

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INFORMATICA
AUTOMATICA E GESTIONALE ANTONIO RUBERTI



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

**Modelli dinamici per l'ingegneria
gestionale**

Lorenzo Farina
Luca Benvenuti

Technical Report n. 4, 2015

Modelli dinamici per l'ingegneria gestionale

Lorenzo Farina e Luca Benvenuti

Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale

12 Febbraio 2015

Abstract: In queste dispense sono raccolte le lezioni del corso di “Modelli dinamici per l’Ingegneria Gestionale” che si sono tenute nel corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Gestionale dell’Università di Roma, Sapienza, dall’a.a. 2010/2011 fino all’a.a. 2014/2015. Il corso è diviso in due parti. Nella prima parte si studiano le proprietà dei sistemi lineari positivi, e cioè di quei sistemi di equazioni differenziali nei quali le variabili di interesse sono positive perché rappresentano della quantità di risorsa. Nei vari paragrafi si mostra come la sola proprietà di positività ha molte implicazioni nella modellistica. Nella seconda parte vengono presentati e studiati degli esempi di sistemi non lineari con applicazioni economico/gestionali

Keywords: Modelli matematici, equazioni differenziali, economia, management

Parte prima

Indice

1	Struttura della rete d'influenza	1
1.1	Rete d'influenza di un sistema dinamico	1
1.2	Proprietà preliminari	7
1.3	Riducibilità ed irriducibilità	11
1.4	Ciclicità e primitività	18
1.5	Raggiungibilità ed osservabilità	22
2	Sistemi lineari positivi	29
2.1	Definizioni e proprietà	30
2.2	Comportamento di lungo periodo e stabilità	36
2.3	Proprietà dinamiche delle reti irriducibili	51

Prefazione

Il corso di *modelli dinamici per l'ingegneria gestionale* ha l'obiettivo di presentare alcuni elementi teorici e applicativi della modellistica mediante equazioni differenziali e alle differenze che siano rilevanti nel settore economico-gestionale. Infatti, in queste dispense, sono trattati principalmente quei fenomeni nei quali siano presenti *risorse* nel senso più generale di questo termine. La prima caratteristica di una “risorsa” è quella di essere misurata da una “quantità” e, le quantità, devono ovviamente assumere valori *positivi* per mantenere il loro significato originale. Questa semplice constatazione ha, in realtà, delle conseguenze notevoli sul piano teorico e pratico: essa infatti permette di potenziare in modo significativo l'analisi dei sistemi lineari già incontrati nella laurea di primo livello nei corsi di teoria dei sistemi e controlli automatici. Pertanto, questa prima parte del corso verterà principalmente sui *sistemi lineari positivi* che rappresentano la grandissima maggioranza dei modelli di rilevanza applicativa nel settore economico-gestionale.

Queste dispense presuppongono la conoscenza delle nozioni contenute nel volume L. Benvenuti, A. De Santis e L. Farina, *Sistemi dinamici: modellistica, analisi e controllo*, Ed. McGraw Hill (2009).

Capitolo 1

Struttura della rete d'influenza

1.1 Rete d'influenza di un sistema dinamico

Considereremo preliminarmente una classe molto generale di rappresentazione di un sistema dinamico mediante una rete (o grafo) detta *rete d'influenza* (o grafo d'influenza), che ci permetta di rappresentare un qualsiasi fenomeno dal punto di vista delle reciproche catene causali dirette. In particolare, vedremo come questo strumento consenta di rappresentare la struttura sottostante la dinamica di fenomeni descritti da equazioni differenziali e alle differenze e quindi da un qualsiasi sistema a tempo continuo e discreto. Ad esempio, anche i modelli di trasferimento e di decisione potranno essere descritti con questo strumento.

Una rete (o grafo) permette di rappresentare in modo molto semplice e diretto delle relazioni fra oggetti. Nel caso di interesse, si tratta di rappresentare grandezze definite come *variabili indipendenti*¹, *variabili di stato* e *indici di prestazione*². Una volta che queste siano definite è possibile determinare la *rete d'influenza*. Questa si costruisce associando a ciascun nodo una variabile (di stato, indipendente o un indice di prestazione) e intrestando un arco orientato come la presenza di un' *influenza* (la cui natura deve essere specificata a seconda dei casi). La rete d'influenza rappresenta però un paradigma molto più generale in quanto il concetto di “influenza” può essere interpretato in moltissimi modi diversi, come vedremo nel seguito.

¹dette anche *variabili d'ingresso*.

²dette anche *variabili di misura, o d'uscita*.

DEFINIZIONE. (rete d'influenza)

La *rete d'influenza* è un grafo i cui nodi rappresentano le variabili del fenomeno di interesse e gli archi orientati definiscono delle generiche relazioni d'influenza la cui natura deve essere di volta in volta specificata.

La rete d'influenza può quindi in generale essere rappresentata da un grafo orientato in cui i nodi rappresentino le variabili e gli archi orientati le relazioni dirette di influenza fra queste. Vediamo adesso come sia possibile utilizzare la rete d'influenza per studiare importanti proprietà dei sistemi dinamici. Iniziamo con il definire che cosa si intenda per rete di influenza di un sistema dinamico dove per semplicità di trattazione prenderemo in considerazione sistemi *tempo invarianti* nei quali sia presente *una sola variabile indipendente e un indice di prestazione*.

