



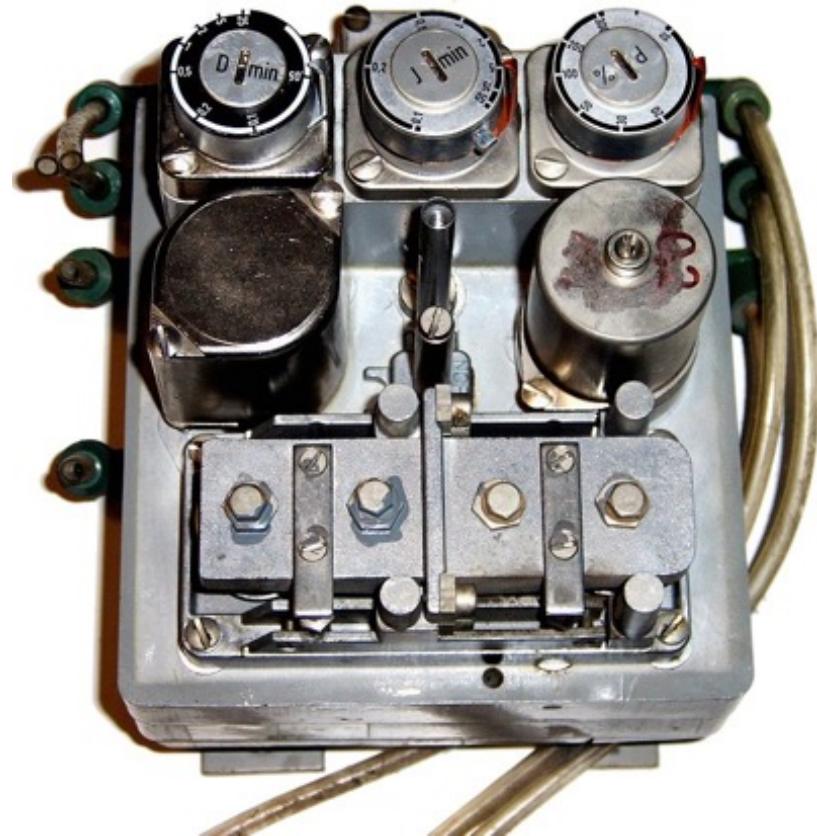
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Regolatori PID – strutture implementazione digitale sintonizzazione

Automazione

Alessandro De Luca

Dispositivi *PID* analogici e digitali

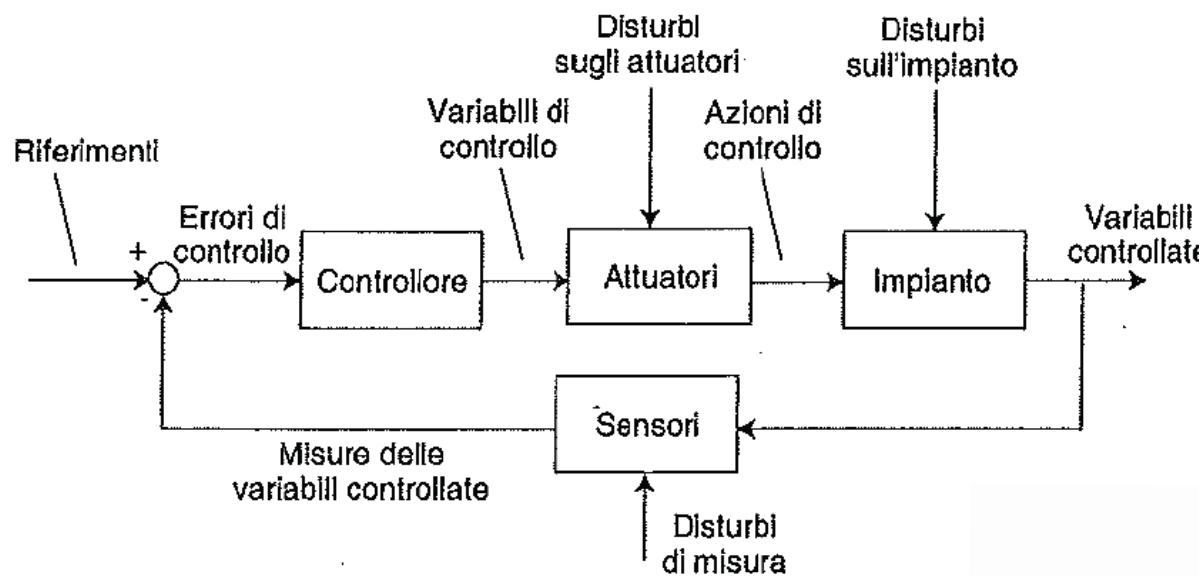


Siemens PID pneumatico
(analogico)



REX-C100 PID digitale

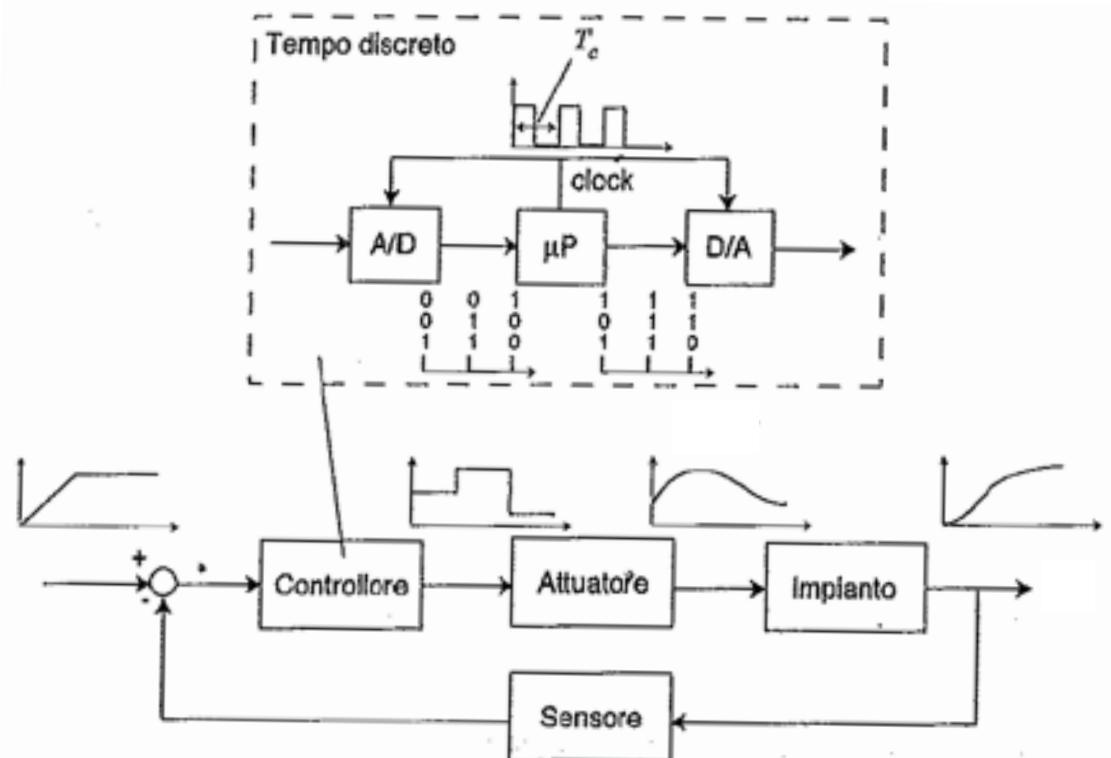
Sistema di controllo digitale



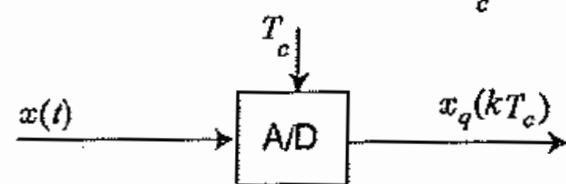
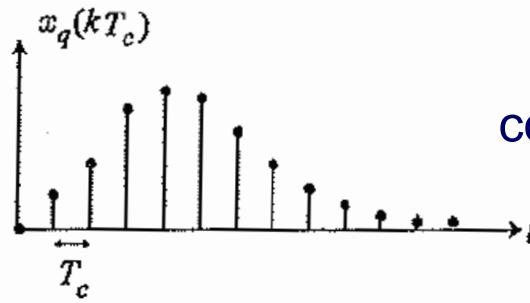
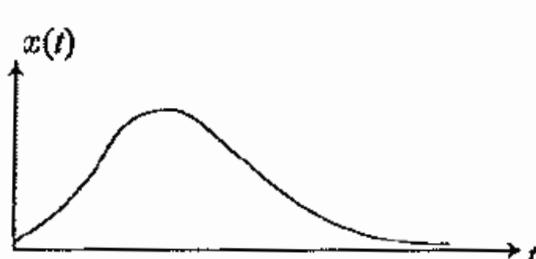
schema generale MIMO
di controllo in feedback
(analogico = tempo continuo)

schema di controllo digitale

- qui, caso scalare (SISO)
- con passo di campionamento T_c
- con convertitori A/D e D/A
- segnali a tempo continuo e discreto
- utilizza un microprocessore
(con codifica binaria) \Rightarrow digitale

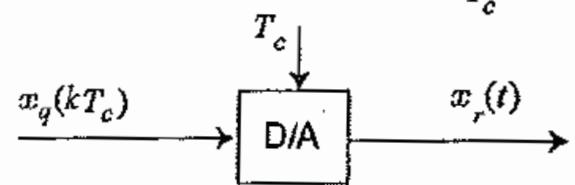
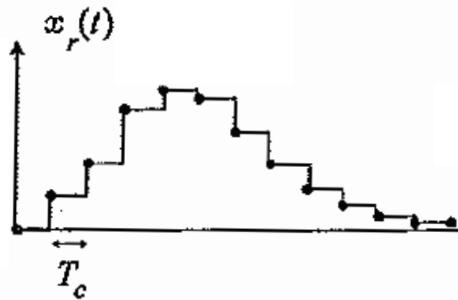
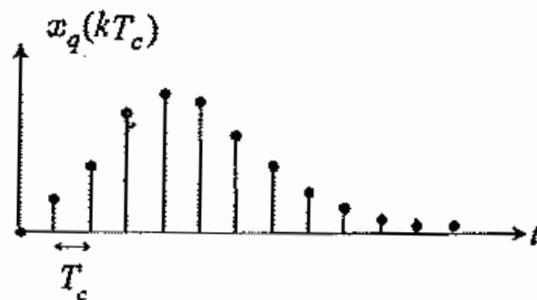


Campionamento e ricostruzione



conversione **analogico-digitale (A/D)**:
segnale campionato ogni T_c
e quantizzato in livelli
(per troncamento o arrotondamento)

$$x_k = x(kT_c) \quad [= x_q(kT_c)]$$

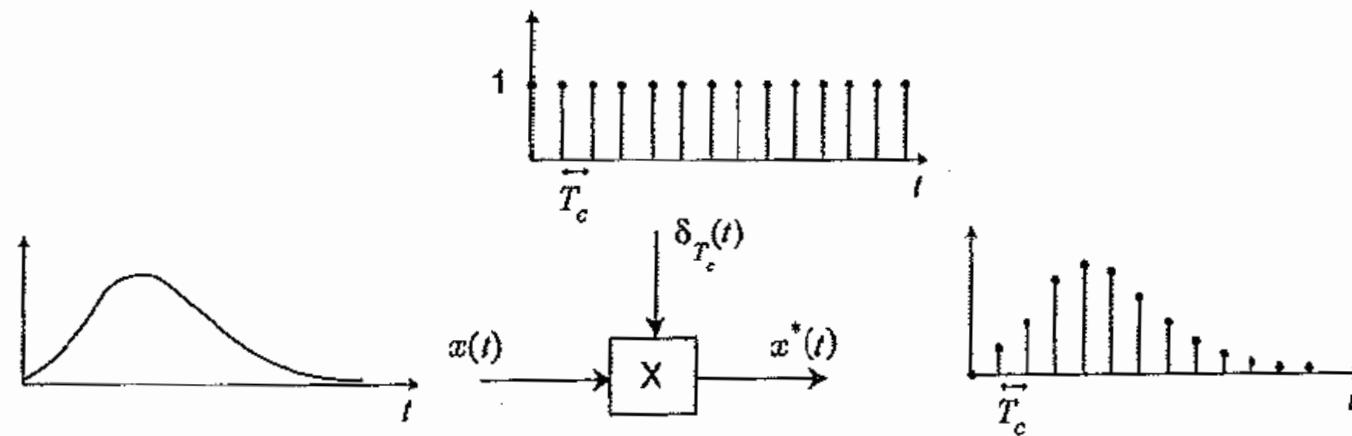


conversione **digitale-analogica (D/A)**:
segnale ricostruito
da un organo di tenuta
(qui, di ordine zero = **ZOH**)

ZOH =
Zero-Order Hold

$$x_r(t) = x(kT_c), \quad t \in [kT_c, (k + 1)T_c]$$

Campionamento a impulsi



- campionamento = segnale a tempo continuo \times treno di impulsi di Dirac

$$x^*(t) = x(t)\delta_{T_c}(t) \quad \delta_{T_c}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_c)$$

- dallo spettro $X(j\omega)$ del segnale $x(t)$ e dallo sviluppo in serie di Fourier del treno di impulsi di Dirac l'andamento spettrale del segnale campionato $x^*(t)$ è

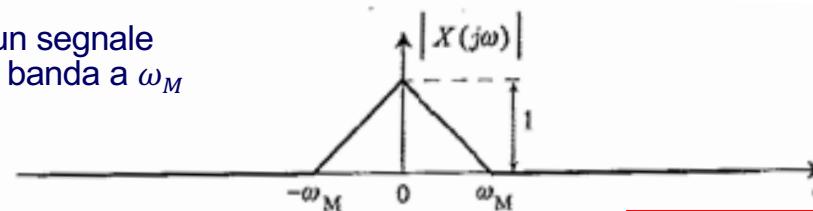
$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jn\omega_c) \quad \omega_c = 2\pi/T_c$$

il tempo di campionamento
è un fattore di scala!

pulsazione di
campionamento

Teorema di Shannon e aliasing

spettro di un segnale limitato in banda a ω_M



spettro del relativo segnale campionato

componente primaria

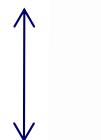
campionamento a pulsazione $\omega_c \geq 2\omega_M$

componenti complementari

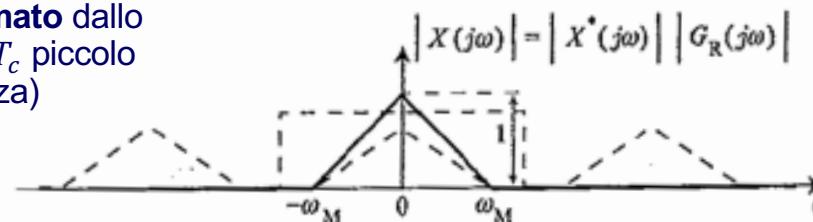


filtro ricostruttore ideale (non realizzabile)

$$G_R(j\omega) = \begin{cases} T_c & |\omega| \leq \omega_c/2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



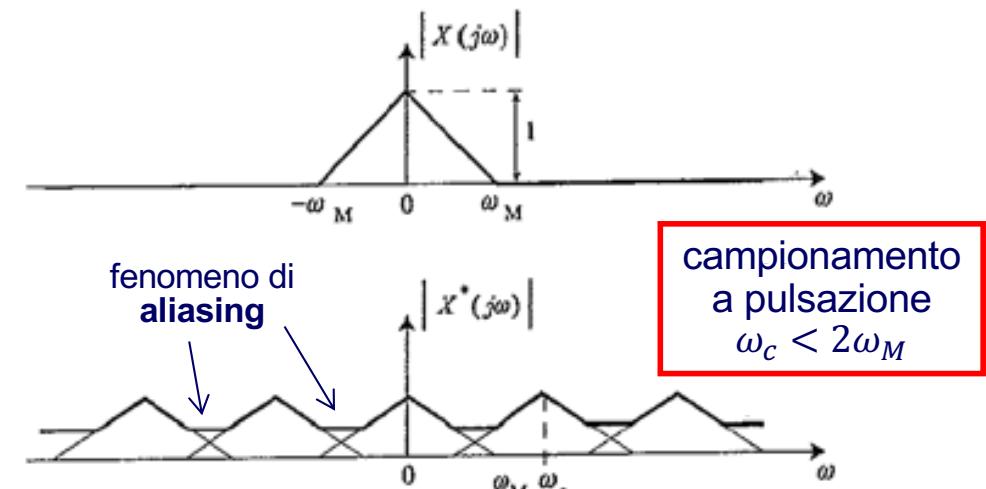
comportamento approssimato dallo ZOH (per T_c piccolo a sufficienza)



ricostruzione del segnale (idealemente) perfetta...

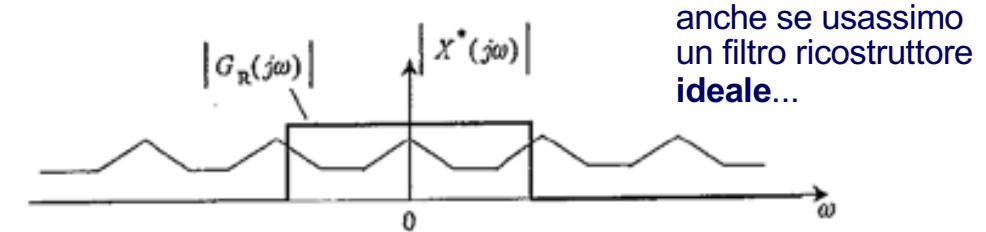
Teorema di Shannon

conclusione: i segnali hanno sempre componenti a frequenza sufficientemente alta (rumore)
 \Rightarrow **filtraggio anti-aliasing**

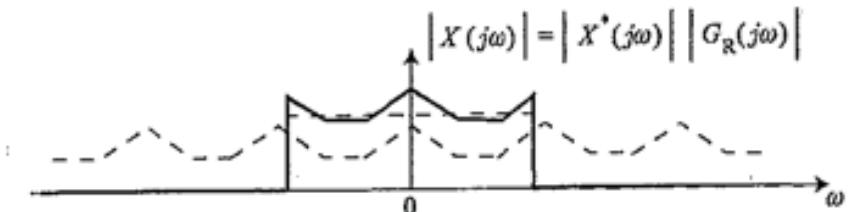


fenomeno di aliasing

campionamento a pulsazione $\omega_c < 2\omega_M$



anche se usassimo un filtro ricostruttore ideale...

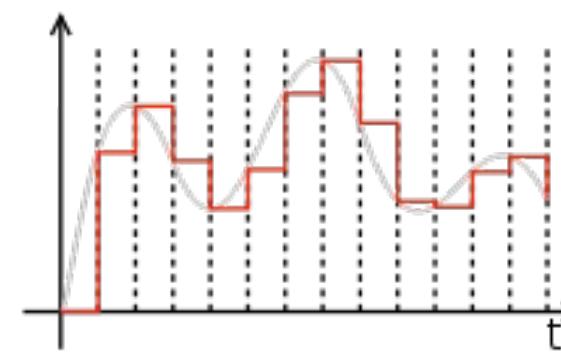
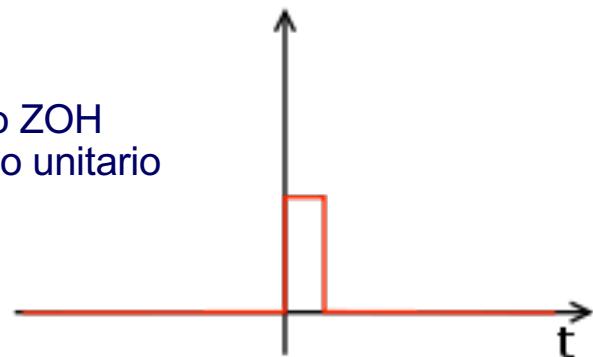


...ricostruzione del segnale (sempre) corrotta

Teorema di Shannon

Ricostruzione: Zero-Order Hold

risposta dello ZOH
ad un impulso unitario
in ingresso



(differenza di due
gradini unitari, con
il secondo ritardato)

$$h_0(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t - T_c)$$

\Rightarrow (nel dominio della
frequenza)

$$H_0(j\omega) = \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega T_c} = \frac{1 - e^{-j\omega T_c}}{j\omega}$$

$$\Rightarrow H_0(j\omega) = \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega T_c} = \frac{e^{\frac{j\omega T_c}{2}} - e^{-\frac{j\omega T_c}{2}}}{j\omega} e^{-\frac{j\omega T_c}{2}} = T_c \frac{\sin(\omega T_c / 2)}{\omega T_c / 2} e^{-\frac{j\omega T_c}{2}} \Rightarrow |H_0(j\omega)| = T_c \left| \frac{\sin(\omega T_c / 2)}{\omega T_c / 2} \right| \approx T_c \quad \text{per } \omega T_c \ll 1$$

$e^{jx} = \cos x + j \sin x$

- lo ZOH approssima il modulo del ricostruttore ideale (recupera la scala!) per T_c sufficientemente piccolo
- lo ZOH introduce nell'anello di controllo un ritardo pari a $T_c/2$, con problemi indotti di instabilità

