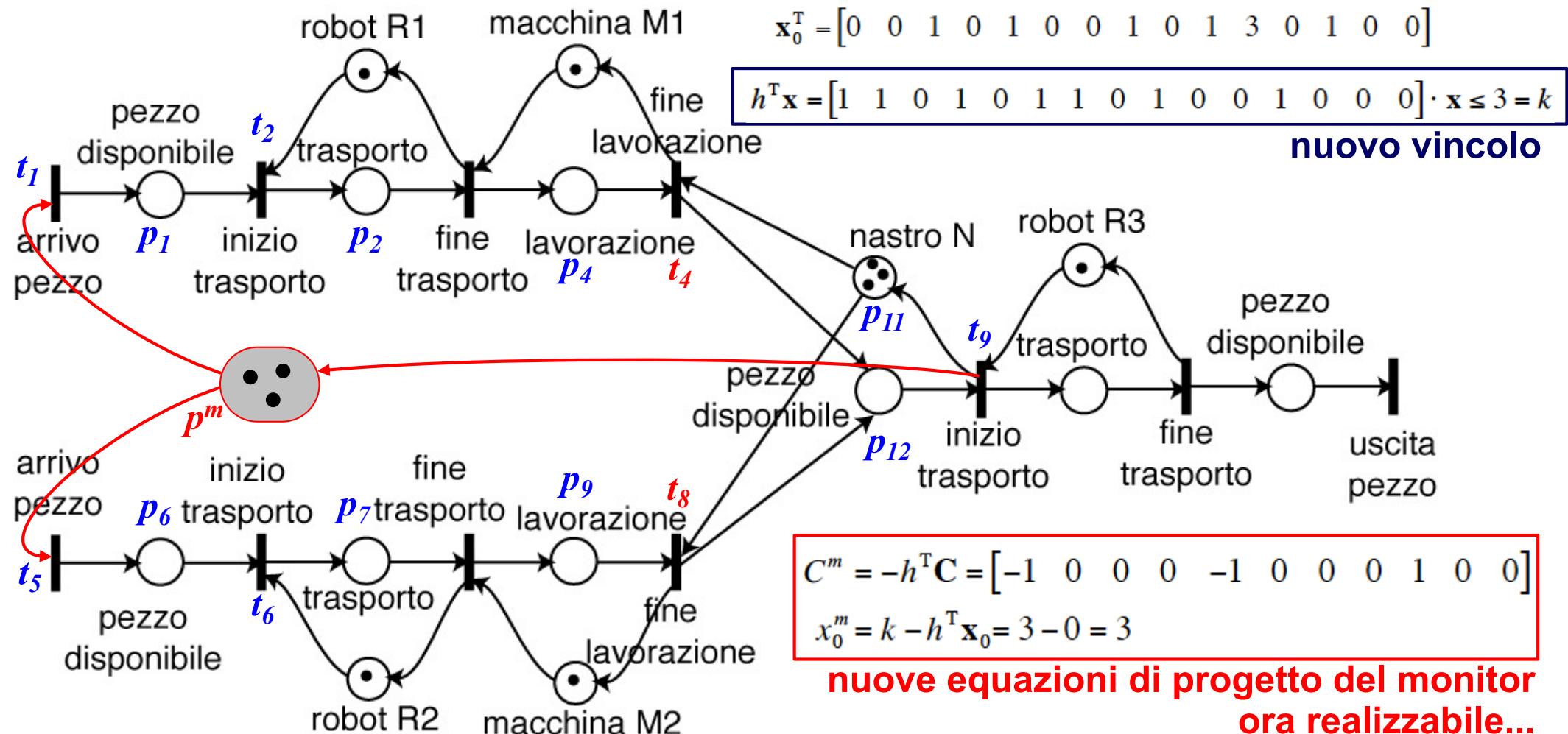
- si vuole evitare di fare arrivare altri pezzi ai buffer di ingresso dell'impianto quando il nastro di uscita è già saturo (con tre pezzi): si vuole quindi imporre il vincolo  $x(p_1) + x(p_6) + x(p_{12}) \leq 3$
- **PN originale:** 15 posti, 11 transizioni  $\Rightarrow C:(15 \times 11)$ ; **PN supervisore** con **1 posto monitor**



# Uso dei posti monitor

esempio (cont.): impianto di produzione e movimentazione

- se le transizioni  $t_4$  e  $t_8$  sono **non controllabili**, la precedente soluzione non è realizzabile e va modificata; sceglieremo che il numero totale di pezzi e semilavorati presenti nell'impianto fino al nastro sia limitato dalla sua capacità:  $x(p_1) + x(p_2) + x(p_4) + x(p_6) + x(p_7) + x(p_9) + x(p_{12}) \leq 3$



# Simulazione delle reti di Petri

Esistono vari strumenti software per la simulazione e l'analisi di PN

- PIPE2 (Imperial College London, <http://pipe2.sourceforge.net>)

- è gratuito!!
- tratta reti di Petri ordinarie, ma anche stocastiche (Generalized Stochastic Petri Nets, GSPN)
- gestisce reti con migliaia di stati
- fornisce molti strumenti di analisi
- ha un'interfaccia ‘friendly’ e intuitiva
- open source!!
- platform-independent (Java)
- ...qualche bug

- lista di PN tools & freeware + Java applets

[www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/PetriNets](http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/PetriNets)