DEFINIZIONE. (rete d'influenza di un sistema dinamico)

Dato un sistema dinamico a tempo continuo con una sola variabile indipendente ed un indice di prestazione definito dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= f_i(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)) & i = 1, 2, \dots, n \\ y(t) &= g(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t))\end{aligned}$$

oppure a tempo discreto

$$\begin{aligned}x_i(k+1) &= f_i(x_1(k), \dots, x_n(k), u(k)) & i = 1, 2, \dots, n \\ y(k) &= g(x_1(k), \dots, x_n(k), u(k))\end{aligned}$$

dove n è il numero di variabili indipendenti. La corrispondente *rete d'influenza* è un grafo i cui nodi rappresentano le $n + 2$ variabili e un arco fra il nodo i ed il nodo j indica un influenza diretta della variabile x_i (o della variabile indipendente u) sulla variabile x_j . Più precisamente, per i sistemi a tempo continuo, $x_i(t)$ influenza la derivata di $x_j(t)$ e cioè $\dot{x}_j(t)$, mentre, per i sistemi a tempo discreto, $x_i(k)$ influenza il valore successivo di $x_j(k)$ e cioè $x_j(k+1)$.

Nel seguito, se non specificato altrimenti, utilizzeremo il termine rete d'influenza per intendere una rete d'influenza di un sistema dinamico. Vediamo adesso alcuni esempi applicativi che fanno riferimento a sistemi dinamici *non lineari*.

► **ESEMPIO. (rete d'influenza di un sistema non lineare)**

Come primo esempio, si consideri un pendolo composto da una massa m vincolata ad una fune inestensibile di lunghezza L rappresentato in Figura 1.1 in cui la variabile indipendente $u(t)$ rappresenta una forza esterna e le variabili di stato sono la posizione angolare rispetto al valore di riposo (x_1) e la corrispondente velocità angolare (x_2). Supponiamo inoltre che la costante

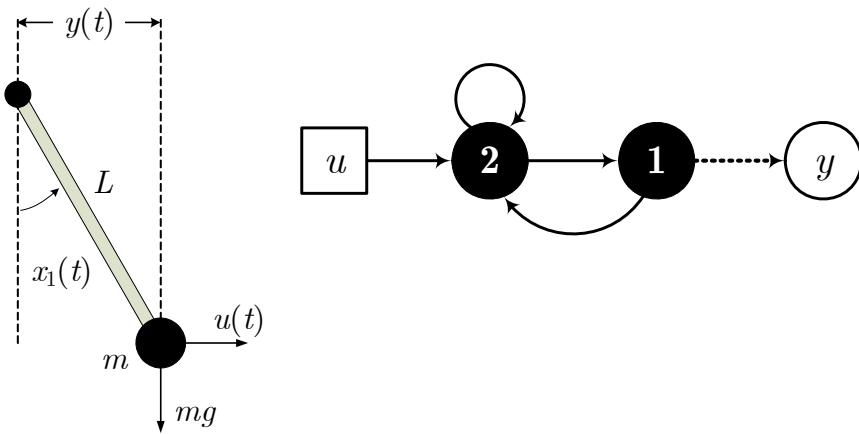


Figura 1.1: Pendolo composto da una massa m appesa ad un filo inestensibile di lunghezza L (sinistra) e relativa rete d'influenza (destra)

d'attrito di rotazione sia pari ad h e che sia definito un indice di prestazione $y(t)$ della posizione orizzontale della massa m . Le equazioni che descrivono il fenomeno sono date dai bilanci delle coppie agenti e cioè

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{mL^2} [u(t)L \cos x_1(t) - mgL \sin x_1(t) - hx_2(t)] \\ y(t) &= L \sin x_1(t)\end{aligned}$$

Si vede immediatamente che il sistema dinamico non è lineare a causa della presenza delle funzioni seno e coseno. La rete d'influenza del sistema dinamico non lineare è comunque ben definita ed è rappresentata in Figura 1.1. Val la pena notare che, in assenza di attrito ($h = 0$) la rete di tale sistema, che ovviamente avrebbe un comportamento oscillatorio, contiene un ciclo, e cioè un arco fra il nodo 1 ed il nodo 2 e viceversa senza autonelli.

La rete d'influenza per sistemi dinamici esprime quindi un tipo molto particolare di reciproche influenze fra le variabili. Infatti, per sistemi dinamici

a tempo continuo, le influenze sussistono fra variabili e le loro derivate in ciascun istante t e, per sistemi a tempo discreto, fra variabili al passo k e al passo $k+1$. La relazione che definisce i sistemi dinamici sopra considerati sono – in generale – delle funzioni *non lineari* nei loro argomenti. Questo comporta che le funzioni f_i e g siano, appunto, non lineari nei casi più generali.

Se, invece, le funzioni f_i e g sono tutte lineari, allora avremo a che fare con sistemi lineari nei quali è possibile quindi definire in modo univoco un'etichetta per gli archi. Infatti, ogni arco della rete d'influenza corrisponde al coefficiente che esprime la relazione corrispondente. Per esempio, per un sistema a tempo continuo, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= a_{i1}x_1(t) + a_{i2}x_2(t) + \dots + a_{in}x_n(t) + b_iu(t) = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t) + b_iu(t) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^n c_i x_i(t)\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t)\end{aligned}$$

e quindi il coefficiente a_{ij} rappresenta proprio il *coefficiente d'influenza* che esprime la “forza” con cui la variabile x_j influenza la derivata della variabile x_i . Per sistemi a tempo discreto possiamo invece scrivere

$$\begin{aligned}x_i(k+1) &= a_{i1}x_1(k) + a_{i2}x_2(k) + \dots + a_{in}x_n(k) + b_iu(k) = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(k) + b_iu(k) \\ y(k) &= \sum_{i=1}^n c_i x_i(k)\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + bu(k) \\ y(k) &= cx(k)\end{aligned}$$

e quindi il coefficiente a_{ij} rappresenta anche in questo caso il *coefficiente d'influenza* che esprime la “forza” con cui la variabile x_j al passo k influenza il valore al passo $k+1$ della variabile x_i .