Scelta del passo di campionamento

- T_c sufficientemente piccolo \Rightarrow evita perdita di informazione e instabilità
- T_c non troppo piccolo \Rightarrow cresce il costo computazionale (vincoli real time)

$$\alpha\omega_M \leq \omega_c \leq 10\alpha\omega_M$$

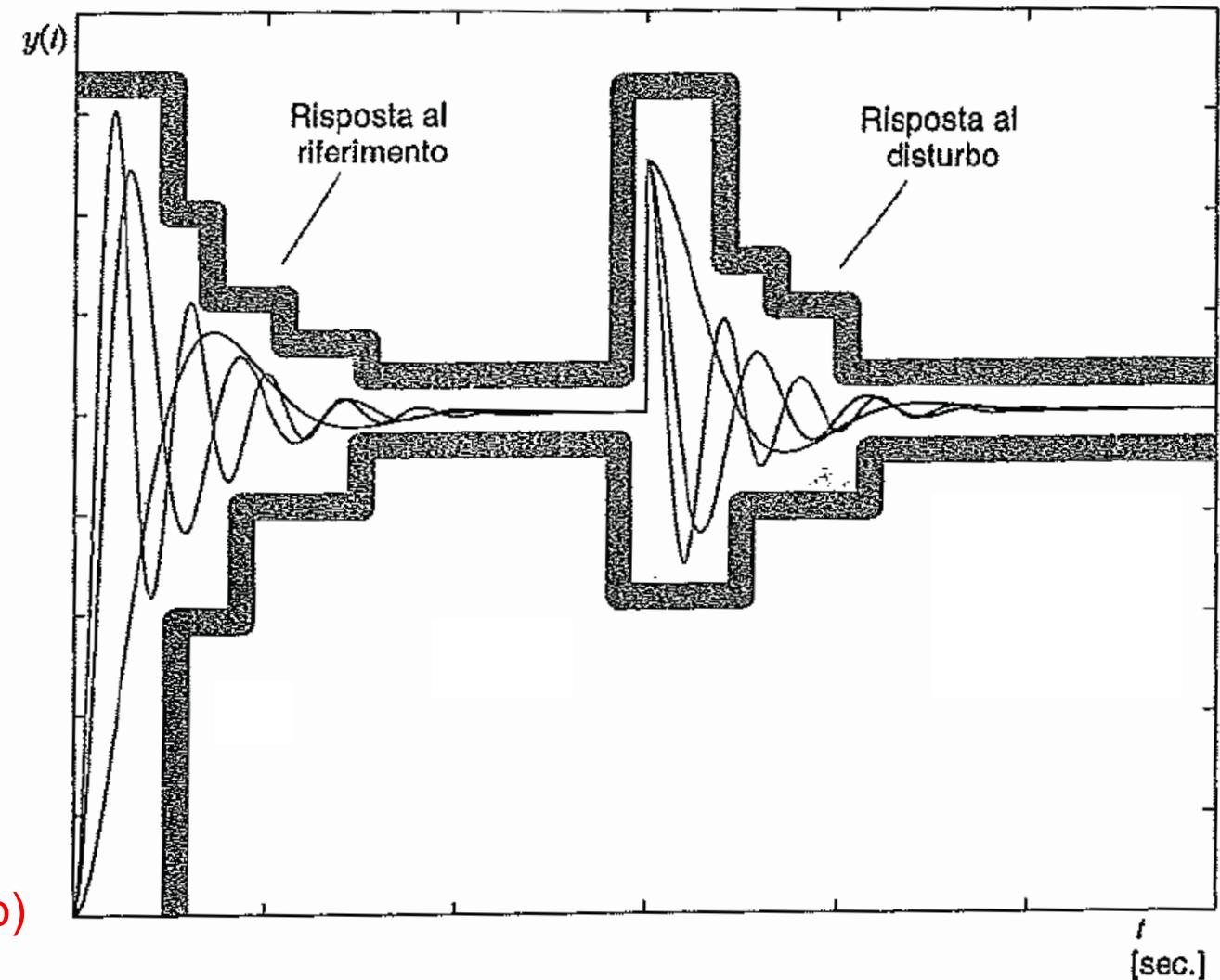


$$\frac{\pi}{5\alpha\omega_M} \leq T_c \leq \frac{2\pi}{\alpha\omega_M}$$

$\alpha \in [5 \div 10]$
parametro di progetto

Specifiche nel progetto di controllo

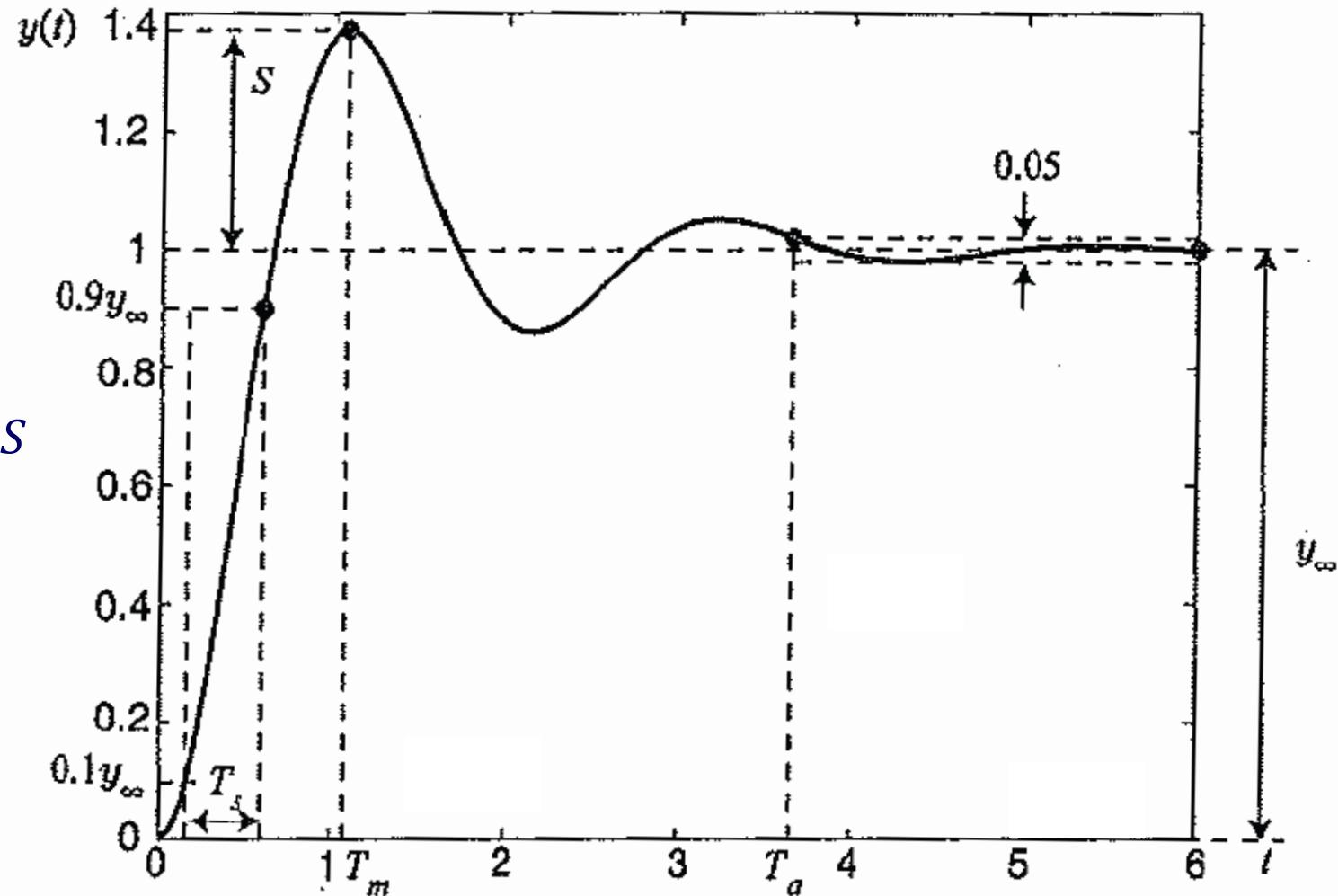
- stabilità asintotica !
- prestazioni statiche
(errori a regime permanente)
- prestazioni dinamiche
(sul transitorio)
- spesso sulla risposta a gradino
(risposta indiciale), con legami
da/per la risposta armonica
- specifiche riferimento-uscita
- specifiche disturbo-uscita
- sforzo di controllo
- limiti fisici (attuatori)
- realizzazione digitale
(passo di campionamento e altro)



Specifiche sulla risposta indiciale

- tempo di salita T_s
(da 10% al 90% del regime)
- tempo di assestamento T_a
(errore inferiore al 3-5%)
- massima sovraelongazione S

$$S = \frac{y(T_m) - y_\infty}{y_\infty}$$



□ Azione Proporzionale-Integrale-Derivativa (sull'errore)

- soluzione industriale standard: oltre il 95% dei dispositivi di controllo in uso, per lo più di tipo digitale, hanno una legge di controllo *PID*
- molteplici versioni e varietà di prodotti, differenti per feature aggiuntive
- semplice taratura dei parametri (tuning), ora spesso automatica
- facile interpretazione dei termini/effetti nella legge di controllo

$$e(t) = y_{rif}(t) - y(t)$$

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

due espressioni
equivalenti del *PID*
(in forma analogica)

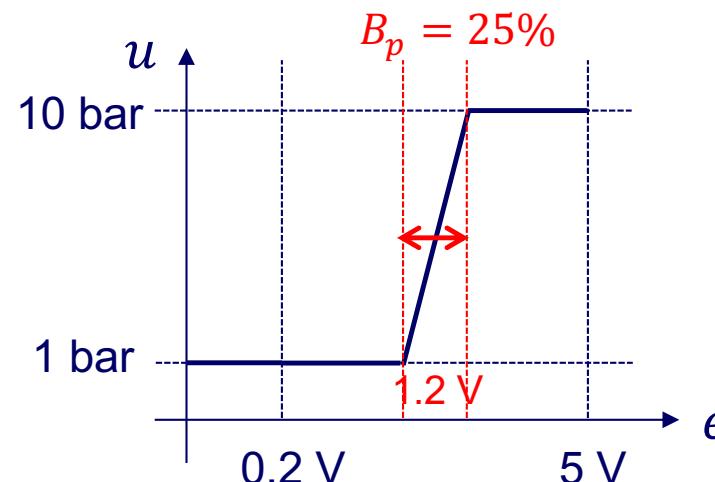
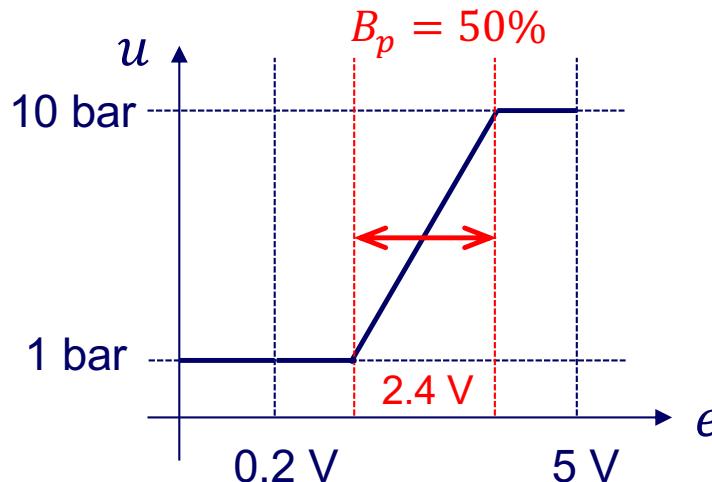
$$T_i = \frac{K_p}{K_i} \quad \text{tempo di integrazione}$$

$$T_d = \frac{K_d}{K_p} \quad \text{tempo di derivazione}$$

Banda proporzionale

□ Guadagno e Banda proporzionale

- nella pratica industriale, si usa spesso il termine **banda** proporzionale B_p al posto del termine **guadagno** proporzionale K_p
- B_p è la minima variazione dell'ingresso e (espressa in **percentuale**) che porta l'uscita u del regolatore dal valore minimo al valore di fondo scala ($range = \text{fondo scala} - \text{minimo}$)



$$K_p \left(= \frac{u(t)}{e(t)}\right) = \frac{\Delta u(t)}{\Delta e(t)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{soho se} \\ \text{senza offset} \\ (\text{minimi} = 0!)$$

$$K_{norm} = \frac{u_{range}}{e_{range}} \left(= \frac{9}{4.8} = 1.875 \left[\frac{\text{bar}}{\text{V}} \right] \right) \quad \Leftrightarrow \\ K_p = \frac{\Delta u(t)/u_{range}}{\Delta e(t)/e_{range}} \cdot K_{norm}$$

normalizzazione del guadagno K_p
(rispetto al range del dispositivo)

□ Funzione di trasferimento di un *PID* (ideale)

- ➔ trascuriamo per il momento la non realizzabilità dovuta alla presenza di un derivatore (azione D) ideale
- ➔ trasformando nel dominio di Laplace si ottiene

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \Rightarrow \mathcal{L}[...] \Rightarrow$$

$$PID_{ideale}(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = \frac{K_p}{T_i} \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{s}$$

- ➔ con un **polo** in $s = 0$ e **due zeri** a parte reale negativa, **reali** se e solo se $T_i \geq 4 T_d$ (in particolare, coincidenti in $-1/2T_d$ se $T_i = 4T_d$ – scelta spesso utile per semplificare il tuning...)
- ➔ in un progetto di controllo ‘analitico’, gli zeri possono essere scelti per cancellare poli **stabili** del processo (magari troppo lenti)

□ Funzione di trasferimento di un *PID* (reale)

- ➔ si aggiunge un polo in alta frequenza sull'azione derivatrice (derivata **in banda** fino alla pulsazione di taglio del polo aggiunto)
- ➔ nel dominio di Laplace si ha

$$PID(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s} \right) = \frac{K_p}{T_i} \frac{T_i T_d \left(1 + \frac{1}{N} \right) s^2 + \left(T_i + \frac{T_d}{N} \right) s + 1}{s \left(1 + \frac{T_d}{N} s \right)}$$

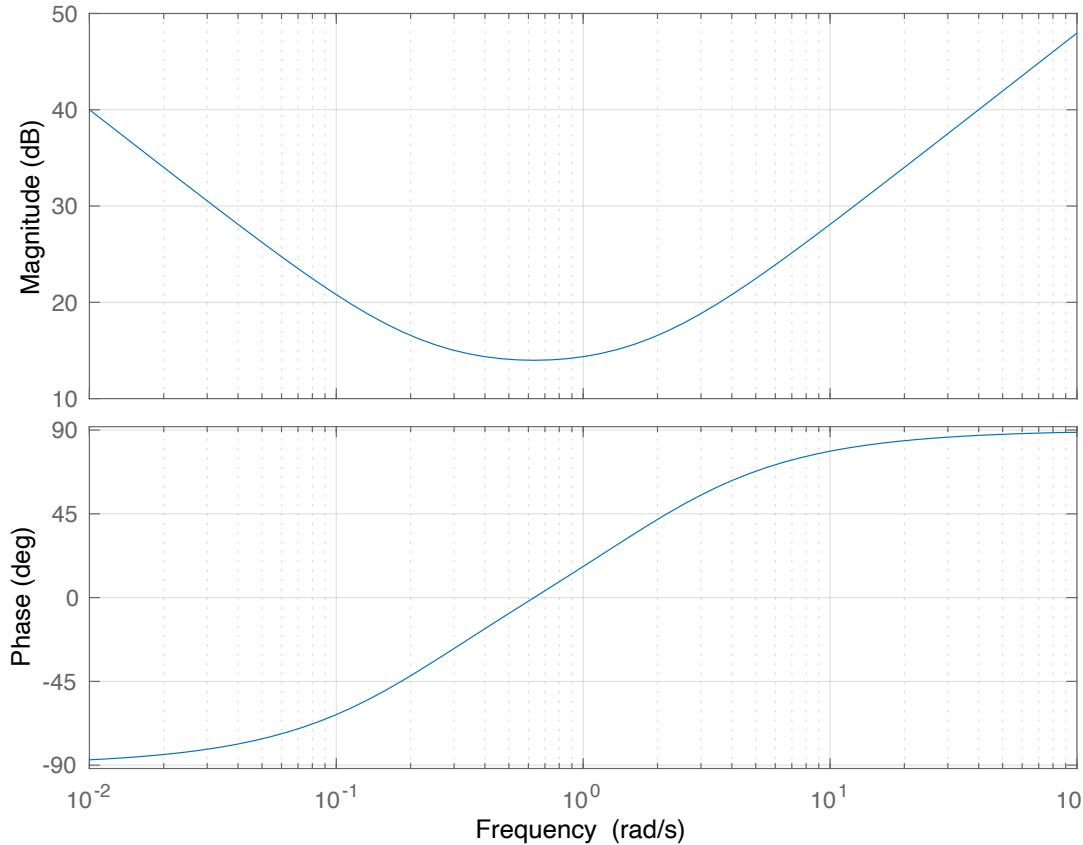
- ➔ con l'aggiunta di un secondo **polo** in $s = -N/T_d$ (con N intero **grande**) **due zeri** a parte reale negativa, certamente **reali** quando $T_i \geq 4T_d$!
- ➔ l'aggiunta di un polo in alta frequenza, per ottenere un'azione derivativa approssimata ma realizzabile, cambia di poco la posizione degli zeri rispetto al caso ideale

$$z_{1,2} = \frac{-(T_d + NT_i) \pm \sqrt{(NT_i + T_d)^2 - 4N(N+1)T_dT_i}}{2T_dT_i(N+1)} \quad (N \rightarrow \infty) \approx -\frac{1}{2T_d} \pm \frac{\sqrt{T_i^2 - 4T_dT_i}}{2T_dT_i}$$

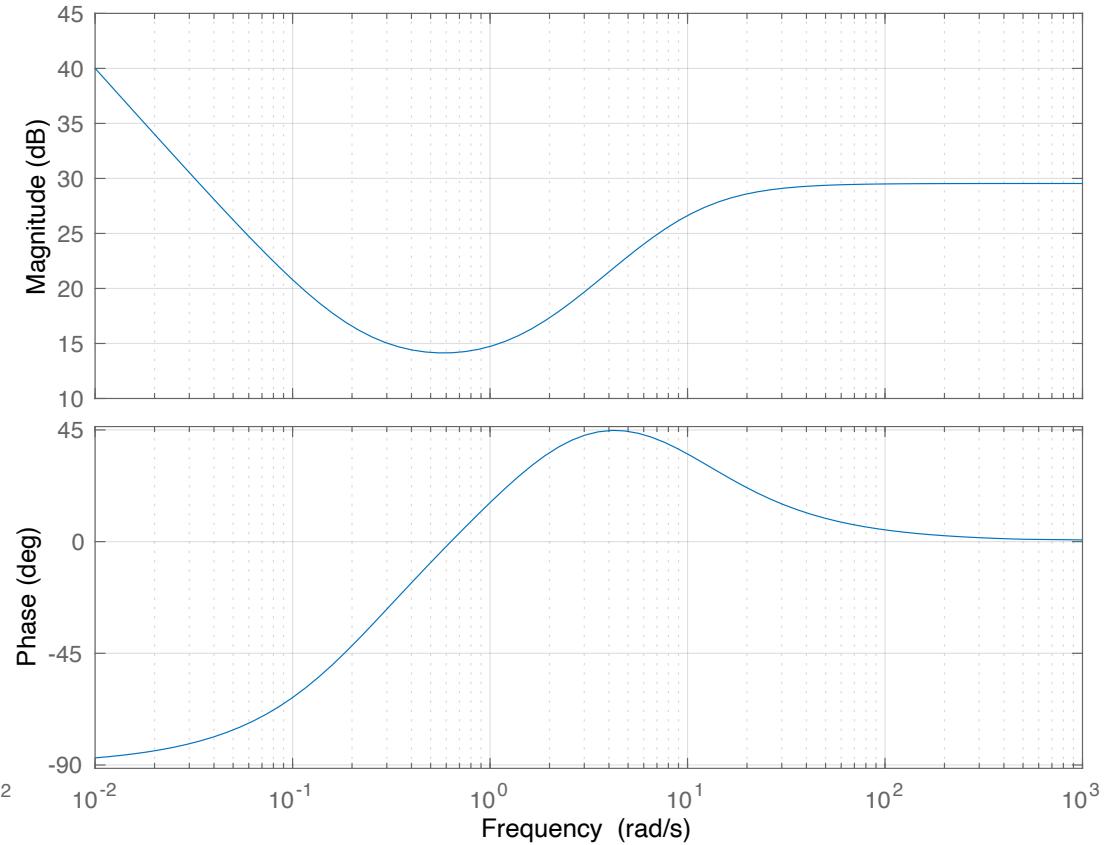
Confronto in risposta armonica

Diagrammi di Bode di un *PID* ideale vs reale

PID ideale con $K_p = 5$, $T_i = 5$, $T_d = 0.5$



PID reale con $K_p = 5$, $T_i = 5$, $T_d = 0.5$, $N = 5$



$$PID_{ideale}(s) = \frac{K_p}{T_i} \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{s}$$

$$PID(s) = \frac{K_p}{T_i} \frac{T_i T_d \left(1 + \frac{1}{N}\right) s^2 + \left(T_i + \frac{T_d}{N}\right) s + 1}{s \left(1 + \frac{T_d}{N} s\right)}$$

Approssimazioni discrete di integrali

- discretizzazione con passo T_c dell'integrale $u(t)$ di un segnale $e(t)$ (campionato)

$$x_k = x(kT_c) \quad x(z) = Z[\{x_k\}] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$$

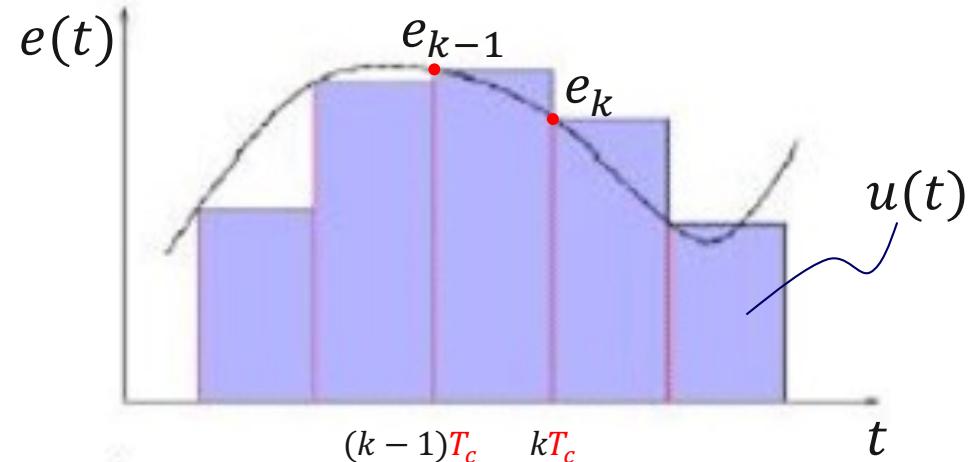
Z -trasformata della sequenza $\{x_k\}$
(con operatore di ritardo z^{-1} di un passo T_c)

- integrazione rettangolare all'indietro

$$u_k = u_{k-1} + T_c e_{k-1}$$

$$u(z) = z^{-1}u(z) + T_c z^{-1}e(z)$$

$$\frac{u(z)}{e(z)} = \frac{T_c z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{T_c}{z - 1} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{s} \Leftrightarrow \int$$

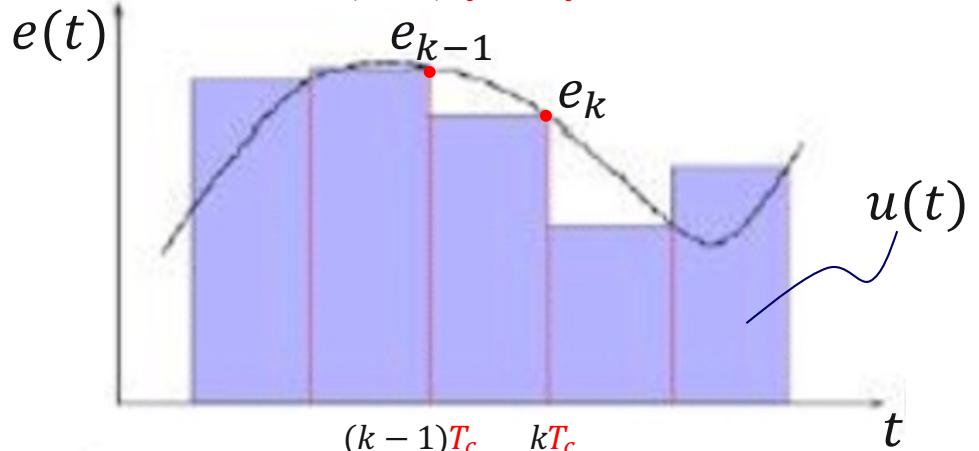


- integrazione rettangolare in avanti

$$u_k = u_{k-1} + T_c e_k$$

$$u(z) = z^{-1}u(z) + T_c e(z)$$

$$\frac{u(z)}{e(z)} = \frac{T_c}{1 - z^{-1}} = \frac{T_c z}{z - 1} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{s} \Leftrightarrow \int$$



- integrazione trapezoidale
(di Tustin)?

$$\frac{u(z)}{e(z)} = \frac{T_c}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{T_c}{2} \frac{z + 1}{z - 1}$$

- legami inversi per la derivazione numerica!

$$\frac{1}{f(z)} \Leftrightarrow s \Leftrightarrow \frac{d}{dt}$$

Regolatore *PID* digitale

discretizzazione con passo T_c delle azioni del *PID* sull'errore $e(t) = y_{rif}(t) - y(t)$

$$K_p e(t) \Rightarrow K_p e(kT_c) = K_p e_k$$

$$K_p \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \Rightarrow \frac{K_p}{T_i} T_c \sum_{j=1}^k e_j$$

integrazione rettangolare **in avanti**

$$K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \Rightarrow K_p T_d \frac{e_k - e_{k-1}}{T_c}$$

derivazione con differenze
all'indietro (backward)

$$u_k = K_p e_k + \frac{K_p T_c}{T_i} \sum_{j=1}^k e_j + \frac{K_p T_d}{T_c} (e_k - e_{k-1}) \quad \text{forma di **posizione** del *PID* digitale}$$

$$u_{i,k} = u_{i,k-1} + \frac{K_p T_c}{T_i} e_k$$

implementazione **ricorsiva** della
forma di **posizione** del *PID* digitale

$$u_k = K_p e_k + u_{i,k} + \frac{K_p T_d}{T_c} (e_k - e_{k-1})$$

Regolatore *PID* digitale

$$u_k = K_p e_k + \frac{K_p T_c}{T_i} \sum_{j=1}^k e_j + \frac{K_p T_d}{T_c} (e_k - e_{k-1})$$

facendo la **differenza** di due campioni di controllo successivi ...

$$u_{k-1} = K_p e_{k-1} + \frac{K_p T_c}{T_i} \sum_{j=1}^{k-1} e_j + \frac{K_p T_d}{T_c} (e_{k-1} - e_{k-2})$$

$$\begin{aligned}\Delta u_k &= u_k - u_{k-1} \\ &= K_p (e_k - e_{k-1}) + \frac{K_p T_c}{T_i} e_k + \frac{K_p T_d}{T_c} (e_k - 2e_{k-1} + e_{k-2})\end{aligned}$$

$$u_k = u_{k-1} + \Delta u_k \quad \text{forma di **velocità** del *PID* digitale}$$

con l'operatore di ritardo $z^{-1} = 1/z$ (di un passo T_c) ... $x_{k-1} = z^{-1} x_k$