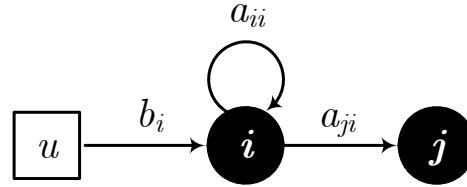


Figura 1.2: Relazione d'influenza fra due variabili di stato di un sistema dinamico dove a_{ij} rappresenta il coefficiente d'influenza. Se si tratta di un sistema a tempo continuo, allora l'arco orientato va inteso come l'influenza pesata da a_{ji} che la variabile x_i esercita sulla derivata di x_j . Se, invece, si tratta di un sistema a tempo discreto, allora l'influenza pesata da a_{ij} si riferisce a quella che la variabile x_i al passo k esercita sulla variabile x_j al passo $k + 1$. Quest'ultimo caso si può interpretare con la presenza di un *ritardo* pari ad un passo fra “causa” ed “effetto”.

Infine, $A \in R^{n \times n}$, $b \in R^{n \times 1}$, $c \in R^{1 \times n}$, a_{ij} è l'elemento di A nella riga i e colonna j , b_i è l'elemento di b nella riga i e c_i è l'elemento di c nella colonna i .

► **ESEMPIO. (rete d'influenza di un sistema lineare)**

Si consideri un sistema meccanico disegnato in Figura 1.3 composto da un volano ed una molla torsionale di costante k_r . Le variabili di stato sono la posizione angolare (x_1) e la sua velocità (x_2). Sono inoltre presenti una variabile indipendente che rappresenta una coppia esterna $u(t)$ impressa al volano e un indice di prestazione $y(t)$ definito dalla posizione angolare del volano. Le equazioni che esprimono il bilancio delle coppie agenti sono

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k_r}{J}x_1(t) + \frac{1}{J}u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

e, di conseguenza, le matrici di sistema sono

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_r}{J} & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix}, \quad c = (1 \ 0)$$

La rete d'influenza è rappresentata in basso in Figura 1.3. Val la pena notare che la rete di tale sistema che ha autovalori complessi (dinamica oscillante) contiene un ciclo, e cioè un arco fra il nodo 1 ed il nodo 2 e viceversa senza autonelli.

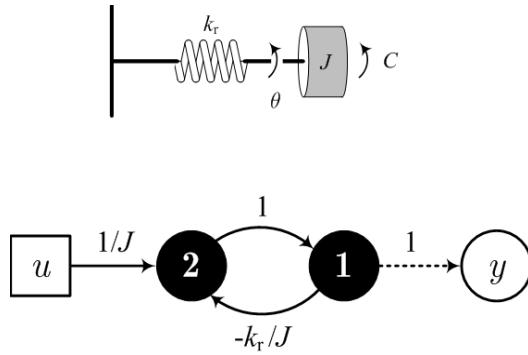


Figura 1.3: Schema di un volano con molla torsionale (alto) e relativa rete d'influenza (basso).

◀

E' importante notare che la rete d'influenza non coinciderà – in generale – con il grafo di un modello di trasferimento, come illustrato nell'esempio di Figura 1.4. Considerando infatti il grafo di trasferimento mostrato in alto, si

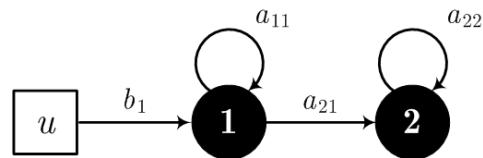
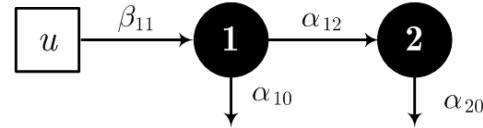


Figura 1.4: Grafo di trasferimento (in alto) e corrispondente rete delle influenze (in basso).

arriva a scrivere le equazioni di bilancio:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -(\alpha_{12} + \alpha_{10})x_1(t) + \beta_{11}u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \alpha_{12}x_1(t) - \alpha_{20}x_2(t)\end{aligned}$$

che corrispondono alle matrici di sistema

$$A = \begin{pmatrix} -(\alpha_{12} + \alpha_{10}) & 0 \\ \alpha_{12} & -\alpha_{20} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ 0 \end{pmatrix}$$

e pertanto i coefficienti d'influenza sono

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(\alpha_{12} + \alpha_{10}), & a_{12} &= 0 \\ a_{21} &= \alpha_{12}, & a_{22} &= -\alpha_{20} \\ b_1 &= \beta_{11}, & b_2 &= 0 \end{aligned}$$

La rete d'influenza è mostrata in basso nella Figura 1.4.

In generale, quindi, il passaggio dal grafo di trasferimento di un modello di trasferimento alla corrispondente rete d'influenza è molto semplice: basta infatti mantenere gli archi fra i nodi e aggiungere un autoanello ad un nodo ogni volta che sia presente della risorsa uscente (verso un altro stato o verso l'esterno). Nel caso di una variabile indipendente che consista in un prelievo di risorsa, nel grafo di flusso sarà presente un arco uscente da tale nodo mentre, nella corrispondente rete d'influenza, l'arco sarà entrante nel nodo in quanto l'influenza è sempre della variabile indipendente nei confronti della variabile di stato.

1.2 Proprietà preliminari

In questa sezione ci occuperemo di alcune proprietà strutturali della rete d'influenza che saranno utili al fini di caratterizzare alcune importanti caratteristiche del sistema dinamico corrispondente. Anche se le definizioni ed i teoremi che presenteremo nel seguito valgono per ogni tipo di rete (o grafo) è chiaro che il nostro interesse sarà focalizzato agli aspetti dinamici dei modelli. La grande utilità di questo strumento è dovuta al fatto che le sue proprietà sono indipendenti dai pesi sugli archi (cioè dai coefficienti di influenza) e forniscono quindi proprietà che sussistono per il solo fatto che un certo numero di archi è presente oppure no.

Nel seguito utilizzeremo una diversa notazione a seconda del tipo di sistema che stiamo considerando e cioè se siano presenti o meno variabili indipendenti e/o indici di prestazione. Più precisamente indicheremo con R_x la rete d'influenza corrispondente alle sole variabili di stato, con R_{ux} la rete corrispondente alle variabili di stato e indipendenti e con R_{uxy} la rete corrispondente alle variabili di stato, indipendenti e agli indici di prestazione.

Vediamo adesso alcune definizioni preliminari che si riferiscono a reti d'influenza orientate, in cui cioè il verso della relazione d'influenza è rilevante.

DEFINIZIONE. (**cammino e ciclo**)

Si dice *cammino* una sequenza ordinata di nodi e archi orientati non necessariamente distinti. Il numero di archi presenti nel cammino (contati con la loro molteplicità) definisce la *lunghezza* del cammino stesso. Se il nodo iniziale e finale del cammino coincidono, allora il cammino si dice *ciclo*.

DEFINIZIONE. (rete connessa)

Una rete si dice *connessa* se esiste almeno un cammino per ogni coppia di nodi.

DEFINIZIONE. (matrice di rete)

Sia dato un sistema lineare a tempo continuo o a tempo discreto definito dalle matrici (A, b, c) . La matrice di rete \bar{A} della rete d'influenza R_{uxy} corrispondente è data da

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_{ij} \neq 0 \\ 0 & \text{se } a_{ij} = 0 \end{cases}$$

dove \bar{a}_{ij} [a_{ij}] è l'elemento sulla riga i e colonna j della matrice \bar{A} . Inoltre, le matrici di rete \bar{b} e \bar{c} sono definite a partire dalla matrici b e c del sistema in modo analogo e cioè

$$\bar{b}_i = \begin{cases} 1 & \text{se } b_i \neq 0 \\ 0 & \text{se } b_i = 0 \end{cases}, \quad \bar{c}_i = \begin{cases} 1 & \text{se } c_i \neq 0 \\ 0 & \text{se } c_i = 0 \end{cases}$$

Come esempio, si consideri il sistema a tempo discreto descritto da

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} x(k)$$

La rete d'influenza è disegnata in Figura 1.5 e la relativa matrice di rete è la seguente

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fra i nodi 1 e 3 è presente un cammino di lunghezza 2 se si considera il cammino composto dagli archi $(1, 2)$ e $(2, 3)$, ma ci sono anche altri cammini di

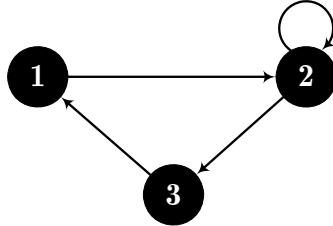


Figura 1.5: Esempio di rete d'influenza connessa che contiene un ciclo di lunghezza pari a 3 ed un ciclo di lunghezza pari a 1. Pertanto, esisteranno anche tutti i cicli di lunghezza $L > 3$.

lunghezza 3, 4, ... se si considera anche l'autoanello (3, 3). Infatti un cammino, per esempio, di lunghezza 4 fra i nodi 1 e 3 è dato dalla sequenza di archi (1, 2), (2, 2), (2, 2) e (2, 3). Inoltre, la rete contiene sia un ciclo di lunghezza 3 che un ciclo di lunghezza 1 ed è connessa.

Possiamo adesso formulare il seguente teorema che ci permette di valutare, utilizzando la matrice di rete, il numero di cammini di una data lunghezza fra una qualsiasi coppia di nodi della rete.

TEOREMA. (numero di cammini)

Il numero di cammini di lunghezza $k \geq 1$ di una rete R_x fra due nodi i e j è pari all'elemento (j, i) della matrice di rete corrispondente a \bar{A}^k . Il numero di cammini di lunghezza $k \geq 1$ di una rete R_{ux} fra il nodo corrispondente alla variabile indipendente $u(t)$ ed il nodo i è pari all'elemento i del vettore colonna $\bar{A}^{k-1}\bar{b}$ ed il numero di cammini di lunghezza $k \geq 1$ di una rete R_{xy} fra il nodo corrispondente al nodo i e la l'indice di prestazione $y(t)$ è pari all'elemento i del vettore riga $\bar{c}\bar{A}^{k-1}$. Infine, il numero di cammini di lunghezza $k \geq 2$ di una rete R_{uxy} fra il nodo $u(t)$ ed il nodo $y(t)$ è pari a $\bar{c}\bar{A}_x^{k-2}\bar{b}$.