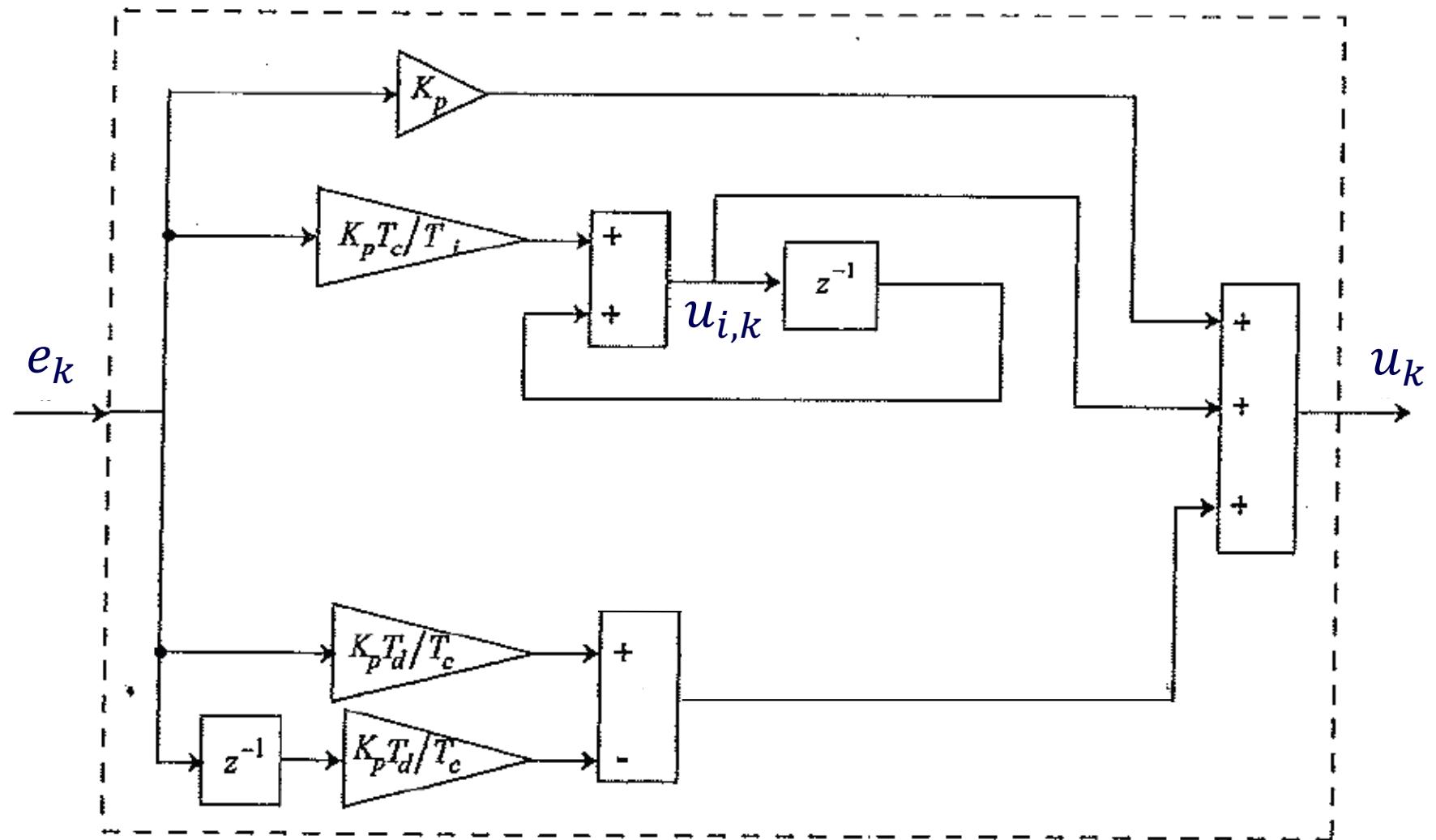
$$(1 - z^{-1})u_k = K_p(1 - z^{-1})e_k + \frac{K_p T_c}{T_i} e_k + \frac{K_p T_d}{T_c} (1 - 2z^{-1} + z^{-2})e_k$$

$\nearrow \qquad \qquad \qquad \searrow = (1 - z^{-1})^2$

➡
$$u_k = \left[K_p + \frac{K_p}{T_i} \frac{T_c}{1 - z^{-1}} + \frac{K_p}{T_c} T_d (1 - z^{-1}) \right] e_k = PID(z) e_k$$

espressione
in z^{-1} utile per
la realizzazione

Schema *PID* digitale



controllore *PID* digitale (forma di posizione)

nota: sono possibili anche altri schemi implementativi della stessa legge *PID* digitale!

Derivata filtrata in banda...

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

come già visto, il termine derivativo puro del *PID* non è realizzabile...

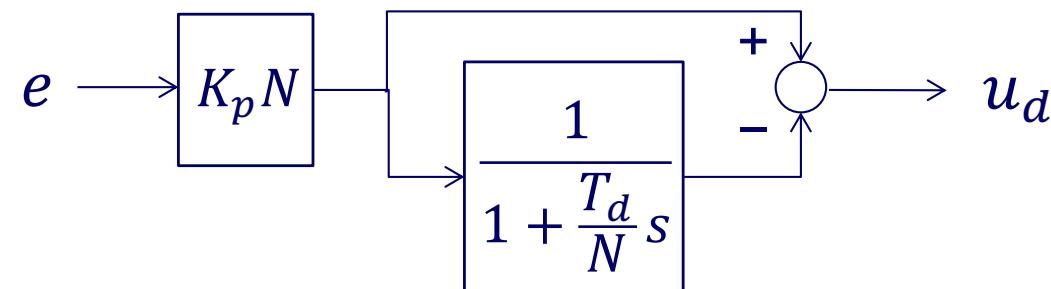
$$u(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = \frac{K_p}{T_i} \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{s} e(s)$$

... infatti la sua funzione di trasferimento è **impropria** (non causale)

$$K_p T_d s \Rightarrow K_p T_d \frac{s}{1 + (T_d/N)s}$$

... si aggiunge un polo in **alta frequenza** al termine derivativo (la derivazione del segnale d'ingresso è **filtrata** in banda)

realizzazione solo con blocchi "causali"



nel passaggio dal tempo continuo al tempo discreto, questa modifica si può interpretare come una media su N campioni (con $5 \leq N \leq 20$)

...e sua realizzazione digitale

$$u_d(s) = K_p T_d \frac{s}{1 + \frac{T_d}{N} s} e(s) \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{T_d}{N} s\right) u_d(s) = K_p T_d s e(s)$$

derivate realizzate con le differenze **all'indietro**

\Rightarrow usando l'operatore di ritardo z^{-1}

$$u_{d,k} + \frac{T_d}{N} \frac{u_{d,k} - u_{d,k-1}}{T_c} = K_p T_d \frac{e_k - e_{k-1}}{T_c} \Rightarrow \left(1 + \frac{T_d}{NT_c} (1 - z^{-1})\right) u_{d,k} = \frac{K_p T_d}{T_c} (1 - z^{-1}) e_k$$

$$u_{d,k} = \frac{1}{1 + \frac{T_d}{NT_c}} \left[\frac{T_d}{NT_c} u_{d,k-1} + \frac{K_p T_d}{T_c} e_k - \frac{K_p T_d}{T_c} e_{k-1} \right] \Rightarrow u_{d,k} = \frac{\frac{K_p T_d}{T_c} (1 - z^{-1})}{1 + \frac{T_d}{NT_c} - \frac{T_d}{NT_c} z^{-1}} e_k$$

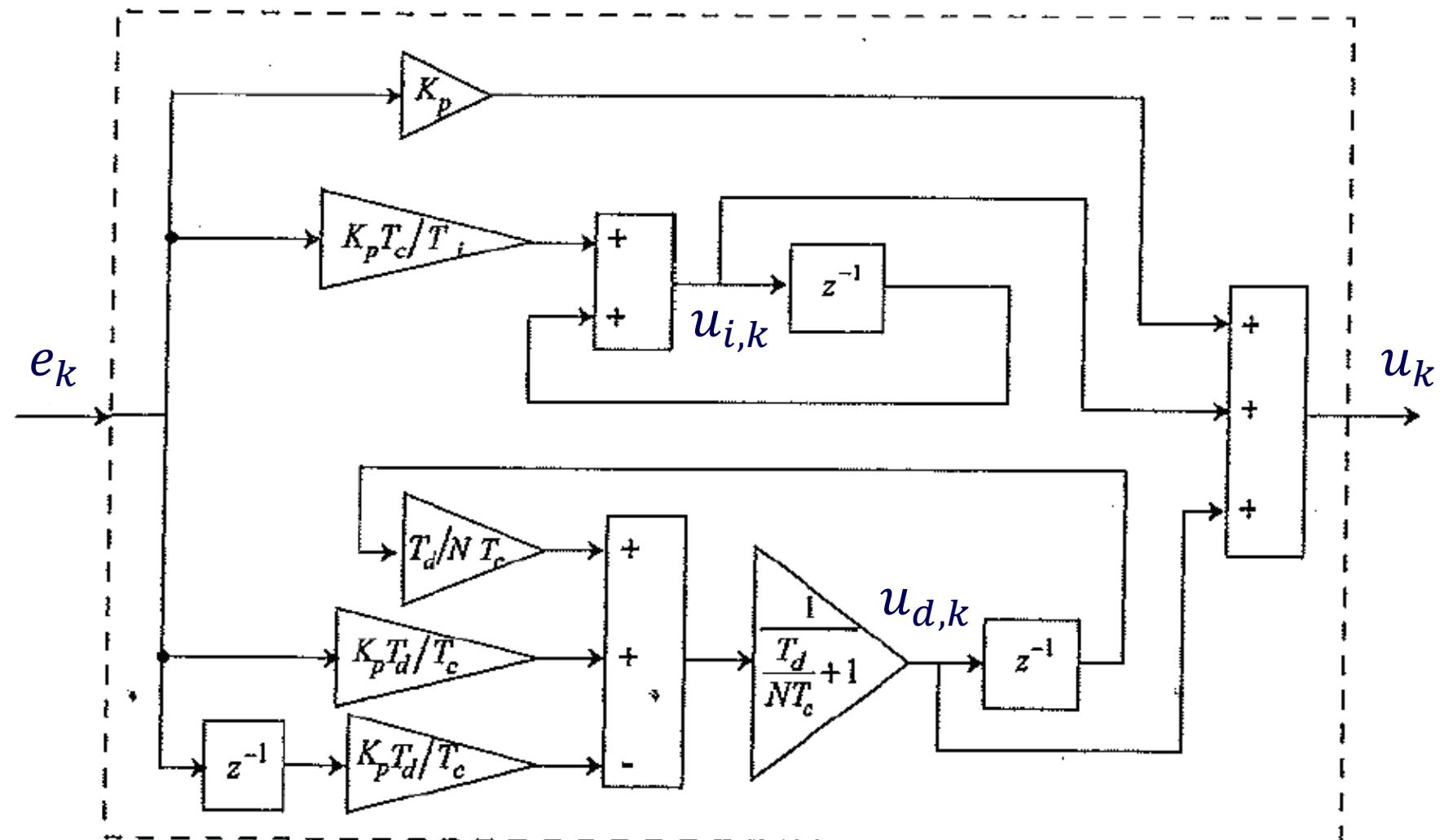
➡ insieme a $u_{i,k} = u_{i,k-1} + \frac{K_p T_c}{T_i} e_k$ ➡ $u_k = K_p e_k + u_{i,k} + u_{d,k}$



$$\boxed{u_k = \left[K_p + \frac{K_p}{T_i} \frac{T_c}{1 - z^{-1}} + \frac{K_p T_d}{T_c} \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{T_d}{NT_c} - \frac{T_d}{NT_c} z^{-1}} \right] e_k \\ = PID^*(z) e_k}$$

espressione
in z^{-1} utile per
la realizzazione

Schema *PID** digitale

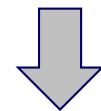


controllore *PID* digitale con derivata filtrata in banda = *PID**

PID digitale: forme analitiche in z^{-1} e z

$$u_k = \left[K_p + \frac{K_p}{T_i} \frac{T_c}{1 - z^{-1}} + \frac{K_p}{T_c} T_d (1 - z^{-1}) \right] e_k = PID(z) e_k$$

$$u_k = \left[K_p + \frac{K_p}{T_i} \frac{T_c}{1 - z^{-1}} + \frac{K_p T_d}{T_c} \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{T_d}{NT_c} - \frac{T_d}{NT_c} z^{-1}} \right] e_k = PID^*(z) e_k$$



moltiplicando num/den per z e riorganizzando

$$PID(z) = K_p \left[\frac{\left(1 + \frac{T_c}{T_i} + \frac{T_d}{T_c}\right) z^2 - \frac{2T_d + T_c}{T_c} z + \frac{T_d}{T_c}}{z(z-1)} \right]$$

- 2 zeri nel cerchio unitario (controllore a fase minima)
- 1 polo in $z = 0$
- 1 polo in $z = 1 \Leftrightarrow$ azione integrale

$$PID^*(z) = K_p \left[\frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{(z - \frac{T_d}{T_d + NT_c})(z - 1)} \right]$$

- 2 zeri **sempre** interni al cerchio unitario (criterio di Jury) $\Leftrightarrow a_0 < a_2, a_0 + a_1 + a_2 > 0, a_0 - a_1 + a_2 > 0$
- 1 polo reale 'vicino' a $z = 0$ (per $N \rightarrow \infty$)
- 1 polo in $z = 1 \Leftrightarrow$ azione integrale

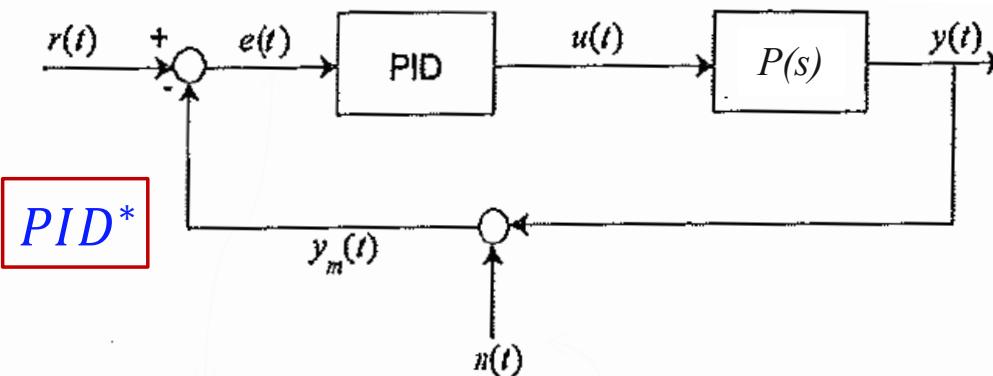
$$\text{con } a_2 = 1 + \frac{T_c}{T_i} + \frac{NTd}{T_d + NT_c}, \quad a_1 = -\frac{2N(T_d + T_c) + 2T_d + T_c T_d / T_i}{T_d + NT_c}, \quad a_0 = \frac{T_d}{T_d + NT_c} (N + 1 - \frac{T_c}{T_i})$$

espressioni
in z^{-1} utili per
le **realizzazioni**
(i due *PID*
coincidono per
 $N \rightarrow \infty$)

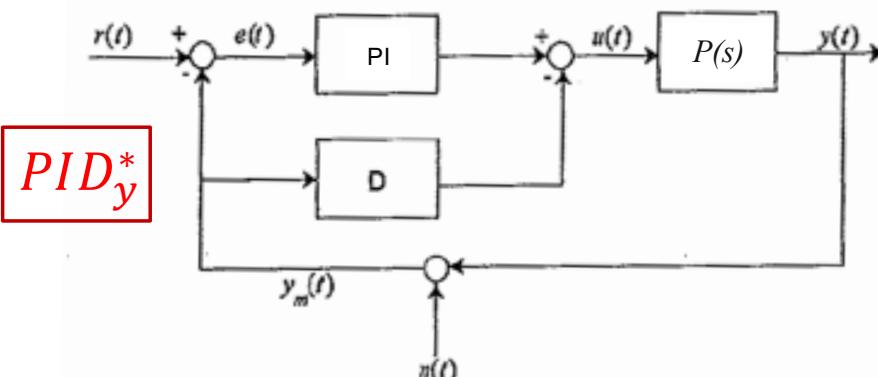
espressioni
razionali in z
che evidenziano
poli e zeri

(utili anche in
una sintesi del
controllore per
cancellazione)

Schemi realizzativi del **PID**



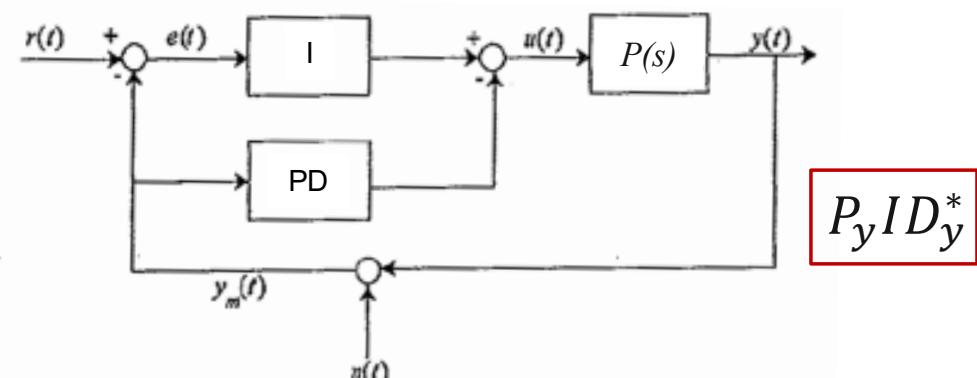
quando $e(t) \approx 0$, a causa dei rumori di misura $n(t)$, il rapporto S/N peggiora



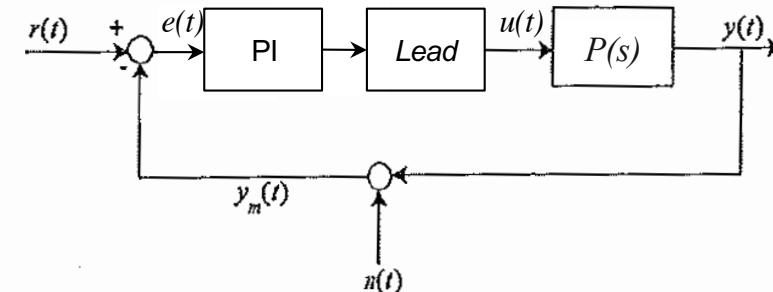
2 azione **derivativa D** calcolata solo **sull'uscita**: per riferimento costante (a lungo o a tratti) evita "spikes" dovuti a variazioni di r a gradino

$$r = \text{cost} \Rightarrow \frac{de(t)}{dt} = -\frac{dy(t)}{dt}$$

1 schema **standard** con tutte le azioni **PID** sull'errore (D^* = derivata in banda)



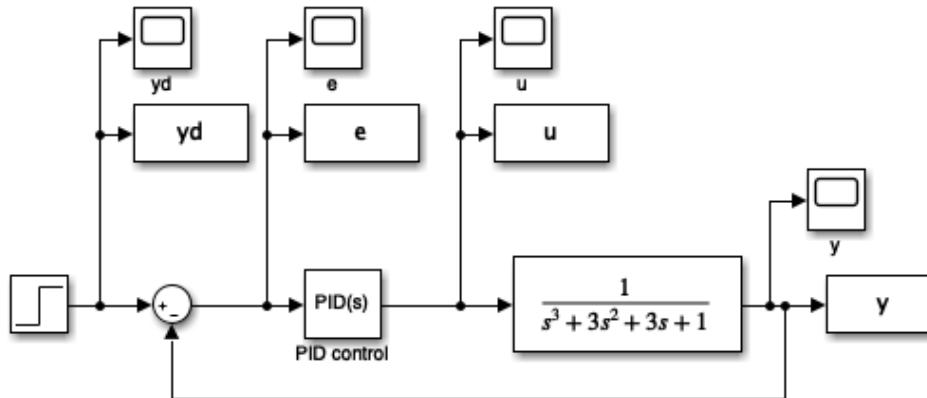
3 azione **PD** calcolata **sull'uscita**: (il solo termine integrale recupererà l'errore): evita saturazioni da salto a gradino del riferimento (**bumpless transfer**)



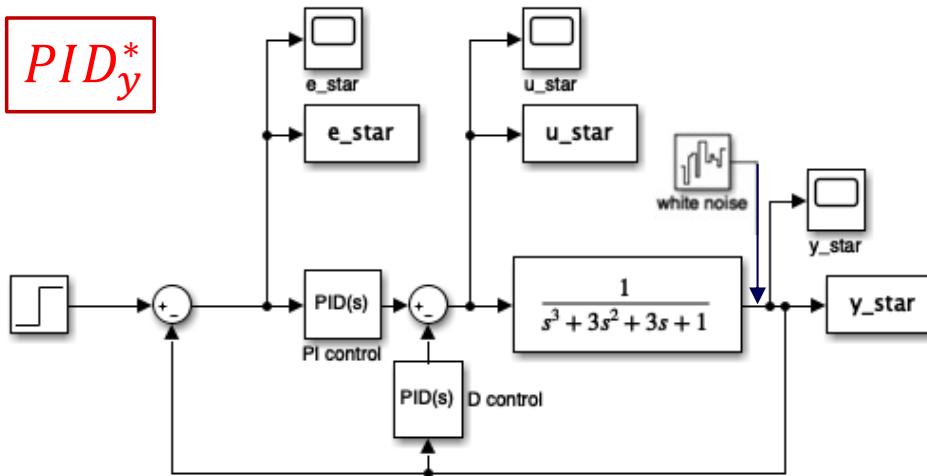
4 azione **derivativa** assimilata a quella di una rete **anticipatrice** opportuna: facilita la scelta dei guadagni del **PID** con le regole del "loop shaping" in frequenza

Esempio #1 – Confronto tra *PID*

*PID**



*PID_y**



- confronto tra *PID** e *PID_y**

- processo

$$P(s) = \frac{1}{(s + 1)^3}$$

- parametri del *PID* (ideale)

$$K_p = 2, K_i = K_d = 1 \quad (T_i = 2, T_d = 0.5)$$

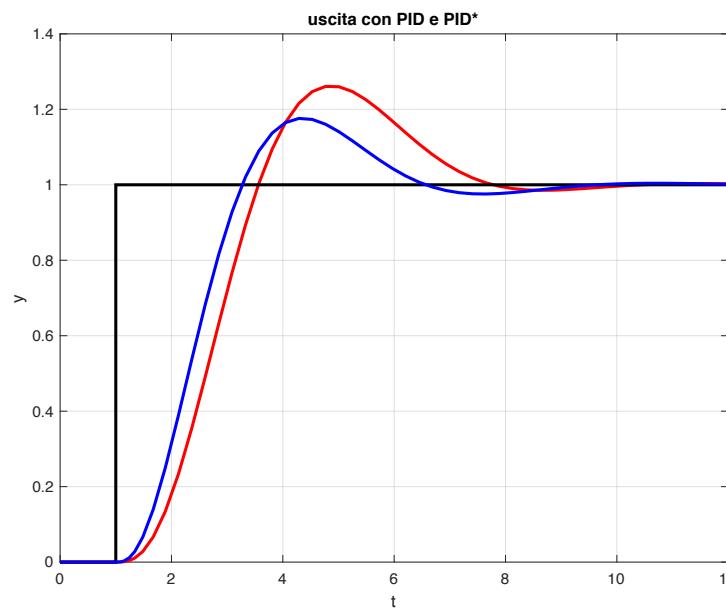
... è una scelta semplificatrice

$$\text{PID}(s) = \frac{(s + 1)^2}{s}$$

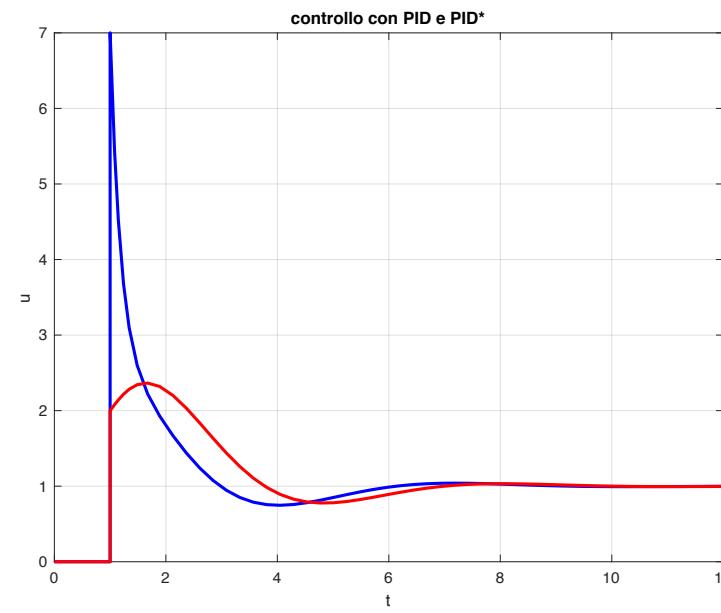
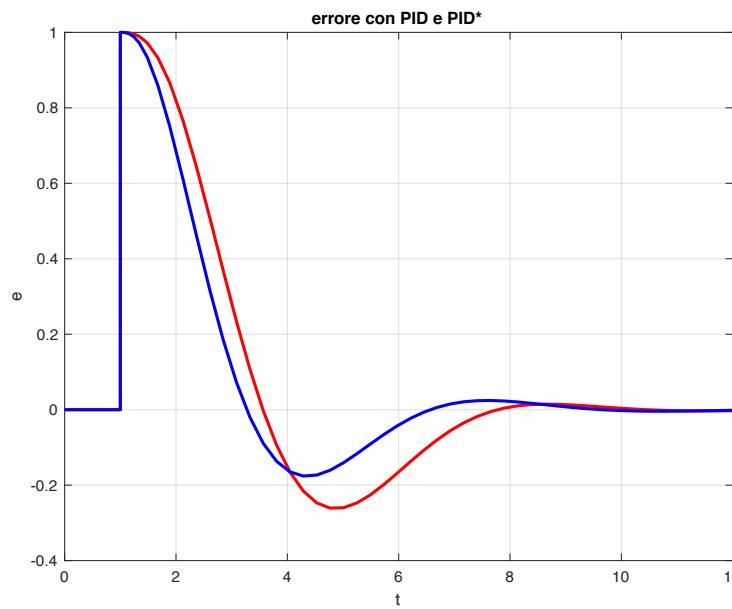
... cancella due poli stabili del processo