E' importante ricordare che il precedente teorema permette di calcolare il numero di cammini fra una qualsiasi coppia di nodi della rete tenendo conto anche di eventuali cammini che abbiamo uno o più archi comuni. Come esempio, si consideri la rete d'influenza disegnata in Figura 1.6. La matrice

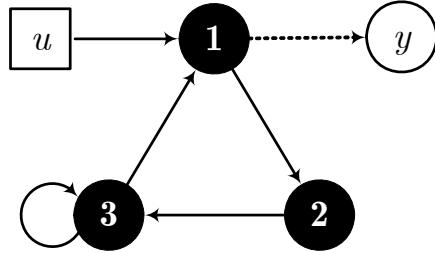


Figura 1.6: Esempio di rete d'influenza di un sistema dinamico. Si noti che il cammino dal nodo u ed il nodo y ha una lunghezza pari a 2 ed è quindi il valore minimo possibile.

di rete è la seguente

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = (1 \ 0 \ 0)$$

ed il numero di cammini di lunghezza $k = 3$ è dato da

$$\bar{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si noti, ad esempio, come fra il nodo 2 ed il nodo 3 sia presente un cammino di lunghezza pari a 3 composto dall'arco $(2, 3)$ e dall'arco $(3, 3)$ contato due volte. Inoltre, ci sono due cammini di lunghezza pari a 3 fra il nodo 3 e se stesso: il primo composto dagli archi $(3, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 3)$ ed il secondo composto dal solo arco $(3, 3)$ contato tre volte. Se interessa calcolare il numero di cammini di lunghezza pari $k = 4$ fra il nodo corrispondente alla variabile indipendente u allora si deve calcolare

$$\bar{A}^3 \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dove, per esempio, si vede che non esiste alcun cammino di lunghezza $k = 4$ fra il nodo u ed il nodo 2, mentre esiste con il nodo 1 e con il nodo 3. Se interessa calcolare il numero di cammini di lunghezza pari $k = 4$ fra un nodo corrispondente ad una variabile di stato ed il nodo corrispondente all'indice di prestazione y allora si deve calcolare

$$\bar{c} \bar{A}^3 = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 1 \ 1)$$

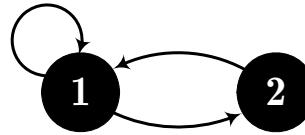


Figura 1.7: Rete d'influenza che contiene 3 cammini di lunghezza 3 fra il nodo 1 e se stesso.

Dove si vede che esiste un cammino di lunghezza $k = 4$ fra nodi di stato ed indice di prestazione. Infine si noti che non esistono cammini di lunghezza pari a $k = 3$ fra i nodi corrispondenti a u ed y , infatti

$$\bar{c}\bar{A}^{k-2}\bar{b} = \bar{c}\bar{A}\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Esiste, invece, un cammino di lunghezza pari a $k = 5$ fra u e y . Infatti

$$\bar{c}\bar{A}^{k-2}\bar{b} = \bar{c}\bar{A}^3\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

E' importante ricordarsi che il numero di cammini fra una coppia di nodi va contato tenendo conto dell'ordine degli archi presenti nel cammino. Si consideri la rete d'influenza disegnata in Figura 1.7. Il nodo 1 conterrà 3 cammini di lunghezza pari a 3 fra il nodo 1 e se stesso. Infatti, nel conto vanno considerati come distinti i cammini $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ e $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 1)$ oltre al cammino $(1, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 1)$. Infatti, la matrice di rete è

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\bar{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3 Riducibilità ed irriducibilità

Le reti d'influenza dei sistemi dinamici possono essere decomposte sulla base della loro struttura. Come vedremo, tale decomposizione permette di esprimere delle proprietà che riguardano la dinamica del fenomeno rappresentato. Iniziamo considerando soltanto la presenza di relazioni d'influenza fra le variabili di stato.

DEFINIZIONE. (rete riducibile e irriducibile)

Una rete d'influenza con $n \geq 2$ si dice *riducibile* se un gruppo di n_1 nodi influenza direttamente o indirettamente il gruppo composto dai rimanenti $n_2 = n - n_1$ nodi i quali, a loro volta, non influenzano il gruppo di n_1 nodi. Una rete non riducibile si dice *irriducibile*.

Mediante particolari cambiamenti di base nello spazio di stato è possibile caratterizzare la riducibilità della rete direttamente mediante la matrice dinamica A del sistema lineare. In generale, dato un sistema lineare a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

e definita una nuova variabile di stato, e cioè un cambiamento di base del tipo

$$z = Px \rightarrow x = P^{-1}z$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ P^{-1}\dot{z}(t) &= AP^{-1}z(t) + Bu(t) \\ \dot{z}(t) &= PAP^{-1}z(t) + PBu(t)\end{aligned}$$

e pertanto, nella nuova base, il sistema assume la forma

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) &= \tilde{C}z(t)\end{aligned}$$

con

$$\tilde{A} = PAP^{-1}, \quad \tilde{B} = PB, \quad \tilde{C} = CP^{-1}$$

Analogamente, per sistemi a tempo discreto, si ottiene

$$\begin{aligned}z(k+1) &= \tilde{A}z(k) + \tilde{B}u(k) \\ y(k) &= \tilde{C}z(k)\end{aligned}$$

Per esempio, se si vuole semplicemente rinumerare le variabili di stato, come nel caso in cui sia $z_1 = x_2$, $z_2 = x_3$ e $z_3 = x_1$ avremo

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

che in forma matriciale si scrive

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$z = Px, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E' importante notare che, in questo caso, la matrice di cambiamento di base è una *matrice di permutazione*³ e vale la proprietà $P^{-1} = P^T$.

Per caratterizzare la riducibilità di una rete direttamente sulla matrice dinamica A del sistema si noti che, dalla definizione precedente, segue che lo spazio di stato può essere partizionato in due sottosistemi in modo tale che l'evoluzione libera del primo sottosistema composto da n_1 variabili di stato sia indipendente dall'andamento delle altre n_2 . Rinumerando infatti le variabili di stato in modo che il primo gruppo sia quello composto da n_1 variabili e cioè definendo un cambiamento di base

$$z(t) = Px(t)$$

dove P sarà semplicemente una matrice di permutazione, il sistema (per esempio a tempo continuo) si potrà scrivere nel modo seguente

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= A_{11}z_1(t) \\ \dot{z}_2(t) &= A_{21}z_1(t) + A_{22}z_2(t) \end{aligned}$$

dove z_1 è un vettore che raccoglie le variabili di stato del primo gruppo e z_2 quelle del secondo gruppo e dove $A_{11} \in R^{n_1 \times n_1}$, $A_{21} \in R^{n_2 \times n_1}$ e $A_{22} \in R^{n_2 \times n_2}$. La matrice P sarà quindi tale per cui si avrà

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = PAP^T$$

e cioè capace di rendere, nella nuova base, la matrice dinamica *triangolare a blocchi*. Si noti inoltre come l'insieme degli autovalori della matrice riducibile A (chiamato *spettro* della matrice) sia l'unione degli spettri delle sottomatrici presenti sui blocchi diagonali e, pertanto, i due sottosistemi saranno caratterizzati dai modi naturali corrispondenti alle due sottomatrici A_{11} e A_{22} .

³Una matrice di permutazione è una matrice che contiene uno ed un solo elemento non nullo pari a 1 in ciascuna riga e in ciascuna colonna.

questo significa che i modi naturali presenti nei due sottosistemi saranno fra loro diversi.

Come esempio, si consideri il seguente sistema a tempo continuo riducibile

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

di cui si vuole calcolare l'evoluzione libera a partire dal generico stato iniziale

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$$

Gli autovalori ed autovettori sono

$$\lambda_1 = a_{11}, \quad \lambda_2 = a_{22}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{22} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{22} & 0 \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_{01}}{a_{11} - a_{22}} \\ \frac{-a_{21}x_{01} + (a_{11} - a_{22})x_{02}}{a_{11} - a_{22}} \end{pmatrix}$$

L'evoluzione libera sarà data da

$$\begin{aligned} x_l(t) &= \frac{x_{01}}{a_{11} - a_{22}} e^{a_{11}t} \begin{pmatrix} a_{11} - a_{22} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \frac{-a_{21}x_{01} + (a_{11} - a_{22})x_{02}}{a_{11} - a_{22}} e^{a_{22}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{a_{11}t}x_{01} \\ a_{21} \frac{x_{01}}{a_{11} - a_{22}} e^{a_{11}t} + \frac{-a_{21}x_{01} + (a_{11} - a_{22})x_{02}}{a_{11} - a_{22}} e^{a_{22}t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e dove si verifica che $x_{1l}(t) = e^{a_{11}t}x_{01} = e^{a_{11}t}x_{01}$.

Come ulteriore esempio, per meglio chiarire i concetti esposti, si consideri il modello di flusso e la relativa rete d'influenza riducibile illustrata in Figura 1.8. Le equazioni del modello di flusso sono

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -(\alpha_{10} + \alpha_{12})x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \alpha_{12}x_1(t) - \alpha_{20}x_2(t) \end{aligned}$$

e pertanto la matrice dinamica del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} -(\alpha_{10} + \alpha_{12}) & 0 \\ \alpha_{12} & -\alpha_{20} \end{pmatrix}$$

Come si vede, gli autovalori del sistema sono

$$\lambda_1 = -(\alpha_{10} + \alpha_{12}), \quad \lambda_2 = -\alpha_{20}$$

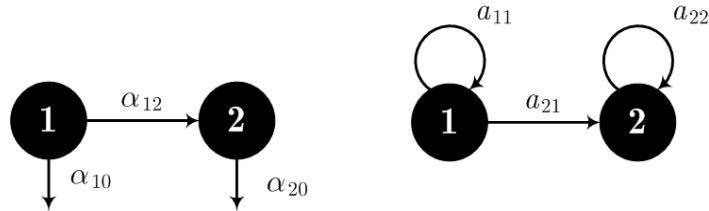


Figura 1.8: Modello di flusso (sinistra) e relativa rete d'influenza (destra).

e pertanto, le leggi temporale del sottosistema composto dal solo nodo 1 è determinata sia dal coefficiente α_{10} che dal coefficiente α_{12} . Quest'ultimo descrive il trasferimento di flusso fra i due compartimenti. Pertanto, la dinamica del primo compartimento sarà influenzata anche dal flusso di risorsa uscente.

E' chiaro che il processo di decomposizione in sottosistemi riducibili, descritto precedentemente, può eventualmente continuare su altri sottogruppi di variabili di stato in modo che le sottomatrici sulla diagonale si possano riscrivere, mediante un altro riordinamento delle variabili di stato, mostrando così di nuovo una struttura a blocchi triangolare. In generale, quindi, una rete riducibile ammette un riordinamento delle variabili di stato – e cioè un cambiamento di base mediante una matrice di permutazione – in modo tale che la matrice dinamica risultante sia triangolare e dove i blocchi sulla diagonale non siano più ulteriormente riducibili. Più precisamente, la riducibilità di una rete può essere definita su un sistema dinamico (per esempio a tempo continuo)

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

mediante il cambiamento di base

$$z(t) = Px(t)$$

si ottiene

$$\dot{z}(t) = PAP^T z(t)$$

con PAP^T triangolare a blocchi

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

dove s è il numero di blocchi (sottosistemi) ottenuti. Nel caso in cui s sia il numero più grande possibile allora ciascuno dei sottosistemi corrispondenti alle matrici sulla diagonale sarà a sua volta irriducibile.