- risposta indiciale (gradino unitario a $t = 1$)
- sforzo di controllo tra *PID** e *PID_y**
- effetto della presenza anche di un disturbo in uscita (rumore bianco), al variare di N (polo in alta frequenza nel termine D^*)

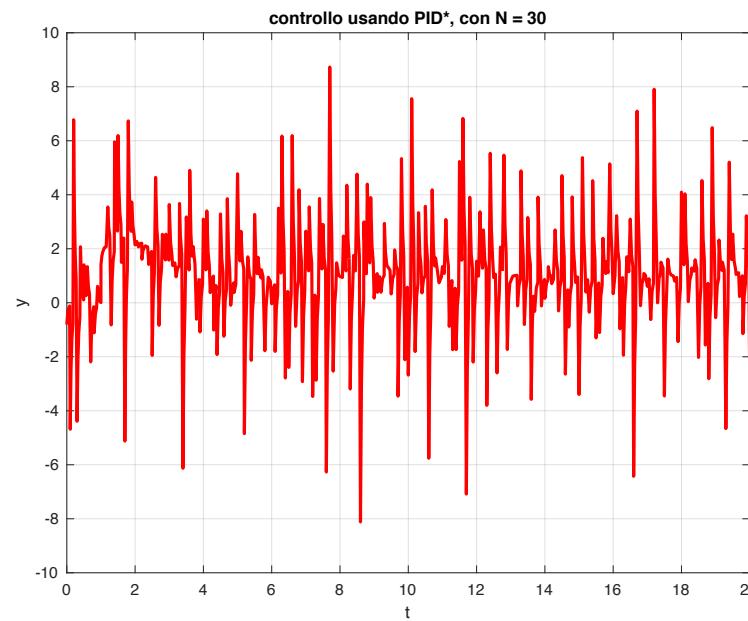
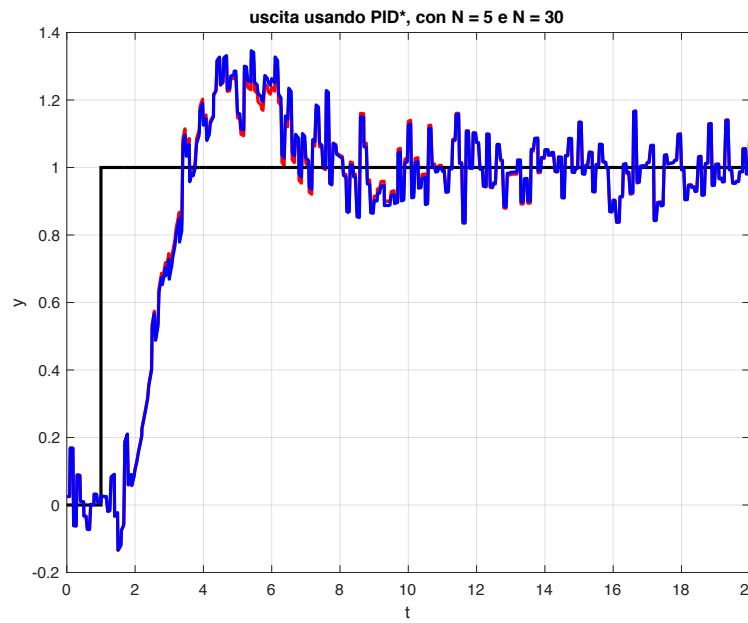
Esempio #1 – Sforzo di controllo



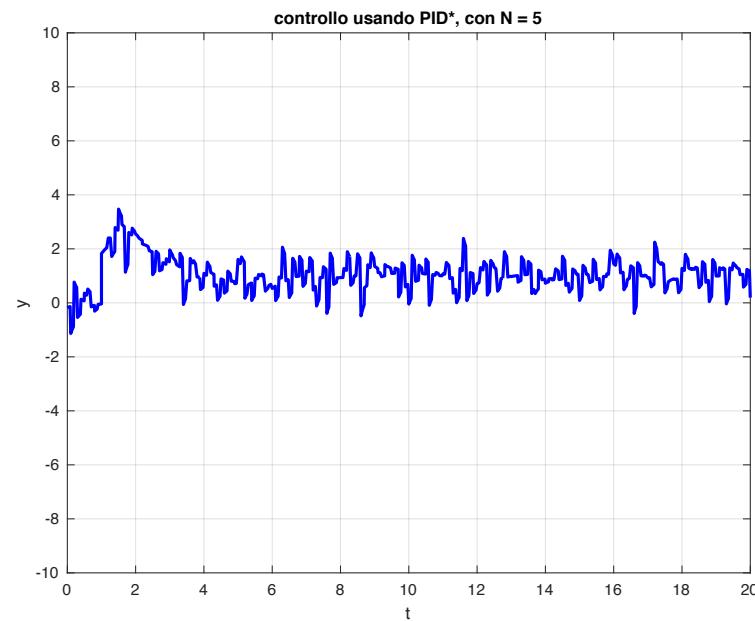
- confronto tra PID^* e PID_y^* (con $N = N_{low}$)
- a fronte di prestazioni simili nella risposta indiciale (tempo di salita, tempo di assestamento, sovraelongazione) ...
- ... sforzo di controllo **molto ridotto** con PID_y^*
- si evita il picco in corrispondenza della discontinuità del riferimento (gradino a $t = 1$)



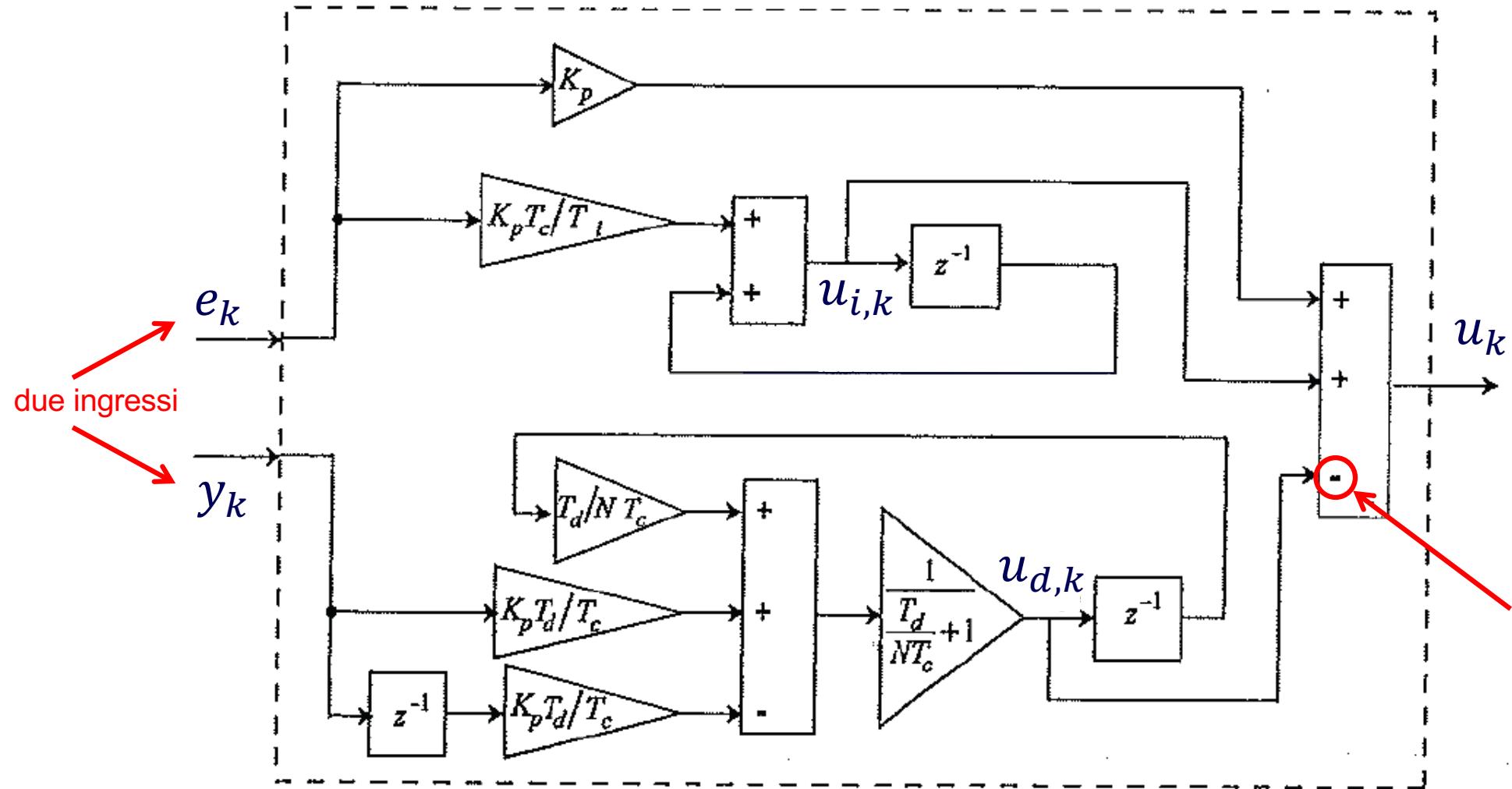
Esempio #1 – Effetto del rumore



- confronto tra PID_y^* per **due valori del polo in alta frequenza** per l'azione derivativa
 $N_{low} = 5$, $N_{high} = 30$
- in presenza di un disturbo in uscita in forma di rumore bianco (a spettro uniforme, con potenza $0.5 \cdot 10^{-3}$)
- a parità di comportamento in uscita ...
- ... l'andamento del controllo è molto **meno sollecitato** quando N è ridotto



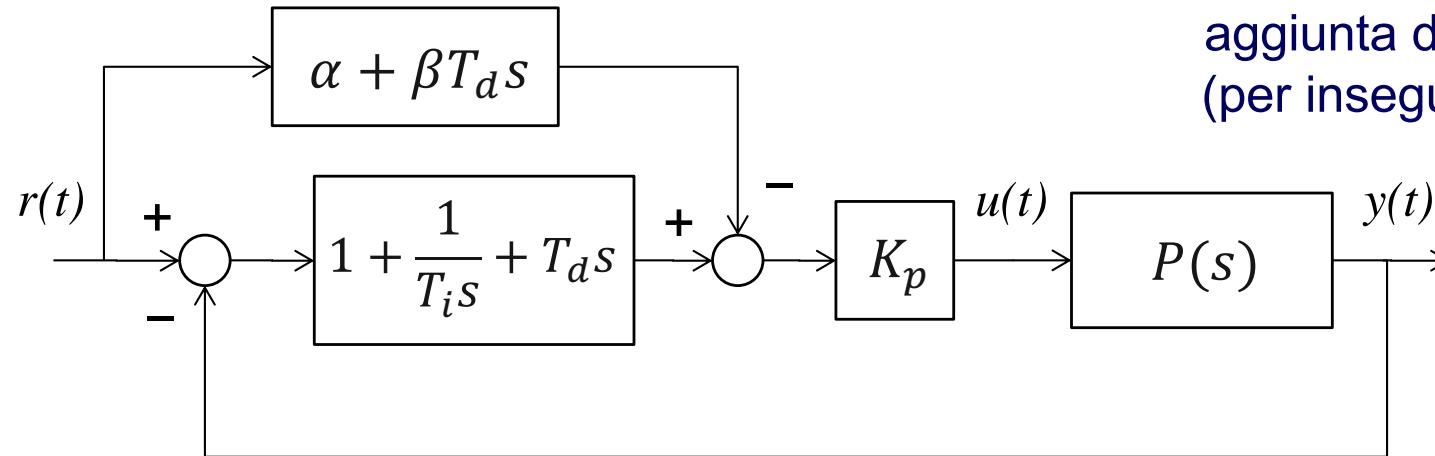
Schema PID_y^* digitale sull'uscita



- ② Controllore $PID_y^* = PID$ digitale con derivata (filtrata in banda) calcolata sull'uscita

Schema PID con feedforward

schema a **due gradi** di libertà (con parametri α, β)
secondo lo **standard ISA** (Instrument Society of America)

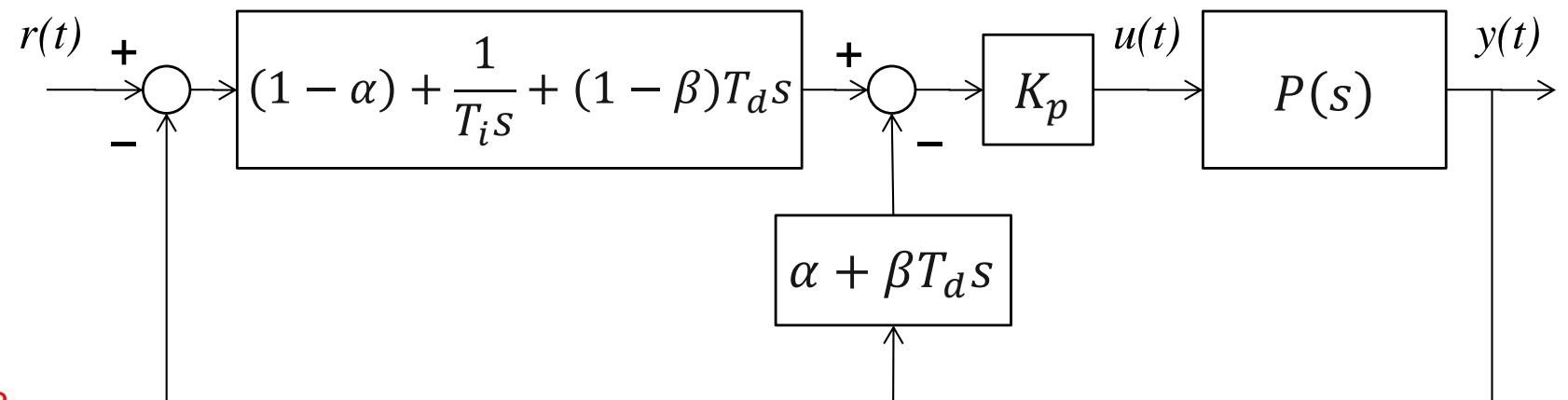


aggiunta dell'azione di **feedforward (ffw)**
(per inseguimento di riferimento variabile)

schema **equivalente**,
con **sole** azioni di **feedback (fbk)**
(dall'errore e dall'uscita misurata)

da discretizzare
come prima per ottenere
un **PID + ffw digitale**

$\alpha = 0$	$\beta = 0$	①
$\alpha = 0$	$\beta = 1$	②
$\alpha = 1$	$\beta = 1$	③
$0 < \alpha < 1$	$0 < \beta < 1$...

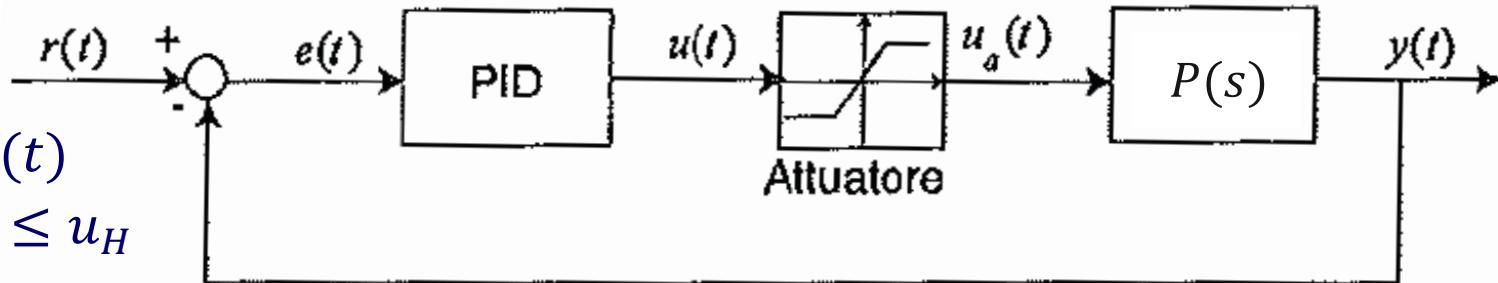


vedi schemi in slide #23

Saturazione dell'attuatore sotto *PID*

saturazione fisica
dell'attuatore

$$u_a(t) = \begin{cases} u_H, & u_H \leq u(t) \\ u(t), & u_L \leq u(t) \leq u_H \\ u_L, & u(t) \leq u_L \end{cases}$$



(di solito simmetrica rispetto allo 0,
ma non necessariamente)

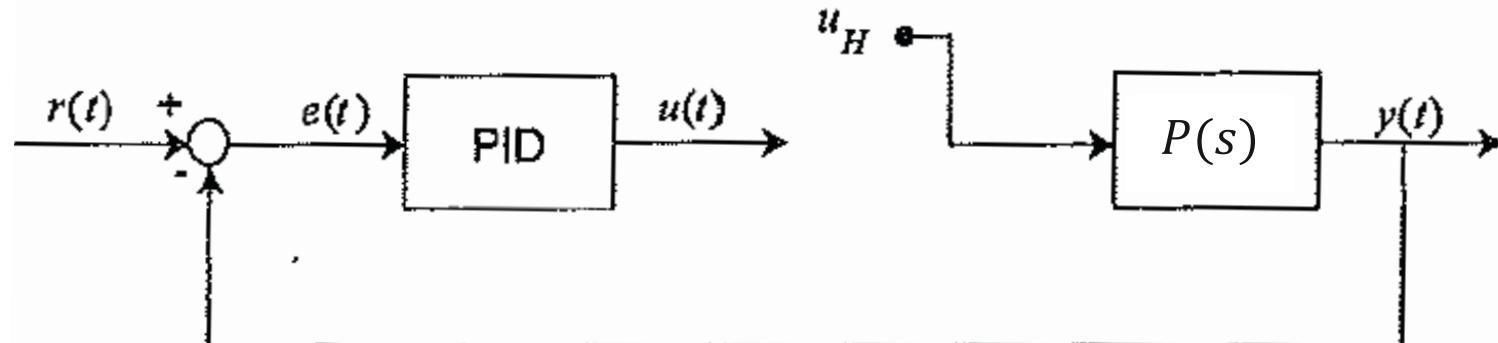
il comando attuato
NON dipende più
dall'uscita del *PID*
(ossia dall'azione di
controllo in feedback
calcolata dall'errore)



come fosse ad **anello aperto**
(o con una riduzione dei guadagni)

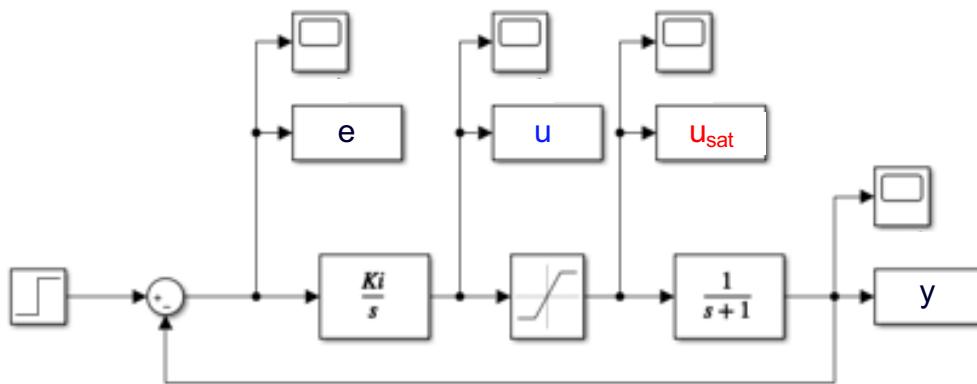


ad esempio, attuatore saturato
al suo valore massimo



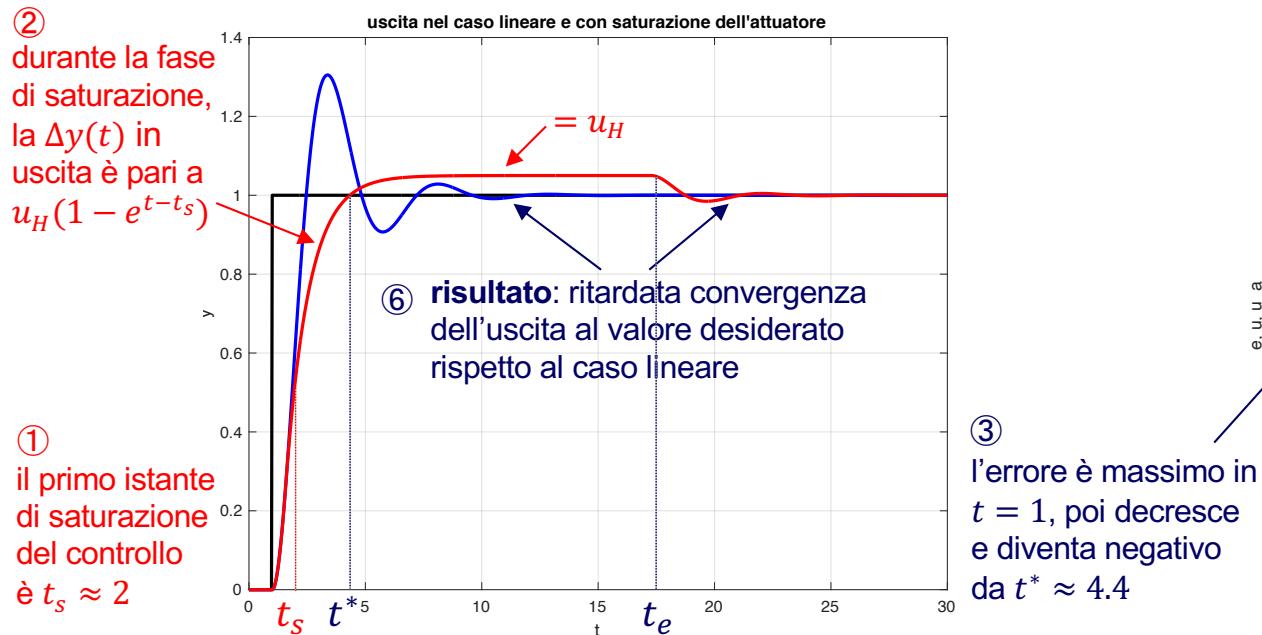
la saturazione del comando di controllo è critica
se c'è un'azione integrale che “**accumula**” errore
anche quando l'attuatore è in saturazione