► **ESEMPIO. (parco macchine)**

Consideriamo il modello di parco macchine mostrato sulla destra in Figura 1.9 e la corrispondente rete d'influenza mostrata sulla sinistra. Le matrici di

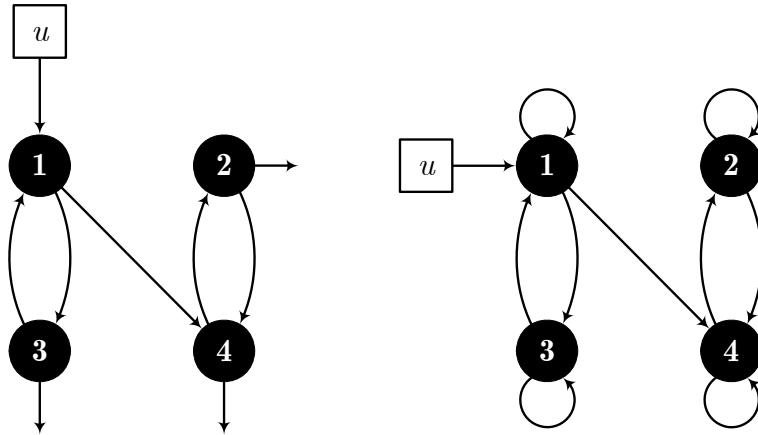


Figura 1.9: Grafo di trasferimento di un modello di parco macchine (sinistra) e corrispondente rete d'influenza (destra).

rete sono le seguenti

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La struttura della rete d'influenza R_x non è immediatamente visibile sulla matrice di rete. Se però consideriamo il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avremo, nella nuova base

$$PAP^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$PAP^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

evidenziando quindi la struttura triangolare a blocchi composta da due sottosistemi contenenti due nodi ciascuno. In questo caso, si vede immediatamente che i blocchi sulla diagonale non sono ulteriormente decomponibili.

◀

Vediamo adesso, mediante il prossimo teorema, come sia possibile determinare l'irriducibilità di una rete utilizzando la matrice di rete.

TEOREMA. (condizioni di irriducibilità)

Una rete con n nodi è irriducibile se e solo se è connessa e cioè se e solo se

$$I + \bar{A} + \bar{A}^2 + \bar{A}^3 + \dots + \bar{A}^{n-1} > 0$$

dove il simbolo “ $>$ ” indica la positività di tutti gli elementi della matrice.

La dimostrazione del teorema è immediata e segue dal fatto che la matrice \bar{A}^k determina la presenza di almeno un cammino di lunghezza k fra ciascuna coppia di nodi e dall'osservazione che se non esiste un cammino di lunghezza $n - 1$ fra due nodi allora certamente non ne esiste nessuno di lunghezza superiore. Come esempio di applicazione del precedente teorema, si consideri il modello di parco macchine la cui rete è disegnata in Figura ???. La matrice di rete è

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e per determinare se essa sia irriducibile si può calcolare la seguente matrice

$$I + \bar{A} + \bar{A}^2 + \bar{A}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 8 & 0 \\ 8 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

la quale contiene elementi nulli e pertanto la rete *non* è irriducibile come facilmente si vede in questo caso anche “ad occhio”. Infatti, per esempio, non esiste un cammino fra il nodo 4 ed il nodo 1. Se, infine, consideriamo un cambiamento di base per cui

$$PAP^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

si vede che le sottomatrici sulla diagonale

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

corrispondono invece a sottomatrici irriducibili.

1.4 Ciclicità e primitività

Vediamo adesso come le reti (o sottoreti) irriducibili possano essere ulteriormente caratterizzate sulla base della loro struttura di rete.

DEFINIZIONE. (rete ciclica e primitiva)

Una rete d'influenza irriducibile di un sistema dinamico R_x si dice *ciclica* se esiste una partizione dei nodi C_1, C_2, \dots, C_r con $r > 1$, dette *classi di ciclicità*, tale che:

- tutti i nodi della classe C_i influenzano direttamente nodi della sola classe seguente C_{i+1} per $i = 1, 2, \dots, r-1$
- tutti i nodi della classe C_r influenzano direttamente nodi della sola classe C_1

Il numero intero $r > 1$ si chiama *indice di ciclicità* della rete. Inoltre, una rete irriducibile non ciclica (cioè con $r = 1$) si dice *primitiva*.

Un esempio di rete d'influenza ciclica con $r = 3$ è mostrata in Figura 1.10. Come si vede dalla figura, tra i nodi di una stessa classe non esistono archi né autoanelli e da ciascun nodo si origina un arco che termina in un nodo appartenente alla classe successiva. Una rete d'influenza ciclica con indice di

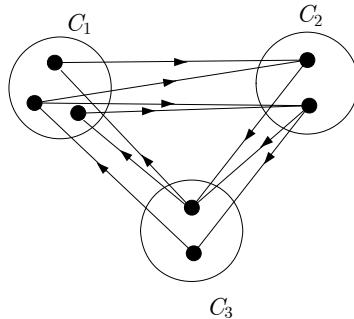


Figura 1.10: Rete d'influenza ciclica con indice di ciclicità pari a $r = 3$.

ciclicità r ha la proprietà che la lunghezza di tutti i suoi cicli è pari ad r od ad un multiplo di r . Di conseguenza, l'indice di ciclicità è necessariamente pari al massimo comun divisore delle lunghezze di tutti i cicli presenti nella rete. In proposito vale il seguente teorema.

TEOREMA. (condizioni di ciclicità e primitività)

Una rete irriducibile è primitiva se e solo se il massimo comun divisore r delle lunghezza di tutti i cicli presenti nella rete è pari ad 1. Altrimenti, la rete è ciclica ed il suo indice di ciclicità è pari a r .