Esempio #2 – Saturazione da azione I

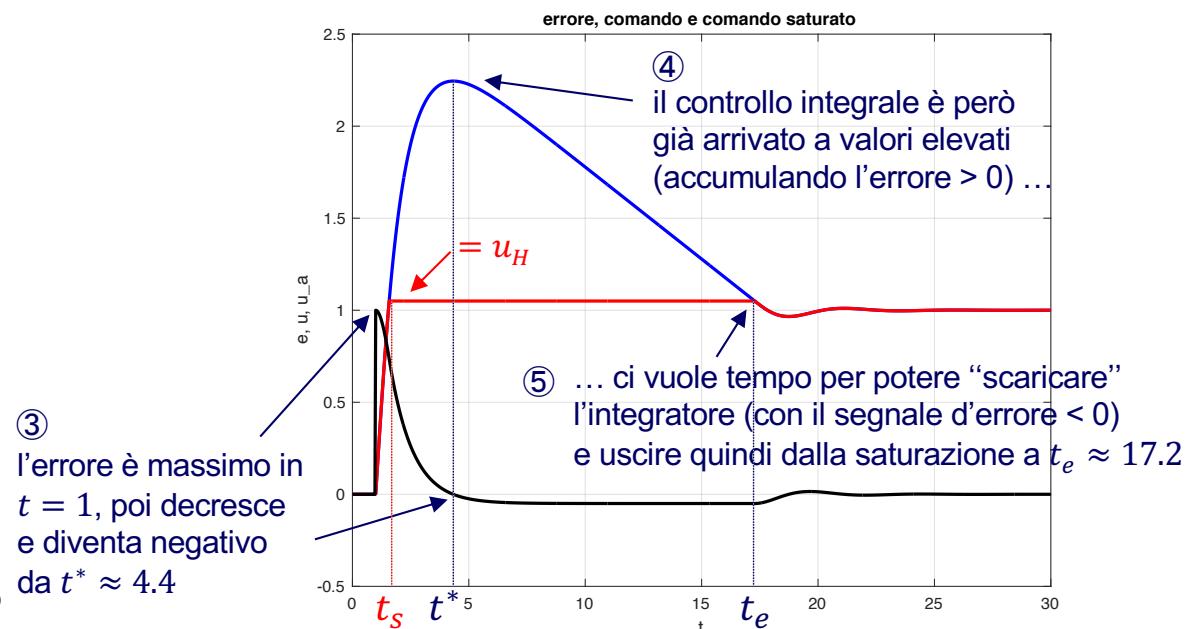


- azione di **controllo integrale**, in presenza di una saturazione di attuazione
- risposta al gradino in $t = 1$, con processo $P(s) = \frac{1}{s + 1}$
- solo guadagno integrale: $K_i = 2$
- saturazione: $u_H = -u_L = 1.05$ (simmetrica)

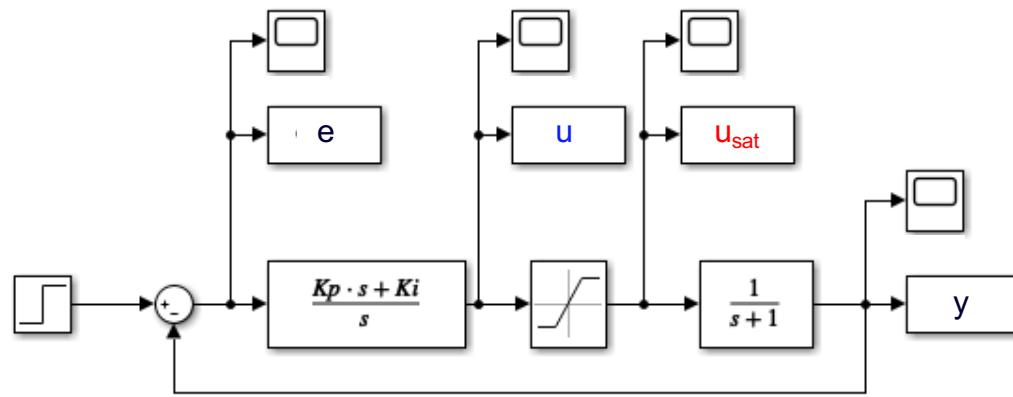
uscita in regime lineare e con saturazione



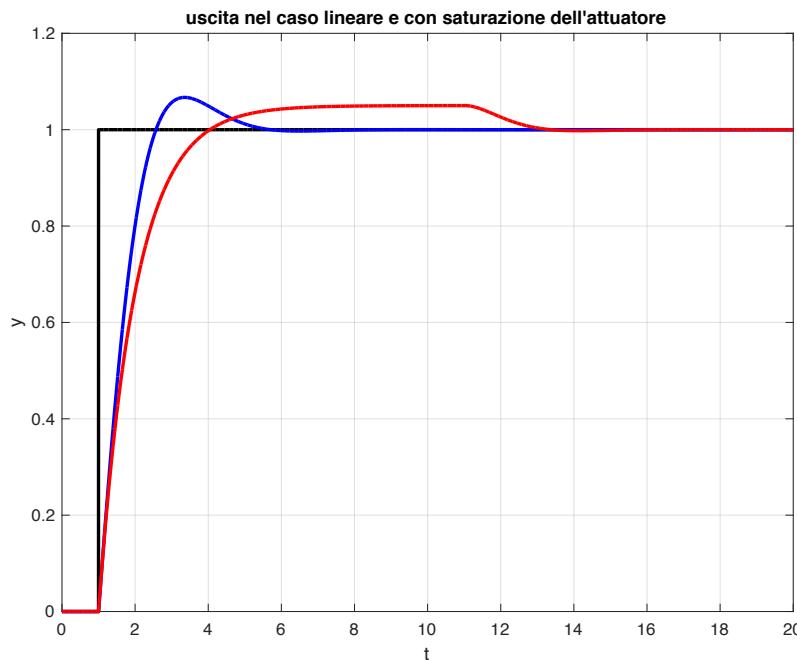
errore, controllo prima u e dopo u_{sat} saturazione



Esempio #3 – Saturazione da azione *PI*



uscita in regime lineare e con saturazione



comportamento
molto simile
al caso con
controllo
solo integrale

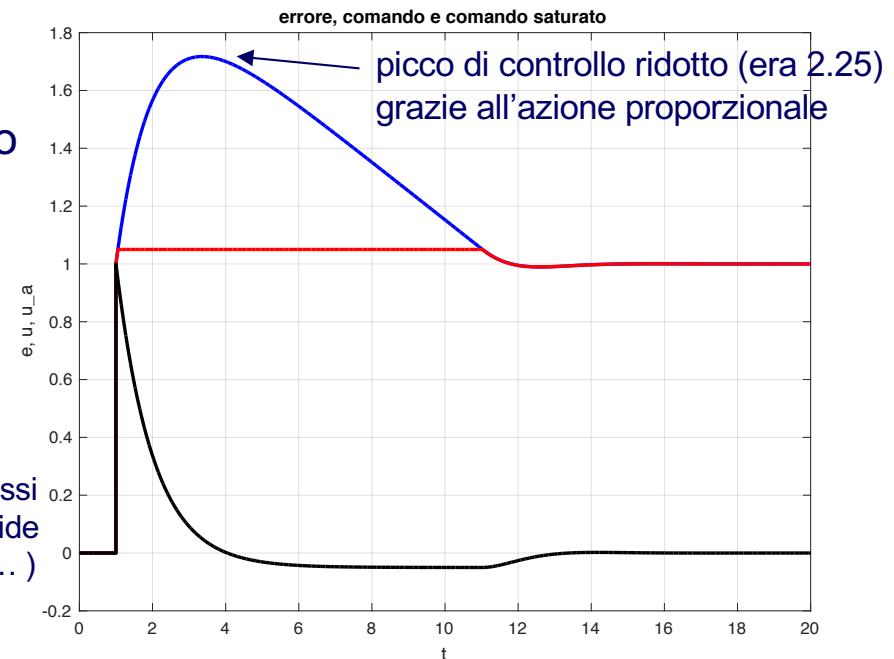
(provare a ripetere i passi
di analisi come nella slide
precedente: ①, ②, ...)

- azione di **controllo *PI***, in presenza di una saturazione di attuazione
- risposta al gradino in $t = 1$, con processo

$$P(s) = \frac{1}{s+1}$$

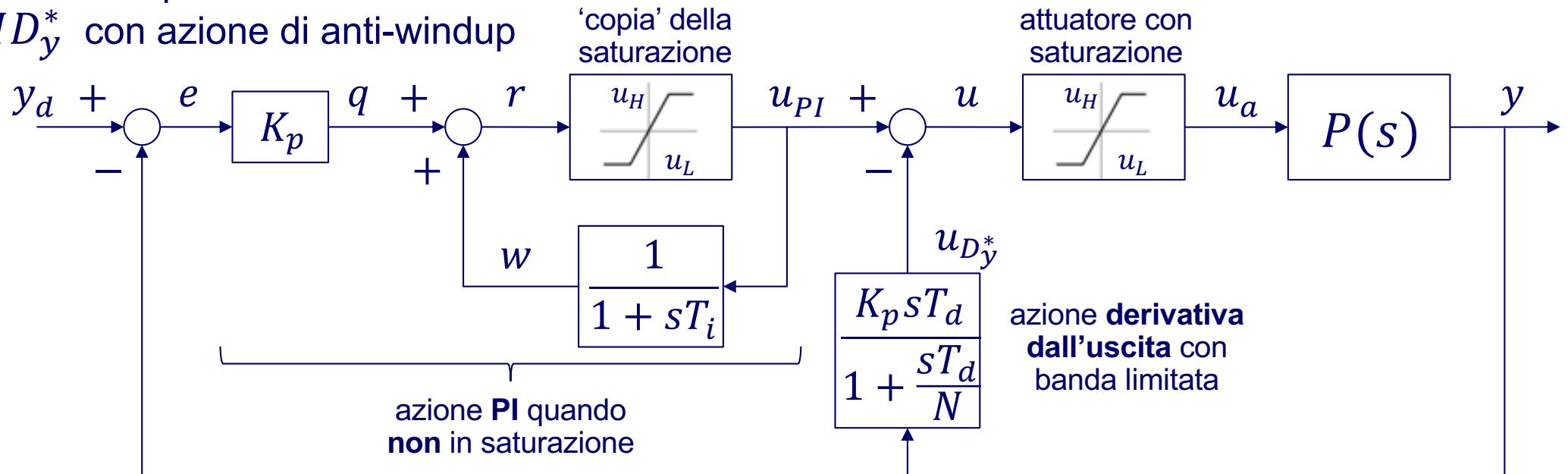
- parametri del controllo PI: $K_p = 1$, $K_i = 2$
- saturazione: $u_H = -u_L = 1.05$ (simmetrica)

errore, controllo prima u e dopo u_{sat} saturazione



PID con anti-windup

possibile implementazione di un
PID_y^{*} con azione di anti-windup



- si usa un **modello algebrico** dell'attuatore con stessi valori di saturazione (oppure si conosce una "misura" dell'effettivo segnale attuato $u_a \neq$ dal controllo calcolato)

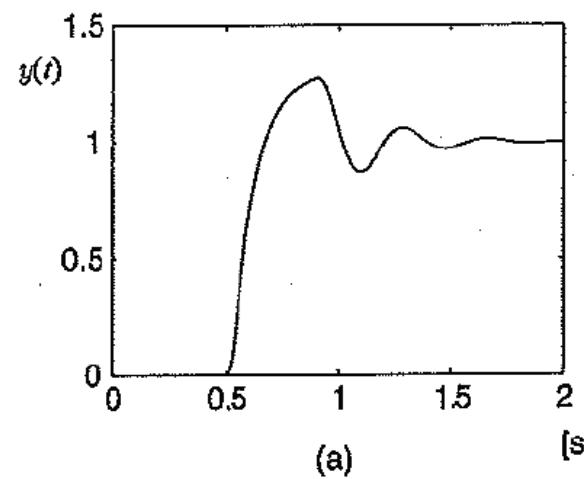
analisi

→ in linearità:
$$\begin{cases} u_{PI}(s) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + sT_i}} q(s) = \frac{1 + sT_i}{sT_i} q(s) = K_p \frac{1 + sT_i}{sT_i} e(s) \Rightarrow \text{azione PI} \\ w(s) = \frac{1}{1 + sT_i} u_{PI}(s) = \frac{K_p}{sT_i} e(s) \Rightarrow w(t) \text{ azione integrale} \end{cases}$$

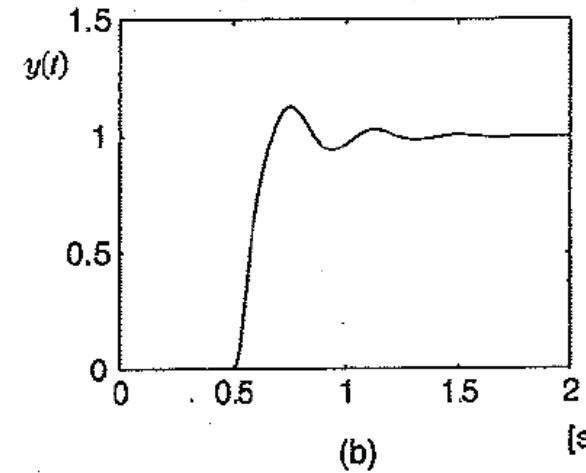
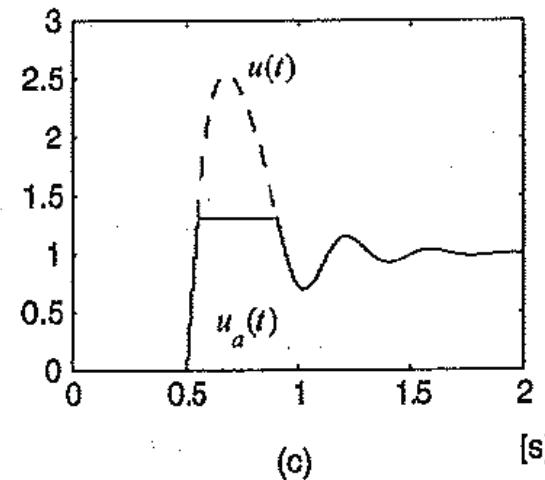
- in saturazione (con $K_p > 0$): se $e(t) > 0$ per un po' $\Rightarrow u_{PI} = u_H$; $w(t) \rightarrow u_H$ (**non si integra più l'errore!**); quando poi $e(t) < 0$, anche $q < 0 \Rightarrow r < u_H \Rightarrow$ esce da saturazione

Effetto dell'anti-windup

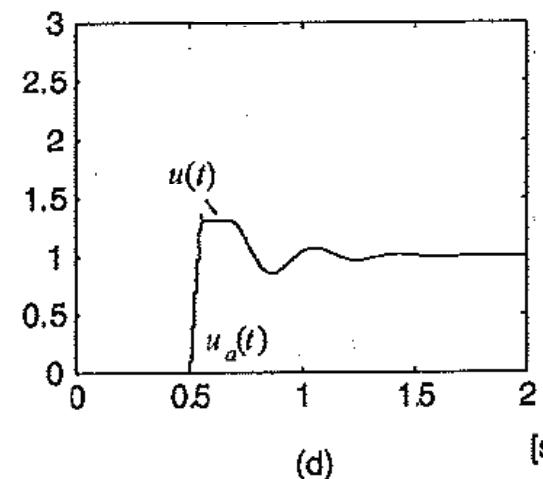
uscita
controllata



comando
di controllo
(e versione
effettivamente
attuata)

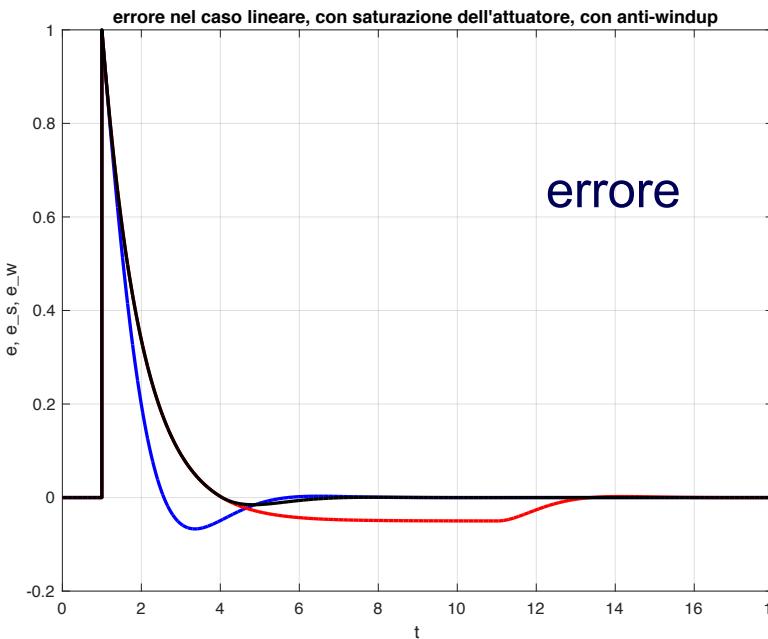
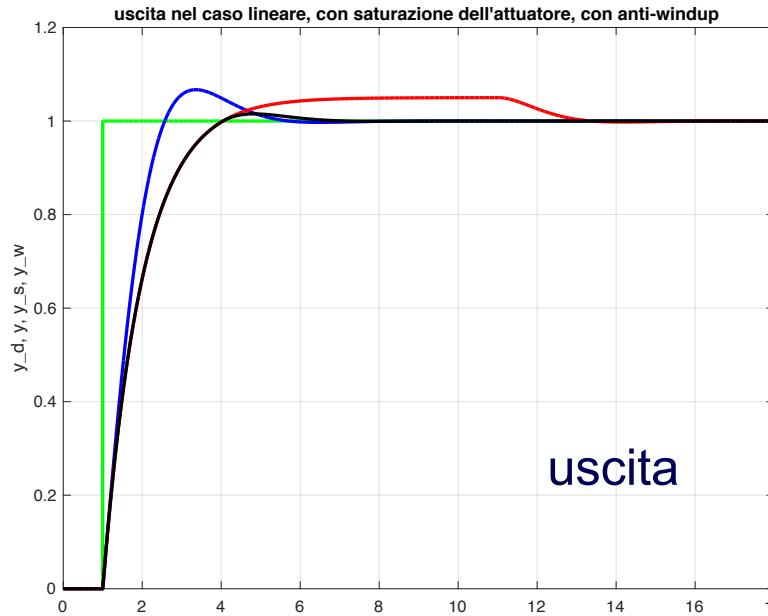


con schema
anti-windup



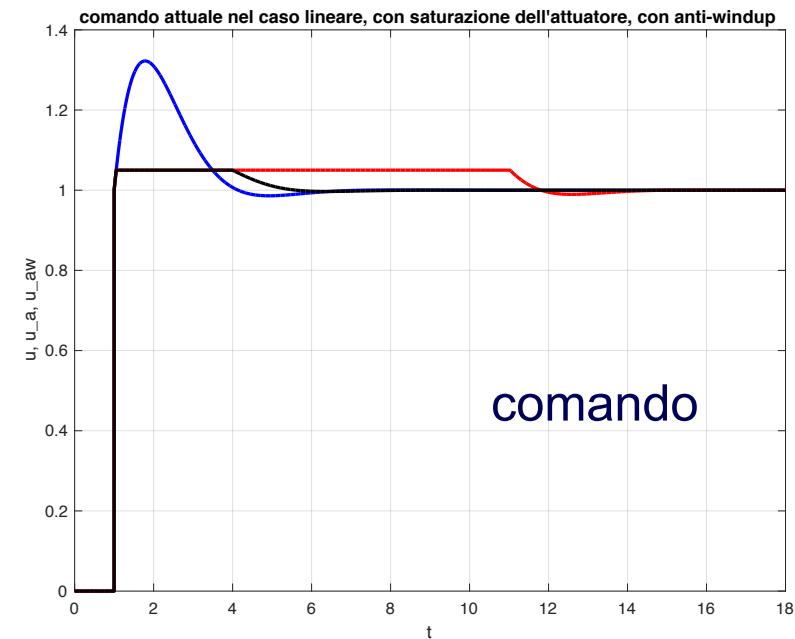
simulazione di un controllo in retroazione di tipo *PID*
in presenza di saturazione dell'attuatore:
realizzazione **standard** (a-c) e realizzazione **anti-windup** (b-d)

Esempio #4 – Saturazione e anti-windup



- azione di **controllo PI**, in presenza di una saturazione di attuazione e anti-windup
 - risposta al **gradino** in $t = 1$, con processo
- $$P(s) = \frac{1}{s + 1}$$
- parametri del controllo **PI**: $K_p = 1$, $K_i = 2$
 - saturazione: $u_H = -u_L = 1.05$ (simmetrica)
 - schema della slide #32 (ma senza azione **D**)

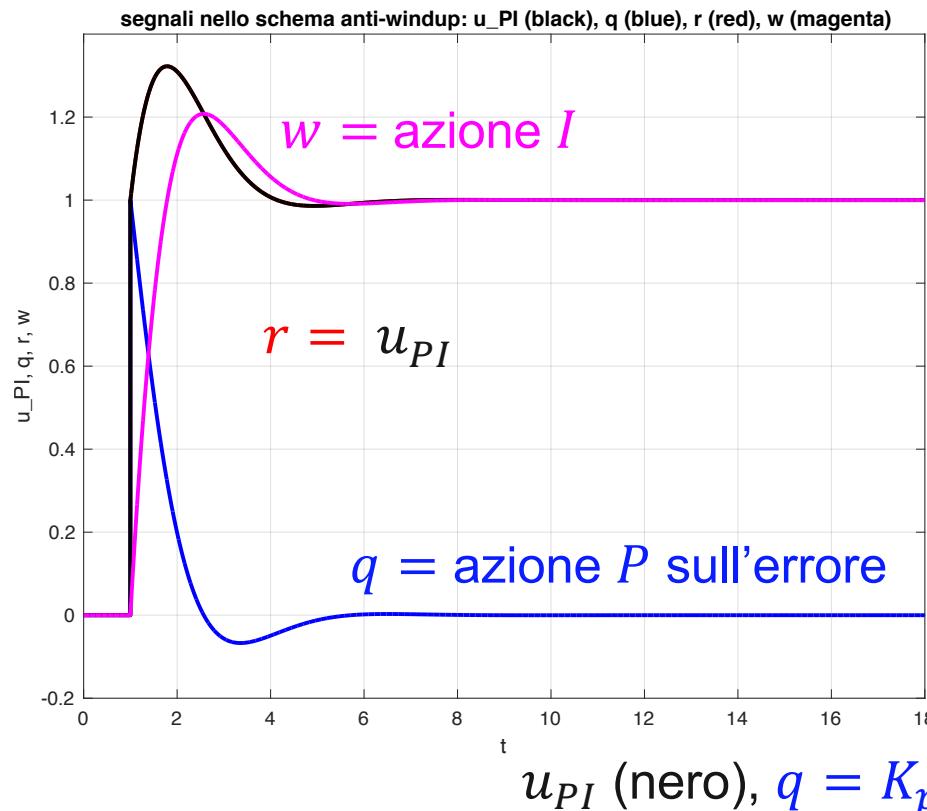
regime lineare
con saturazione
con anti-windup



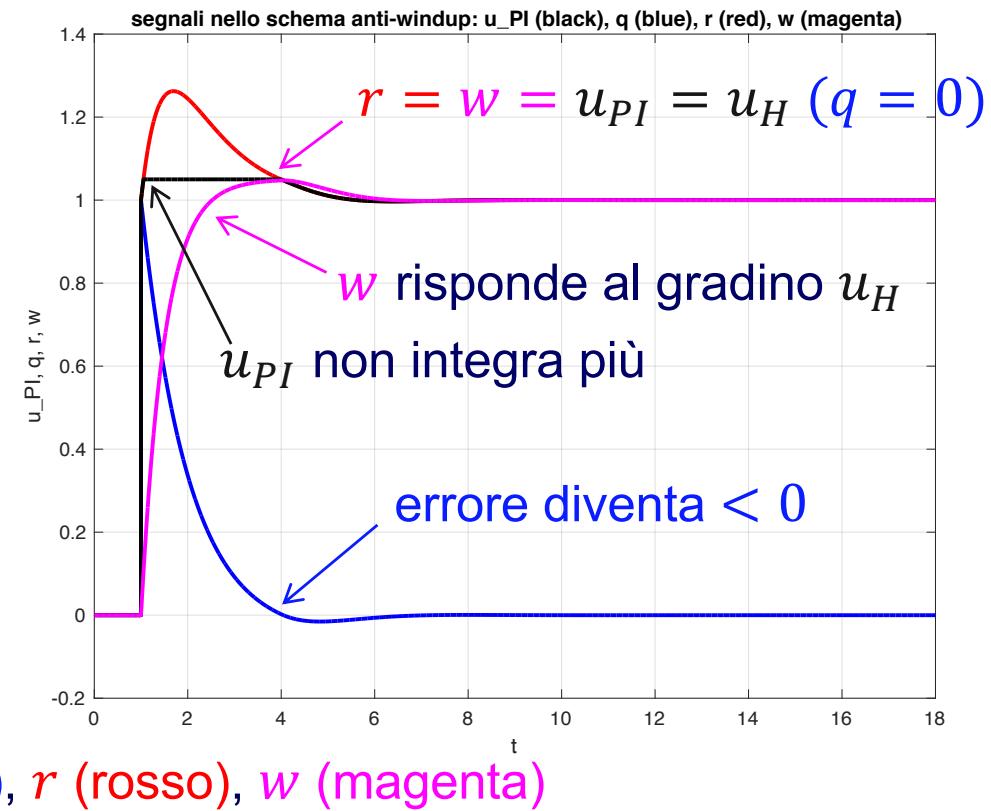
Esempio #4 – Segnali nello schema anti-windup

- controllo **PI** con anti-windup, in assenza e presenza di saturazione di attuazione
- confronto tra segnali all'interno dello schema anti-windup (analogico)
- risposta al gradino in $t = 1$, con processo $P(s) = \frac{1}{s + 1}$
- parametri del controllo **PI**: $K_p = 1$, $K_i = 2$

saturazione assente: $u_H = -u_L = 1.4$

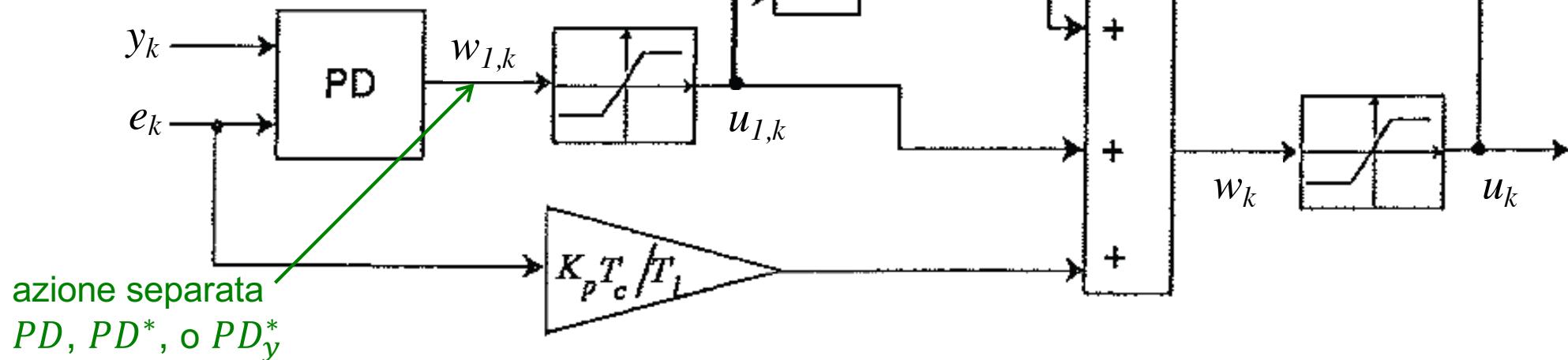


saturazione presente: $u_H = -u_L = 1.05$



PID digitale con anti-windup

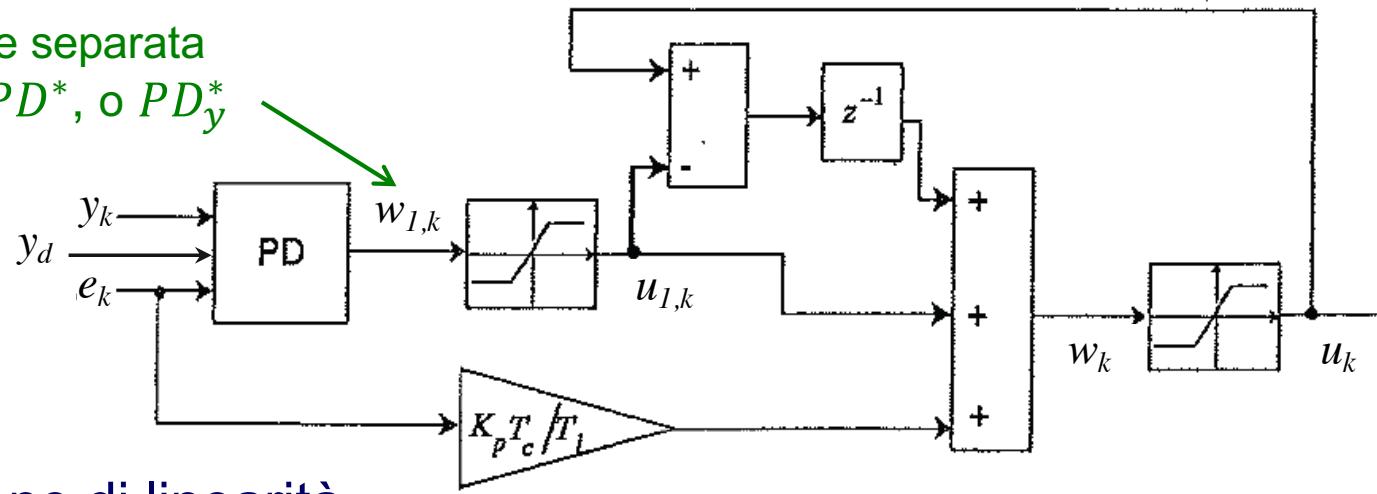
una possibile realizzazione
anti-windup di un regolatore
PID digitale



- in questo schema, **due** saturazioni: sulla sola azione *PD* e sul comando finale
- l'integrazione dell'errore viene **bloccata automaticamente** quando c'è saturazione
- non evita saturazioni, ma solo l'inutile “accumulo” dell'azione integrale sull'errore
 - ➔ altrimenti l'eccesso di questa azione andrebbe poi “scaricato” (quando l'errore avrà cambiato segno), prima di poter rientrare nel dominio di linearità dell'attuatore
 - ➔ verrebbe quindi rallentato il recupero della corretta azione *PID*

Analisi del *PID* digitale anti-windup

azione separata
 PD , PD^* , o PD_y^*



- nella regione di linearità

$$u_k (= w_k) = u_{1,k} + \frac{K_p T_c}{T_i} e_k + (u_{k-1} - u_{1,k-1}) = (1 - z^{-1}) u_{1,k} + \frac{K_p T_c}{T_i} e_k + z^{-1} u_k$$

$$(\quad = w_{1,k})$$

➡ $u_k = u_{1,k} + \frac{K_p T_c}{T_i} \frac{e_k}{1 - z^{-1}}$ esegue l'azione ***PD + I*** standard

- entrambi i blocchi in saturazione (da almeno 1 passo di campionamento)

$$u_{k-1} = u_H \quad u_{1,k} = u_{1,k-1} = u_H \quad \text{ad esempio, attuatore saturato al suo valore massimo}$$

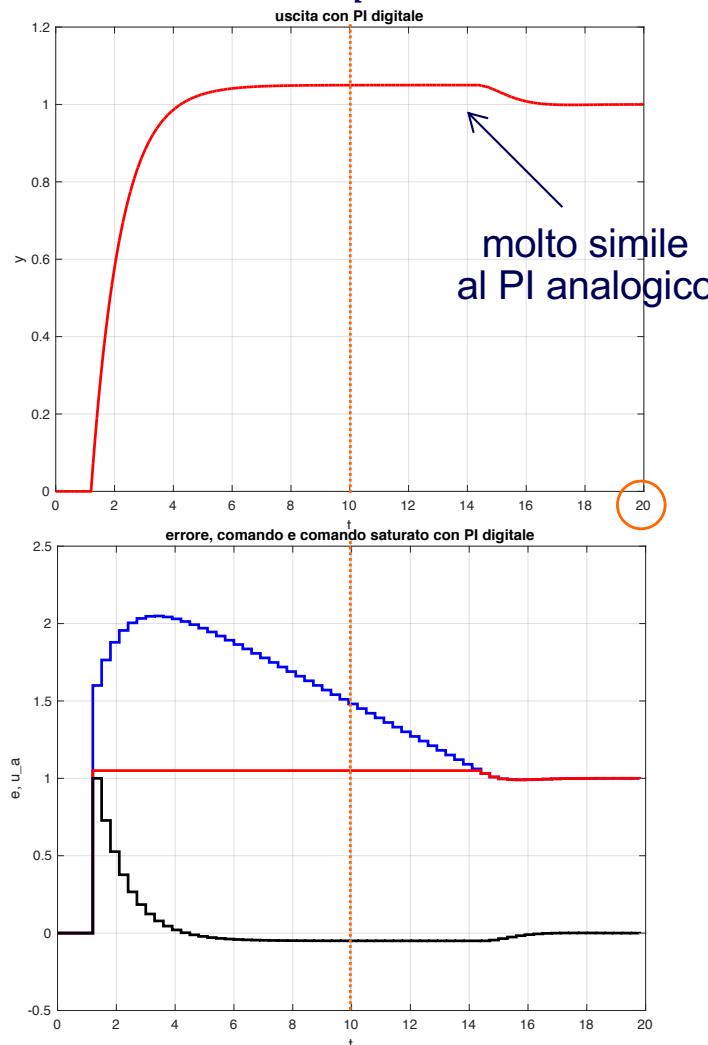
➡ $w_k = u_H + \frac{K_p T_c}{T_i} e_k + (u_H - u_H) = u_H + \frac{K_p T_c}{T_i} e_k$

NON integra più!

se $e_k < 0 \Rightarrow w_k < u_H$!

Esempio #4bis – Anti-windup digitale

- controllore ***PI*** **digitale**, con saturazione e schema **anti-windup** (come in slide #36)
- risposta al gradino unitario in $t = 1$ per il processo $P(s) = \frac{1}{s + 1}$
- parametri ***PI***: $K_p = 1$, $T_i = 0.5$ ($K_i = 2$), $T_c = 0.3$ s, saturazione: $u_H = -u_L = 1.05$



↔ senza
e con ⇒
anti-windup

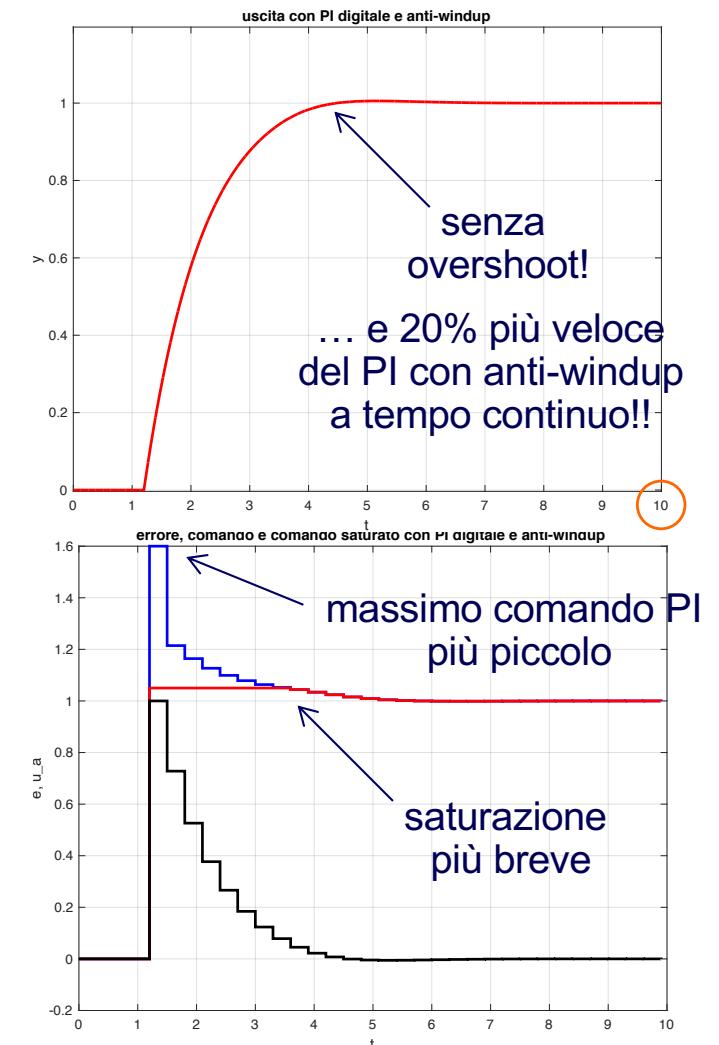
uscita

$\Leftarrow T_{sim} = 20$ s

$T_{sim} = 10$ s ⇒

↔ senza
e con ⇒
anti-windup

errore (campionato)
comando calcolato
comando saturato

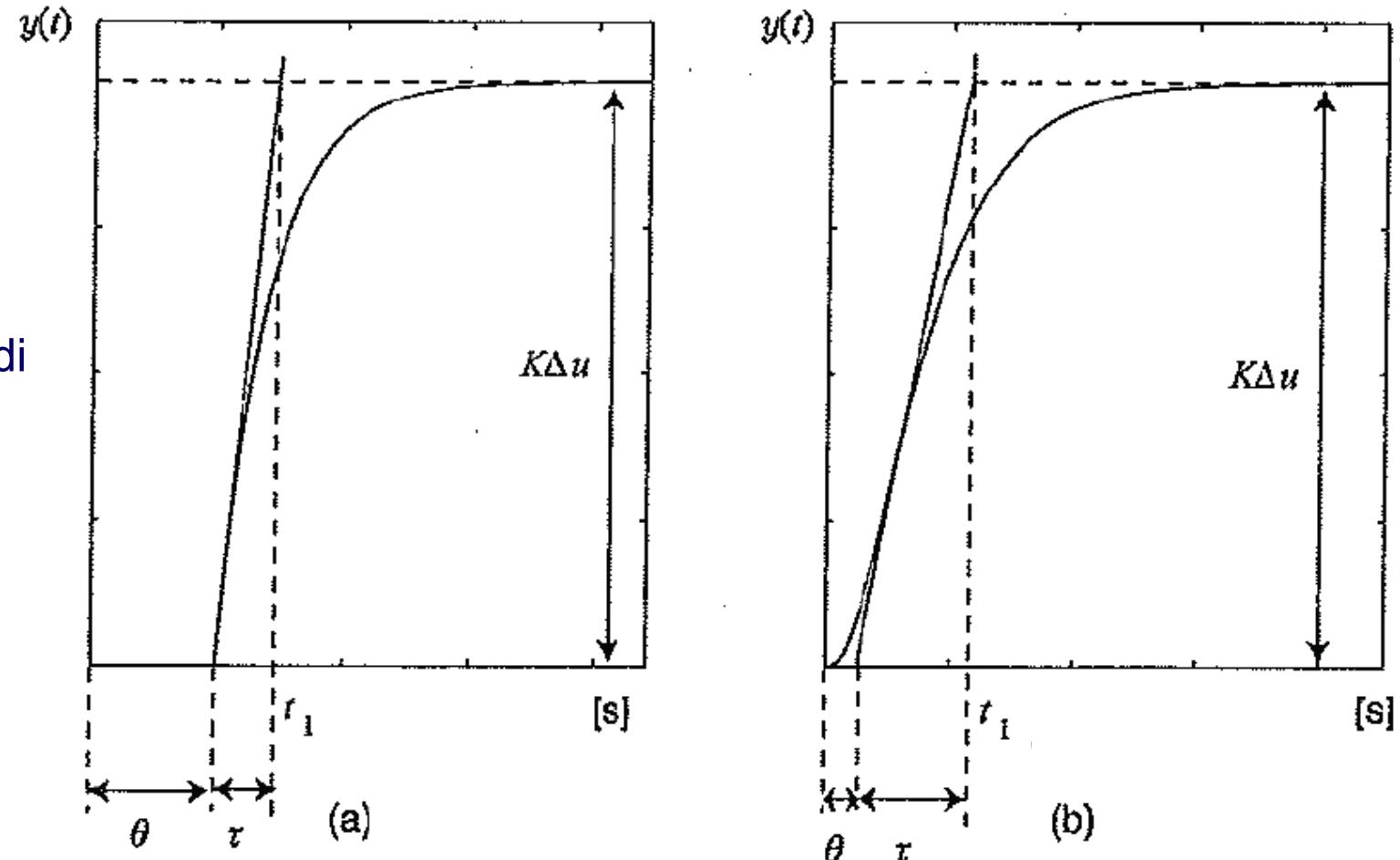


Tuning del *PID* – 1° metodo di Z-N

1° metodo di Z-N
(Ziegler-Nichols)
basato su un
modello semplice
(guadagno, costante di
tempo, ritardo finito)

$$P_m(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{1 + \tau s}$$

che approssima il
processo fisico,
ricavato da parametri
della risposta ad un
gradino Δu



esempi di deduzione per via grafica del modello di progetto $P_m(s)$:
processo del primo ordine (a) e processo di ordine superiore (b)

nel caso (b), a volte si preferisce definire t_1 come l'istante in cui
la risposta raggiunge il 63% del valore di regime

Scelta dei parametri del *PID*

Tipo	1° metodo di		
	Ziegler-Nichols	Cohen-Coon	3C
<i>P</i>	$K K_p = (\theta/\tau)^{-1}$	$K K_p = (\theta/\tau)^{-1} + 0.333$	$K K_p = 1.208(\theta/\tau)^{-0.956}$
<i>PI</i>	$K K_p = 0.9(\theta/\tau)^{-1}$ $T_i/\tau = 3.33(\theta/\tau)$	$K K_p = 0.9(\theta/\tau)^{-1} + 0.082$ $T_i/\tau = \frac{3.33(\theta/\tau)[1+(\theta/\tau)/11]}{1+2.2(\theta/\tau)}$	$K K_p = 0.928(\theta/\tau)^{-0.946}$ $T_i/\tau = 0.928(\theta/\tau)^{0.583}$
<i>PID</i>	$K K_p = 1.2(\theta/\tau)^{-1}$ $T_i/\tau = 2(\theta/\tau)$ $T_d/\tau = 0.5(\theta/\tau)$	$K K_p = 1.35(\theta/\tau)^{-1} + 0.27$ $T_i/\tau = \frac{2.5(\theta/\tau)[1+(\theta/\tau)/5]}{1+0.6(\theta/\tau)}$ $T_d/\tau = \frac{0.37(\theta/\tau)}{1+0.2(\theta/\tau)}$	$K K_p = 1.37(\theta/\tau)^{-0.95}$ $T_i/\tau = 0.74(\theta/\tau)^{0.738}$ $T_d/\tau = 0.365(\theta/\tau)^{0.95}$

PID analogico (e sue varianti più semplici)

nel caso di *PID* digitale, si tiene conto del passo di campionamento T_c e si pone

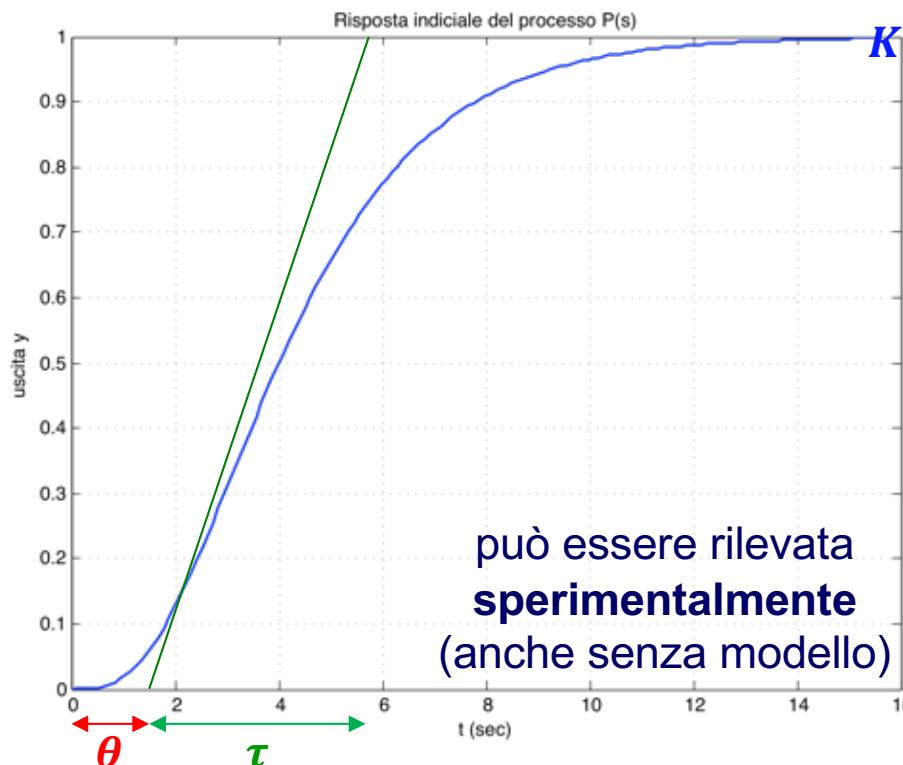
$$\theta \rightarrow \theta^D = \theta + \frac{T_c}{2} \quad \text{utilizzando nella tabella } \frac{\theta^D}{\tau} \Rightarrow \text{ per } KK_p, T_i/\tau, T_d/\tau$$

Esempio #5 – Parametri di Z-N

processo
da controllare
(asintoticamente stabile)

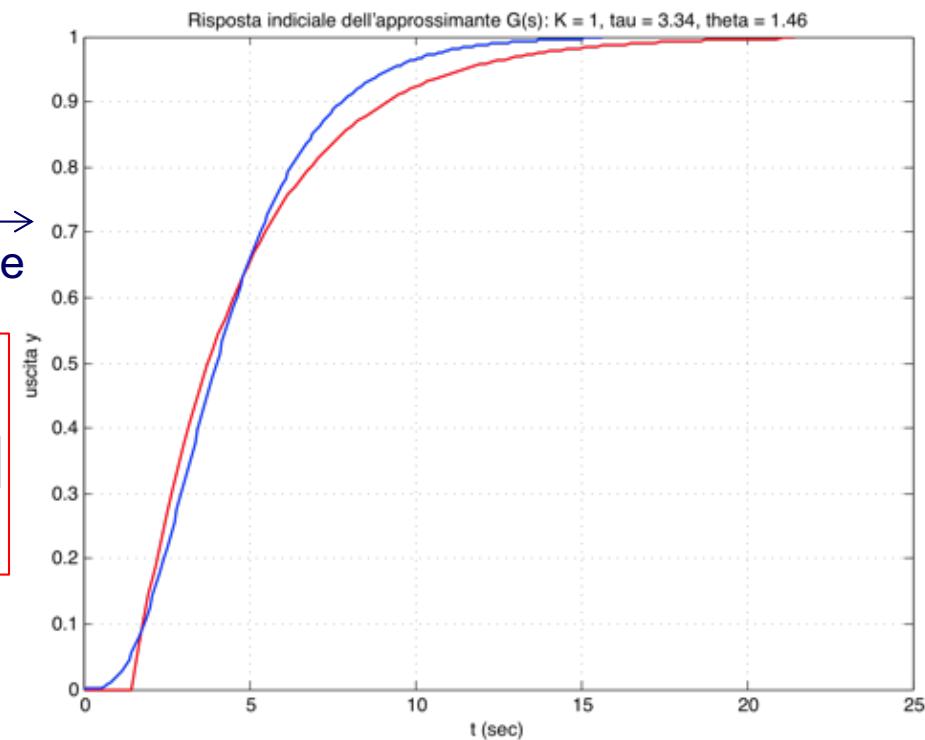
$$P(s) = \frac{1}{(1 + 0.5s)(1 + s)^2(1 + 2s)}$$

Nota: il modello matematico
del processo **non è** detto
che sia perfettamente noto, anzi...



analisi grafica
→
risposta indiciale

$$\boxed{\begin{aligned} K &= 1 \\ \theta &= 1.46 [s] \\ \tau &= 3.34 [s] \end{aligned}}$$



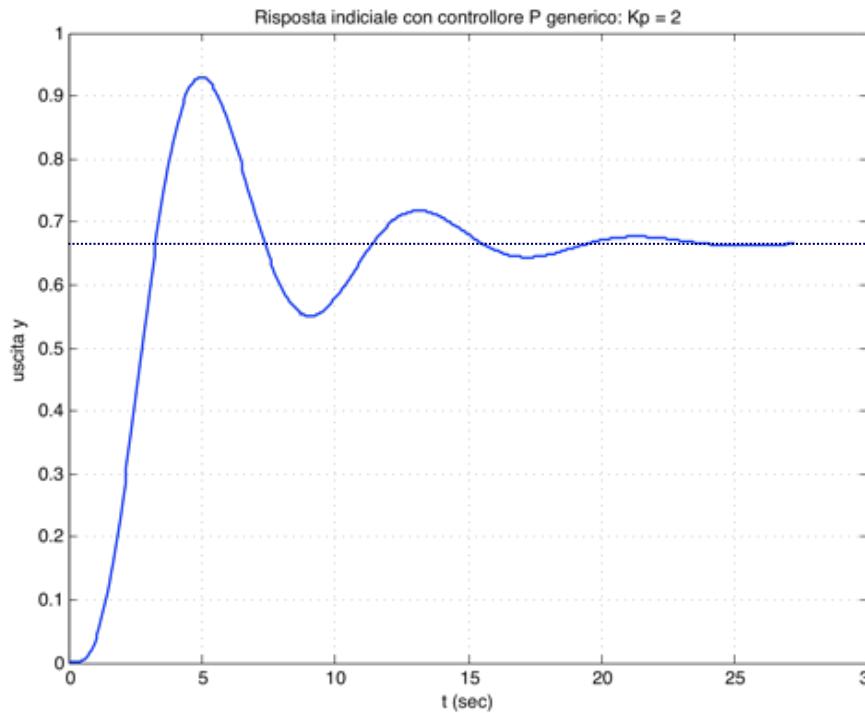
$$P_m(s) = \frac{e^{-1.46s}}{1 + 3.34s}$$

Esempio #5 – Prove con *PID*

processo
da controllare

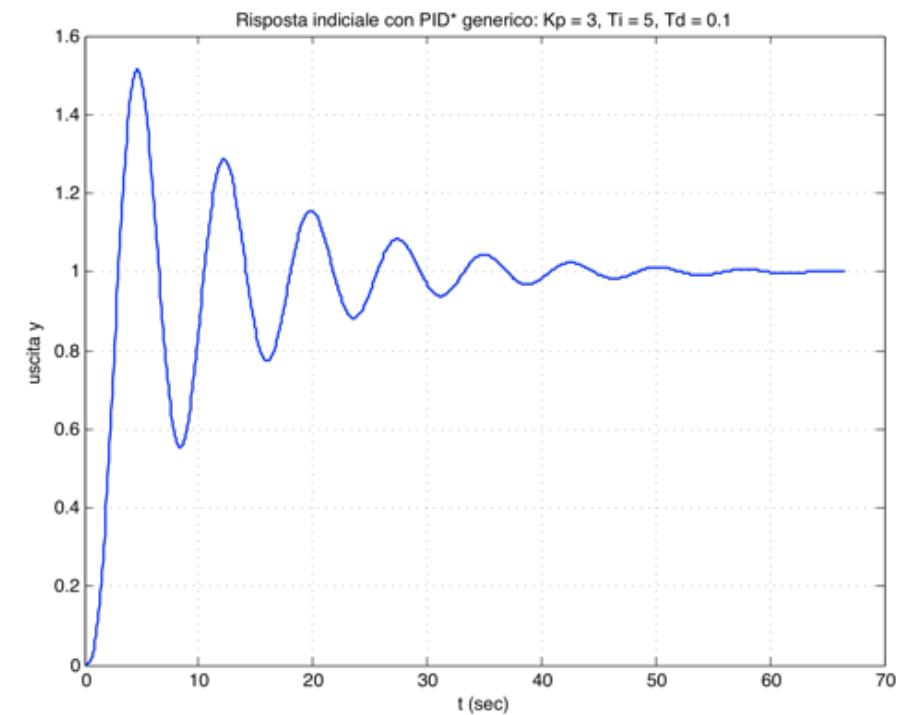
$$P(s) = \frac{1}{(1 + 0.5s)(1 + s)^2(1 + 2s)}$$

vediamo prima cosa succede
con delle leggi di controllo
progettate per “tentativi”...



con controllore solo **proporzionale** (qui $K_p = 2$)

- tempo di salita più rapido ($t_s \approx 3$ s)
- errore a regime permanente ($\approx 33\%$)
- sovraelongazione pronunciata ($\approx 35\%$)
- aumentando il guadagno, oscillazioni crescenti



con controllore **PID_y^*** (con derivata in banda)

- dopo molte prove: $K_p = 3, T_i = 5, T_d = 0.1$
- spesso instabile (con guadagni molto simili!)
- sovraelongazione eccessiva e molte oscillazioni
- tempo di assestamento troppo lungo ($40 \div 50$ s)

Esempio #5 – PID ‘tuned’ con Z-N

processo
da controllare

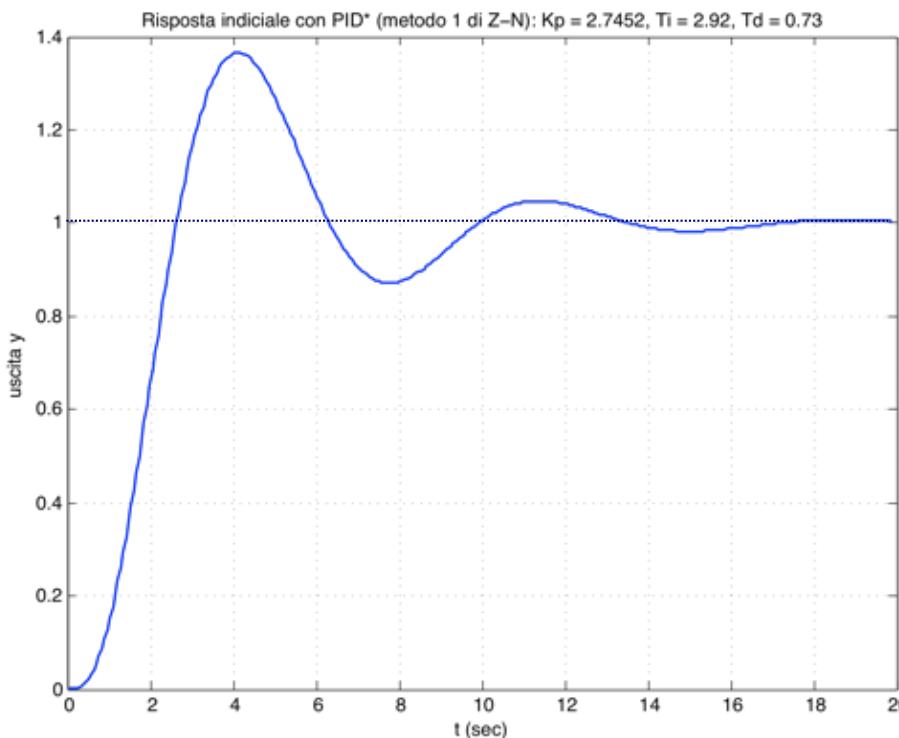
$$P(s) = \frac{1}{(1 + 0.5s)(1 + s)^2(1 + 2s)}$$

controllore PID sintonizzato (‘tuned’)
usando la tabella con il
1º metodo di Ziegler-Nichols

$$PID^*(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + (T_d/N)s} \right)$$

$$K_p = 2.75, T_i = 2.92, T_d = 0.73, N = 5$$

derivata
limitata in banda



- tempo di salita rapido ($t_s \approx 2,5$ s)
- errore a regime permanente nullo
- poche oscillazioni
- tempo di assestamento ≈ 16 s
- sforzo di controllo limitato [vedi prossima slide]
- sovraelongazione ancora elevata ...

Esempio #5 – Versione digitale del *PID*

$$P(s) = \frac{1}{(1 + 0.5s)(1 + s)^2(1 + 2s)}$$

processo da controllare

dall'analisi grafica
della risposta indiciale

$$P_m(s) = \frac{e^{1.46s}}{1 + 3.34s}$$

$$\begin{aligned} K &= 1 \\ \theta &= 1.46 \text{ [s]} \\ \tau &= 3.34 \text{ [s]} \end{aligned}$$

modello per il progetto del PID (uso delle tabelle)

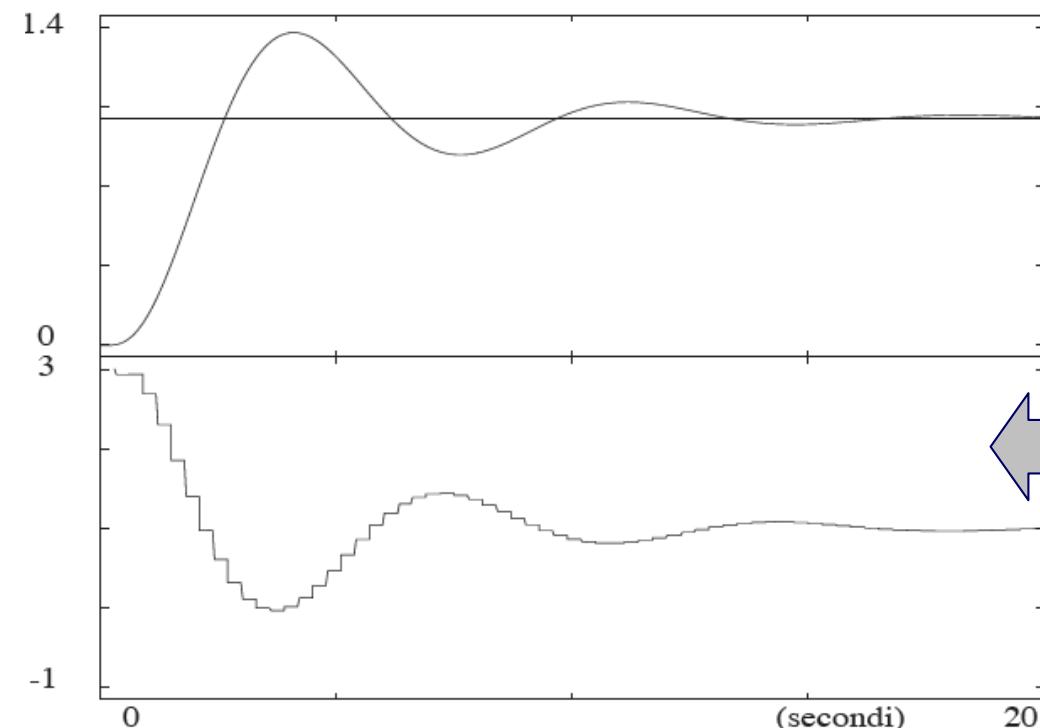
regolatore ***PID* digitale** con $T_c = 0.3 \text{ s}$ $\theta^D = \theta + T_c/2 = 1.46 + 0.15 = 1.61 \Rightarrow \theta^D/\tau = 0.482$

dalla tabella (1° metodo
di Ziegler-Nichols)

$$\begin{aligned} KK_p &= 2.4894, T_i/\tau = 0.9461, T_d/\tau = 0.241 \\ \Rightarrow K_p &= 2.4894, T_i = 3.22, T_d = 0.805 \end{aligned}$$

risposta
indiciale
(a tempo continuo)

uscita del
regolatore *PID*
digitale
[dopo organo di
tenuta ZOH]

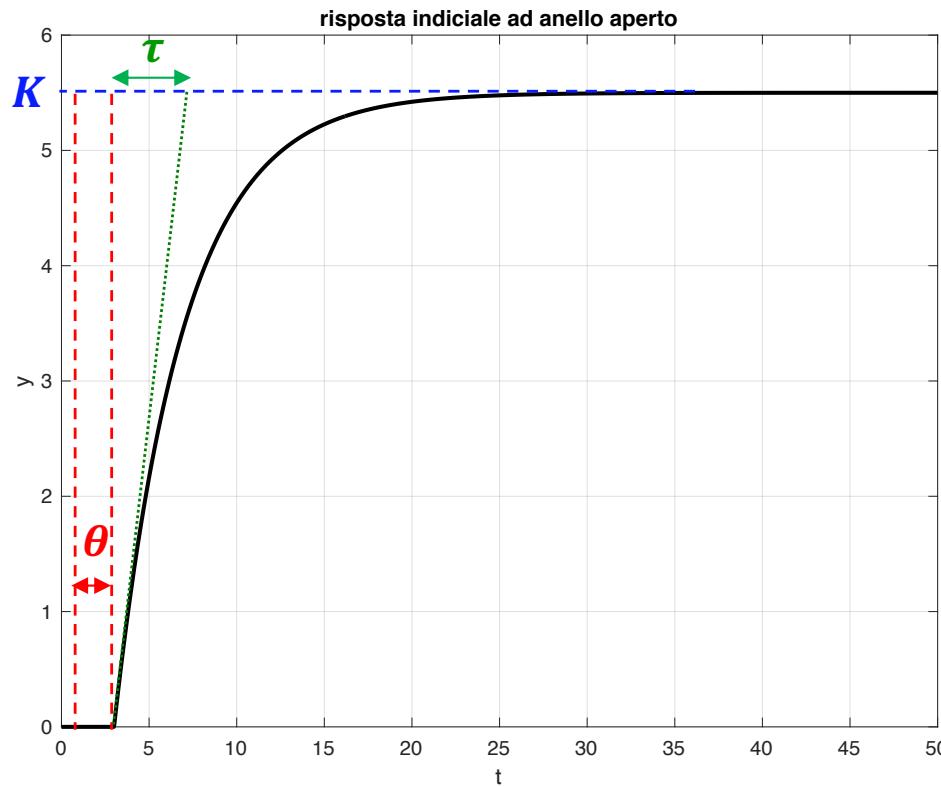


sforzo di controllo
limitato anche
nel transitorio

Esempio #6 – Ritardo finito

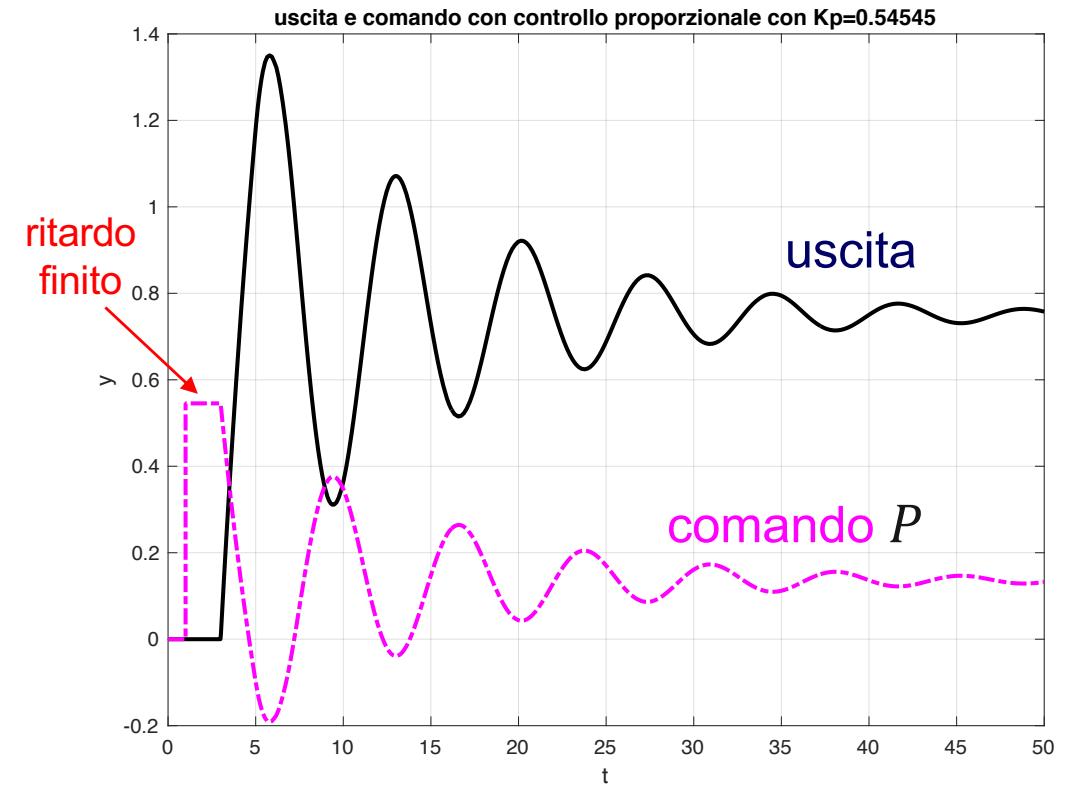
Supponiamo di rilevare sperimentalmente due risposte di un processo (avente un **ritardo finito**)

- risposta indiciale ad anello aperto (gradino unitario all'istante $t = 1$ s)
- risposta indiciale ad anello chiuso con un controllore proporzionale ($K_p \approx 0.54$, di **prova**)



analisi grafica
risposta indiciale

$$\boxed{K = 5.5 \\ \theta = 2 [s] \\ \tau = 4 [s]}$$

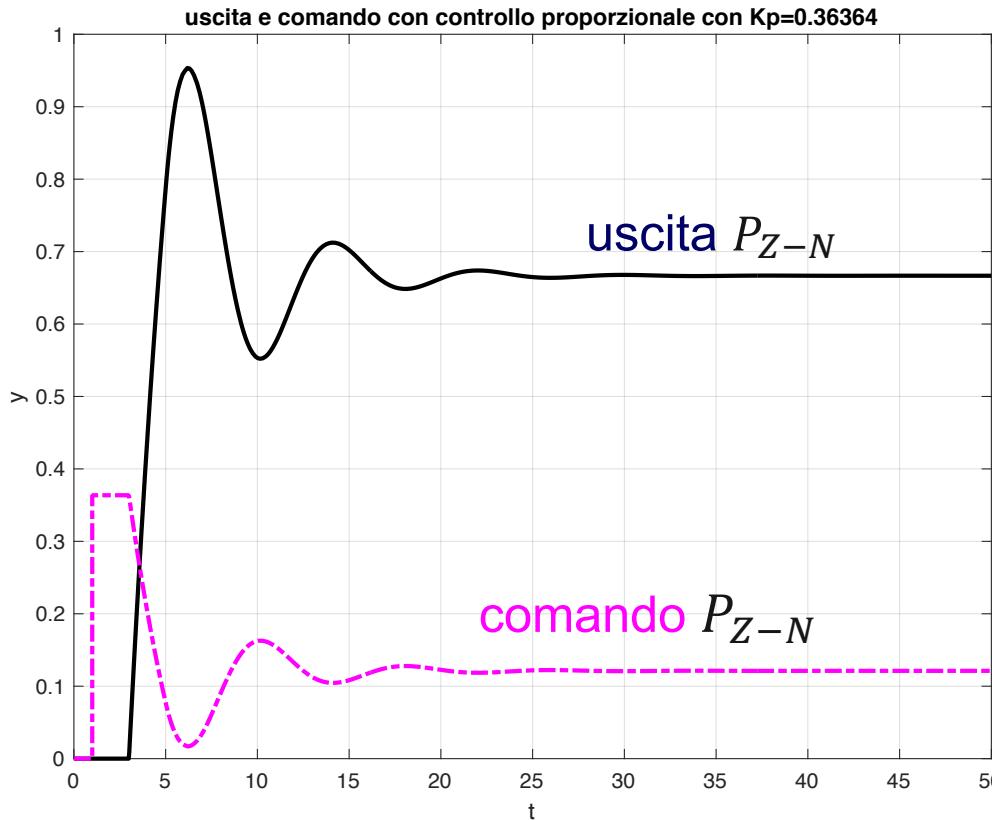


modello per il progetto
del *PID* (dalle tavole)

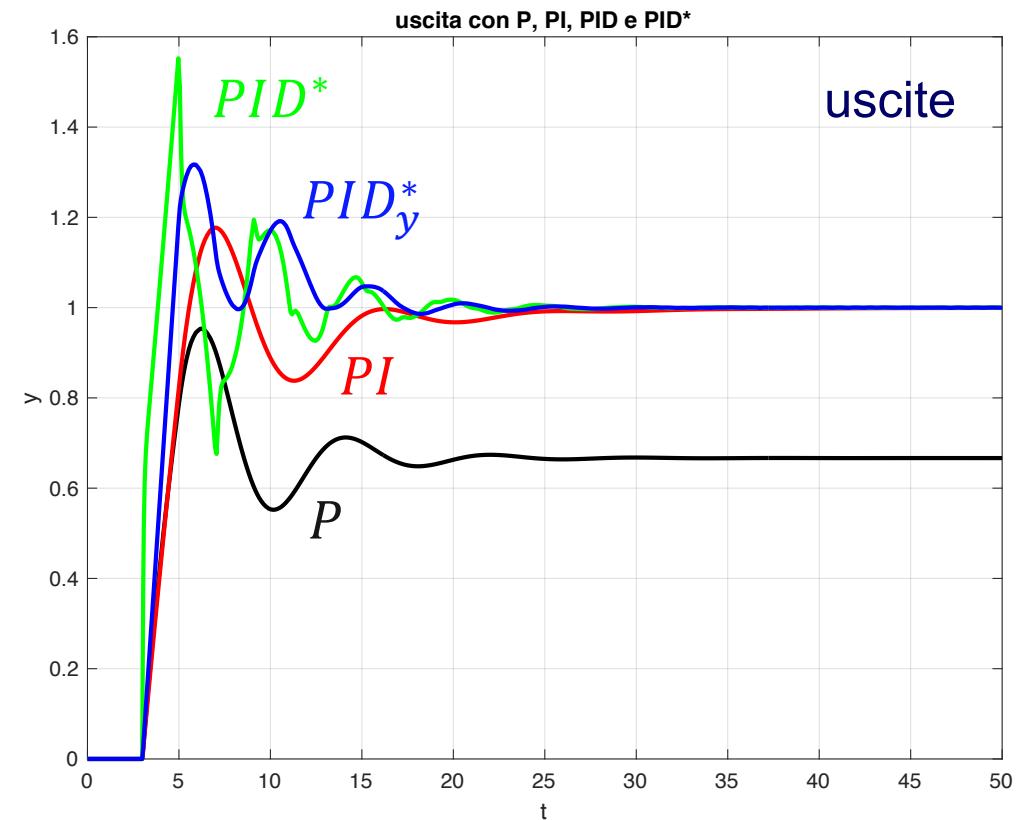
$$P_m(s) = \frac{5.5 e^{-2s}}{1 + 4s}$$

Esempio #6 – Regolatori sintonizzati

Proviamo in sequenza **quattro** regolatori: P , PI , PID^* e PID_y^* (con derivata solo dall'uscita), in cui i guadagni sono dati dalla tabella di Ziegler-Nichols per $(\theta/\tau) = 0.5$



regolatore P : $K_p = 0.3636$

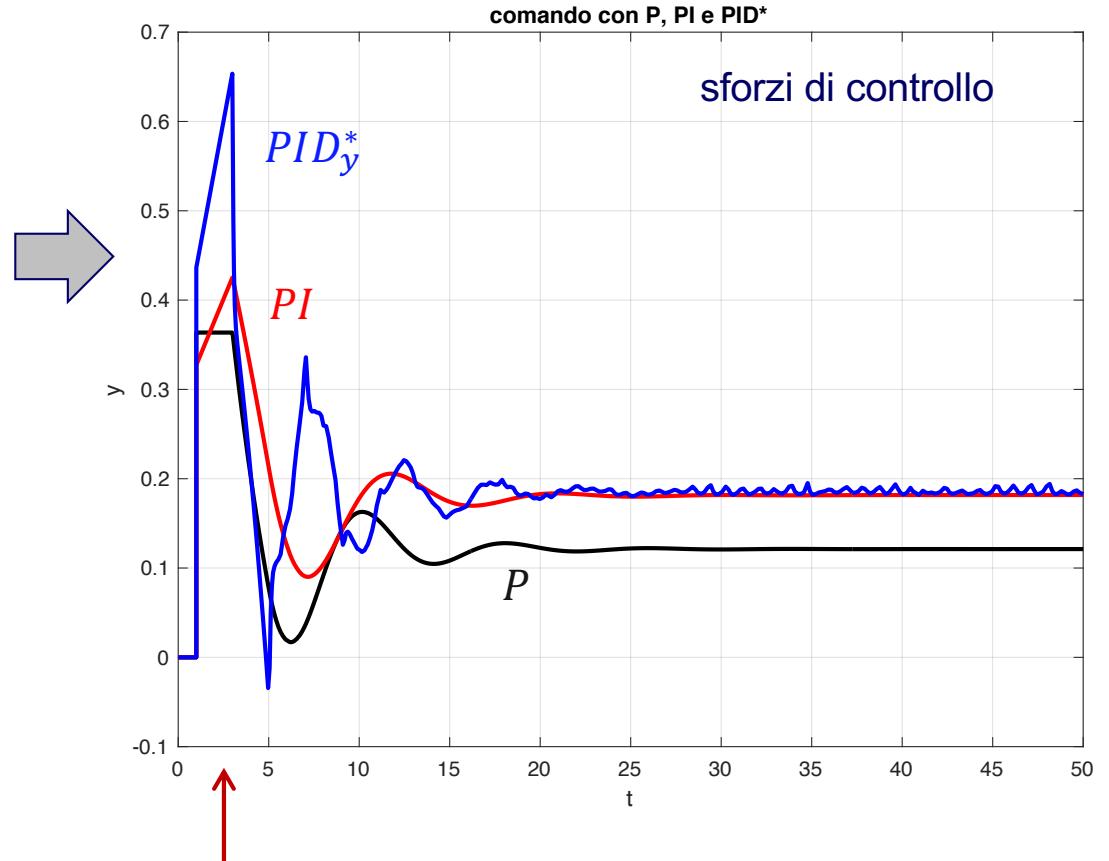
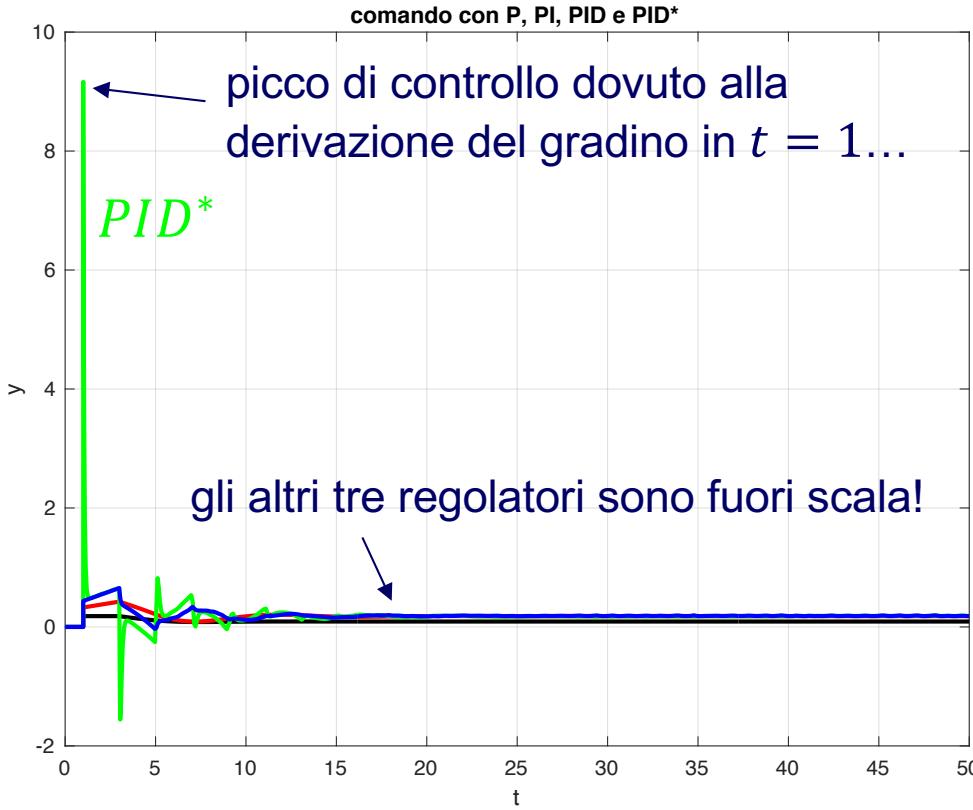


regolatore PI : $K_p = 0.3273, T_i = 6.66$

regolatori PID^* e PID_y^* : $K_p = 0.4364, T_i = 4, T_d = 1, N = 20$

Esempio #6 – Sforzo di controllo

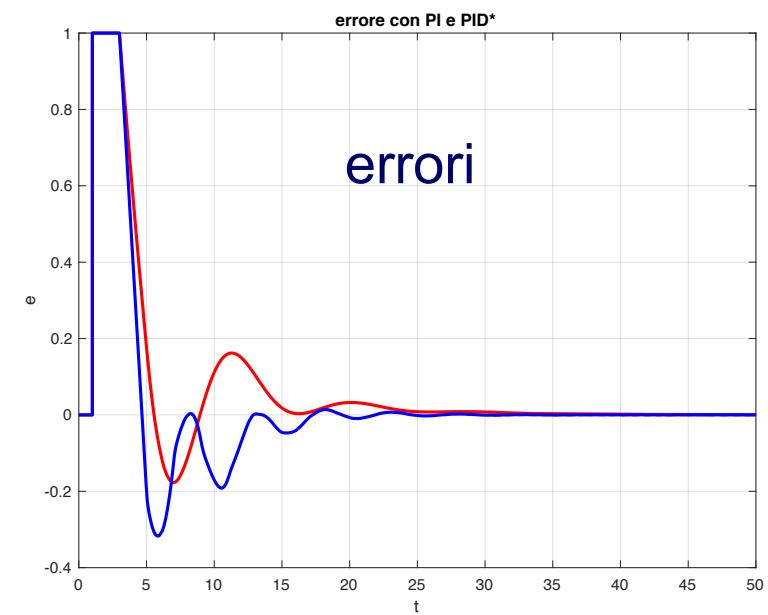
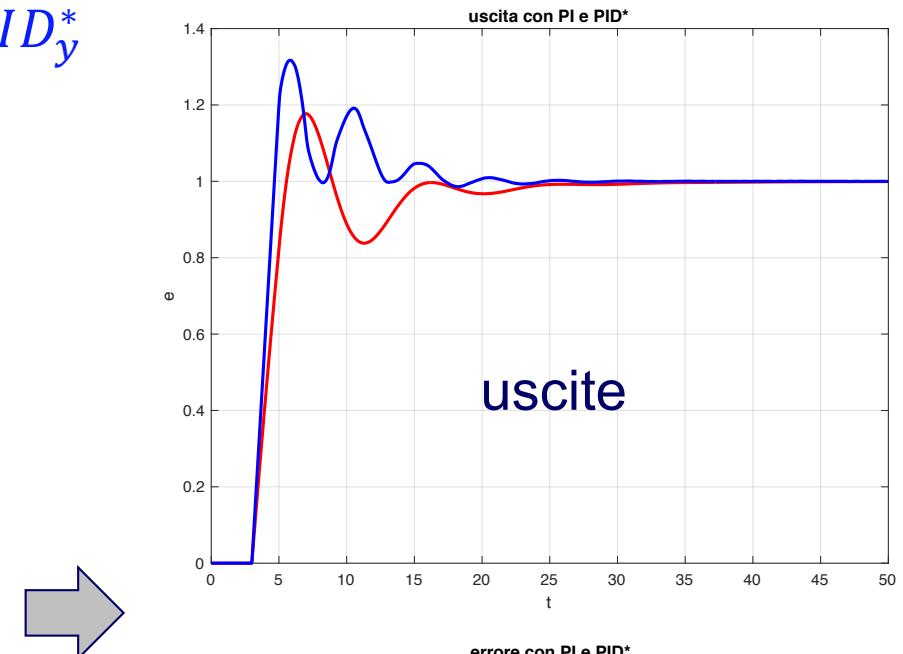
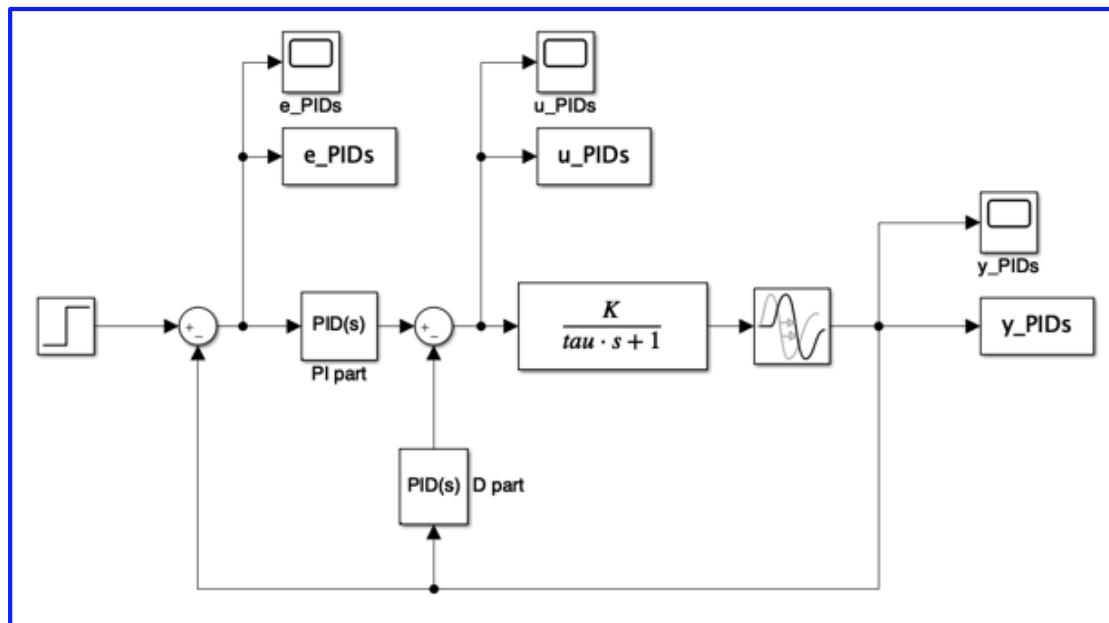
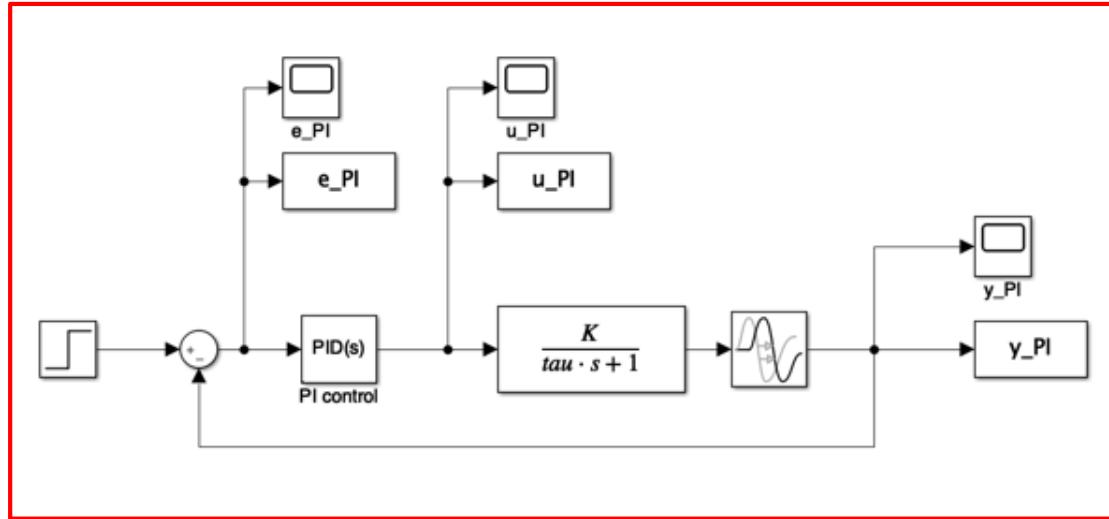
Confronto tra **sforzi di controllo** con i quattro regolatori P , PI , PID^* e PID_y^* (con derivata solo dall'uscita), in cui i guadagni sono dati dalla tabella di Ziegler-Nichols per $(\theta/\tau) = 0.5$



in questo intervallo di ‘ritardo’, le azioni **integrali** accumulano solo il valore del riferimento costante ...

Esempio #6 – PI e PID_y^* ‘tuned’ con Z-N

Schemi Simulink dei due migliori regolatori: PI e PID_y^*



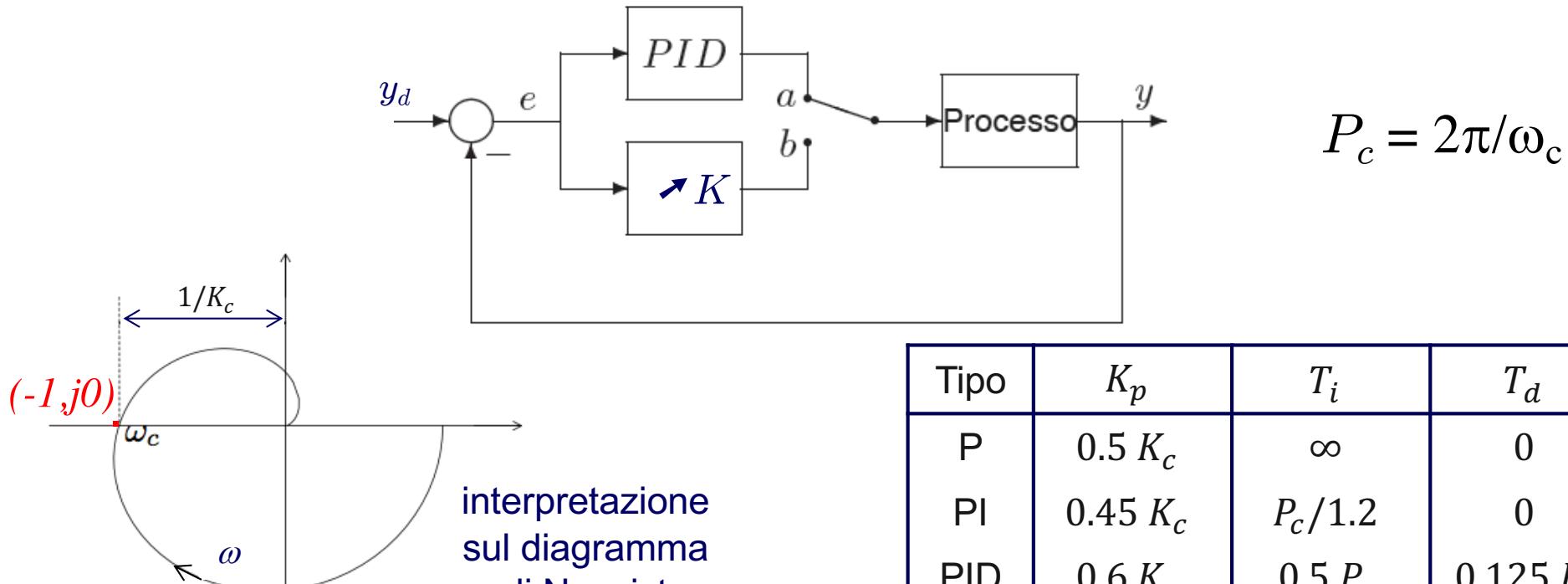
Tuning del *PID* – 2° metodo di Z-N

2° metodo di Ziegler-Nichols (ad anello chiuso)

[posizione di tuning *b*]

1. si chiude l'anello di controllo con la sola azione proporzionale
2. si aumenta il guadagno K fino al valore critico K_c che porta il sistema in oscillazione
3. si ricava il periodo P_c dell'oscillazione critica

[posizione di operazione *a*] *PID* (o sue varianti), dopo la scelta dei guadagni come da tabella



Tipo	K_p	T_i	T_d
P	$0.5 K_c$	∞	0
PI	$0.45 K_c$	$P_c/1.2$	0
PID	$0.6 K_c$	$0.5 P_c$	$0.125 P_c$
PD	$0.85 K_c$	∞	$0.125 P_c$

Esempio #7 – PID ‘tuned’ con 2° Z-N

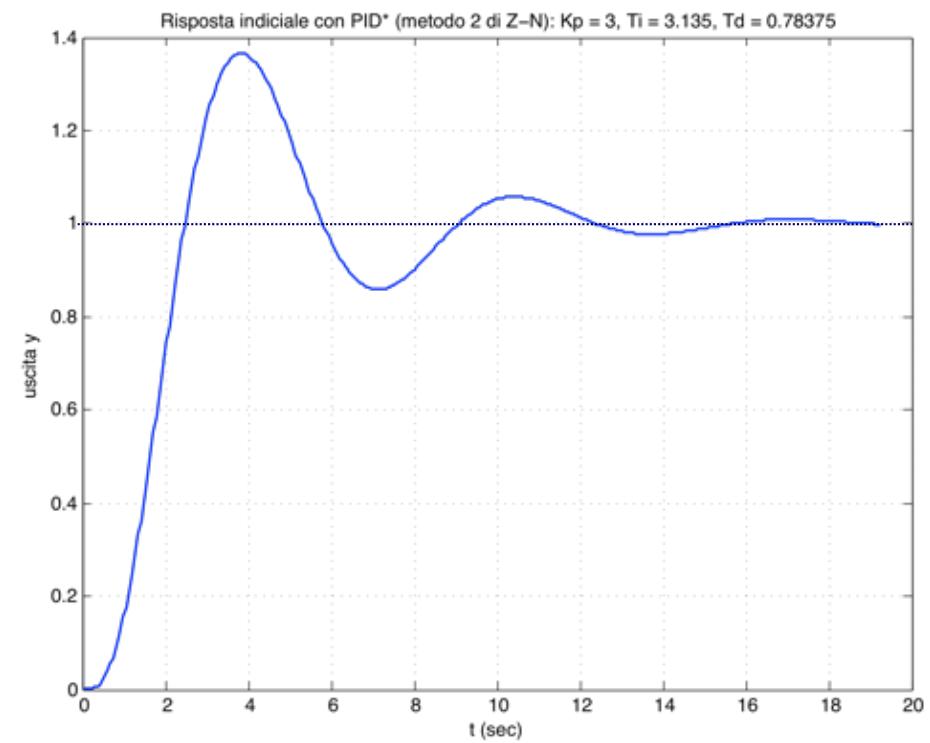
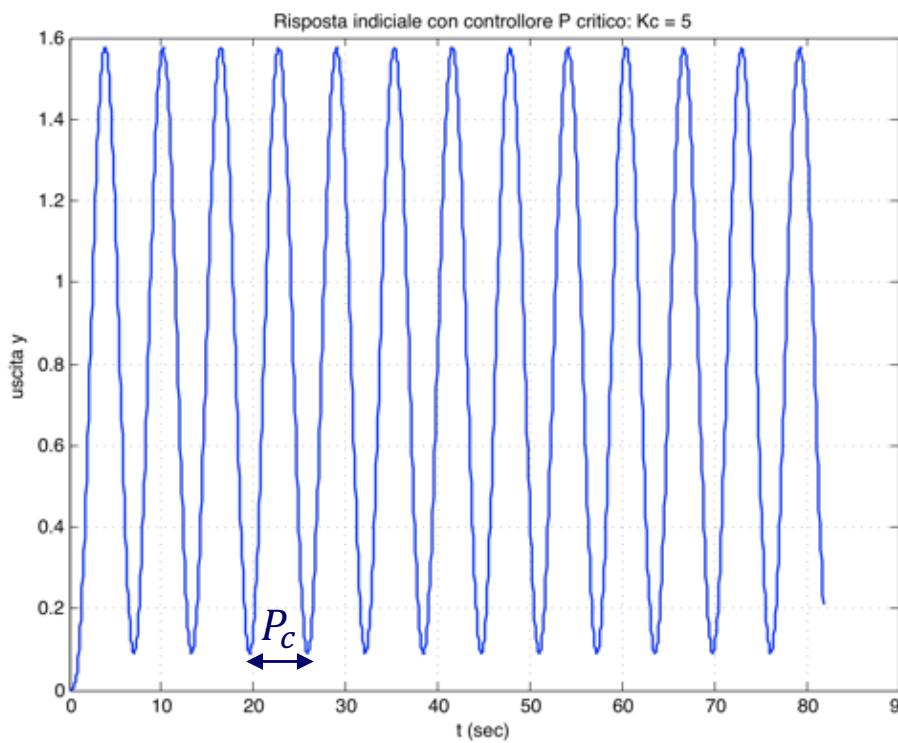
processo
da controllare
(lo stesso dell’Esempio #5)

controllore *PID* sintonizzato
usando la tabella con il
2° metodo di Ziegler-Nichols

$$P(s) = \frac{1}{(1 + 0.5s)(1 + s)^2(1 + 2s)}$$

$$PID^*(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + (T_d/N)s} \right)$$

$$K_p = 3, T_i = 3.13, T_d = 0.78, N = 5$$



- controllore *P* con guadagno critico $K_c = 5$
- periodo di oscillazione (tra picchi) $P_c = 6.27$ s

- risultato molto simile al caso precedente
(anche nella versione digitale)

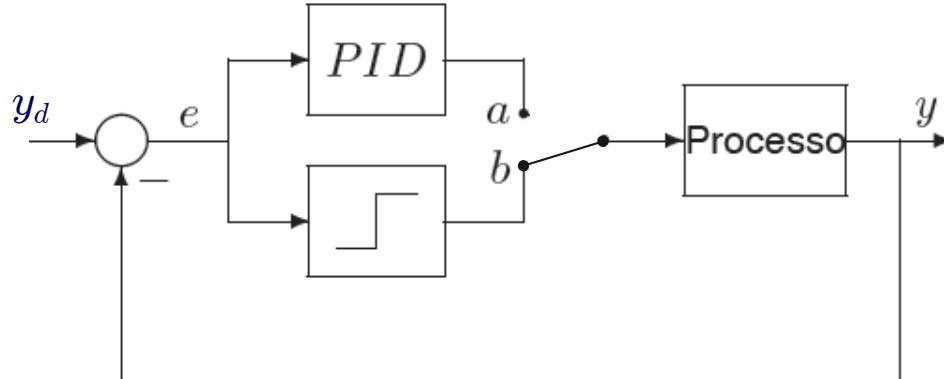
Tuning del *PID* – Variante del 2° metodo di Z-N

2° metodo di Ziegler-Nichols (schema alternativo ad anello chiuso)

[posizione di tuning *b*]

1. si chiude l'anello con una funzione **a relè** di ampiezza d
2. la retroazione **non lineare** innesca una oscillazione critica (ciclo limite) ...
3. dalla teoria delle **funzioni descrittive** (vedi anche appunti sul sito)
 - il segnale di uscita a regime è periodico quasi-sinusoidale di periodo P_c
 - la prima armonica dell'uscita ha un'ampiezza $A = 4d/\pi$
4. si misura il **periodo** P_c dell'**oscillazione critica** e dall'**ampiezza** A dell'uscita si ricava K_c

[posizione di operazione *a*] **PID** (o sue varianti), dopo la scelta dei guadagni come da tabella



$$K_c = \frac{4d}{\pi A}$$

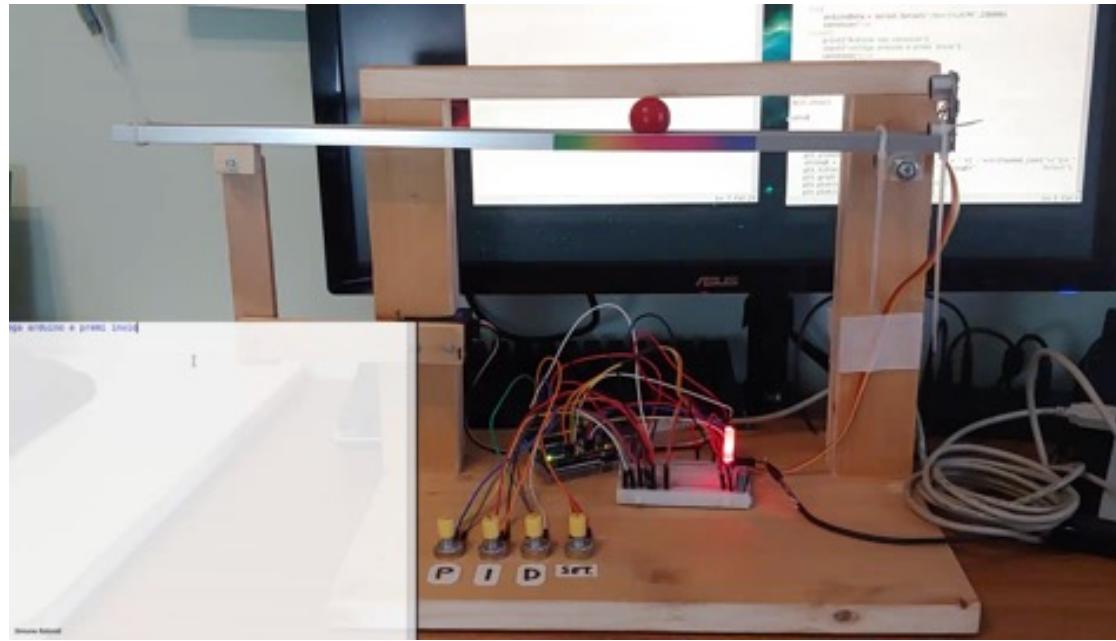
Tipo	K_p	T_i	T_d
P	$0.5 K_c$	∞	0
PI	$0.45 K_c$	$P_c/1.2$	0
PID	$0.6 K_c$	$0.5 P_c$	$0.125 P_c$
PD	$0.85 K_c$	∞	$0.125 P_c$

Progetti di studenti con regolatori PID

Ball Balance

Leonardo Pio Lo Porto
Matteo Matera
Francesco Riccioni
Simone Rotondi

Automazione 2018-19



[video](#)

- sensore di distanza a ultrasuoni HC-SR04
- motore DC
- Arduino UNO
- codice in C++ e in Python

Gimbal a 2 assi (per telecamera)

Riccardo Ceccarelli
Federico Fiorini

Automazione 2017-18



[video](#)

- stampa 3D
- accelerometro e giroscopio MEMS
- 2 motori brushless con driver
- Arduino UNO
- codice in C