La determinazione delle lunghezze di tutti i cicli presenti nella rete non è un'operazione algoritmamente molto semplice da effettuare soprattutto su reti di grandi dimensioni. Pertanto, è molto utile avere a disposizione condizioni sufficienti che permettano in modo semplice di determinare la primitività di una rete senza calcolare le lunghezze di tutti i cicli.

TEOREMA. (condizioni sufficienti di primitività)

Una rete irriducibile è primitiva se una (o entrambe) le condizioni seguenti sono soddisfatte:

- la rete contiene un autoanello.
 - la rete contiene una tripla di archi del tipo $(i, j), (i, h), (h, j)$
-

Il teorema è illustrato in Figura 1.11. La dimostrazione è molto semplice

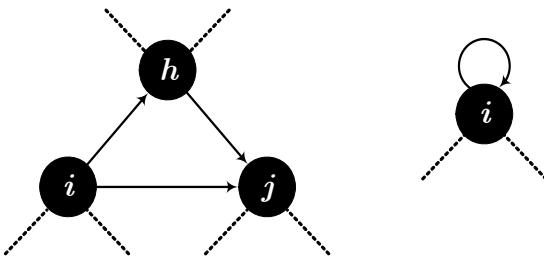


Figura 1.11: Sottoreti che assicurano la primitività di una rete irriducibile.

e segue dal fatto che il massimo comun divisore di una serie di numeri che contenga anche il numero 1 (cioè l'autoanello) è pari ad 1. Inoltre, se tale serie contiene un certo valore q ed anche il valore $q + 1$ allora il massimo comun divisore sarà anche in questo caso necessariamente pari ad 1.

Vediamo adesso, nell'esempio che segue, le proprietà di riducibilità, irriducibilità e ciclicità dei modelli a struttura d'età che corrispondono a diversi “stili” riproduttivi di popolazioni animali i le cui reti d'influenza sono disegnate in Figura 1.12.

► **ESEMPIO. (strutture d'età)**

Consideriamo un modello a struttura d'età di una popolazione con la rete d'influenza disegnata in Figura 1.12. La struttura rappresentata dalla rete (a) è riducibile e le classi di comunicazione sono 3: $C_1 = (1, 2)$, $C_2 = (3)$ e $C_3 = (4)$. Considerando la sottorete relativa a C_1 essa è irriducibile ciclica con indice di ciclicità pari a $r = 2$ avendo un solo ciclo di lunghezza due (e multipli). La rete (b) invece è irriducibile. Essa è ciclica ed il suo indice di ciclicità è pari a $r = 4$ avendo un solo ciclo di lunghezza 4 (e multipli). La rete (c) è irriducibile ciclica ed ha due cicli: uno di lunghezza 2 ed uno di lunghezza 4. L'indice di ciclicità è quindi pari a $MCD(2, 4) = 2$. La rete (d) è anch'essa irriducibile e la presenza di un autoanello fa sì che essa sia primitiva. Infine, la rete (e) è ancora irriducibile e la presenza della tripla di archi $(3, 1)$, $(1, 4)$ e $(4, 1)$ fa sì che la rete sia primitiva.

◀

Le reti primitive possono essere caratterizzate anche mediante un'altra proprietà che coinvolge direttamente la matrice di rete.

TEOREMA. (condizione di primitività)

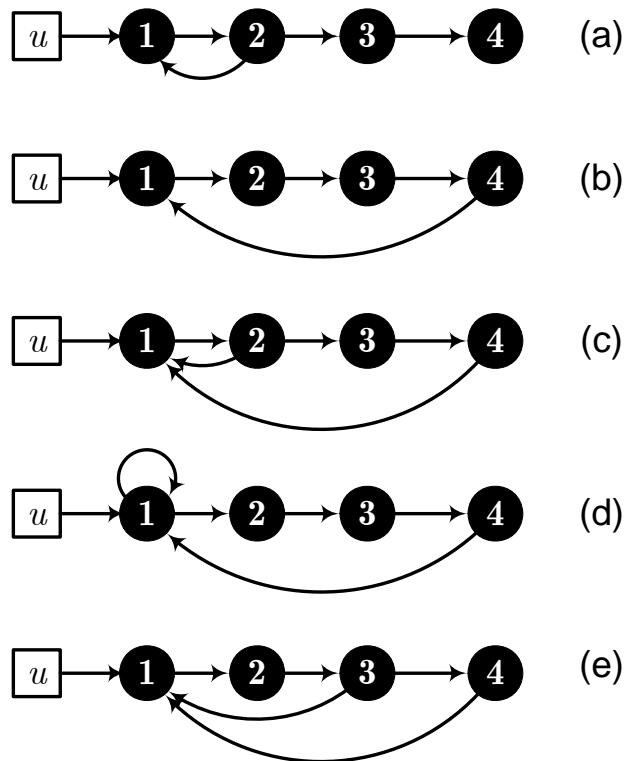


Figura 1.12: Modelli a struttura d'età con diversi comportamenti riproduttivi. La rete ciclica (b) corrisponde a popolazioni dette *semelpare* (come i salmoni del Pacifico) che si riproducono una sola volta nel corso della loro vita.

Una rete irriducibile è primitiva se e solo se la matrice di rete è tale per cui esiste un intero $m > 0$ e vale la proprietà

$$\bar{A}^m > 0$$

o, equivalentemente, se esistono cammini della stessa lunghezza m fra tutte le coppie di nodi.

Come esempio di applicazione del precedente teorema si consideri la rete disegnata in Figura 1.12e. La matrice di rete è la seguente

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare il valore di m richiesto basta calcolare le potenze successive di \bar{A} . Il più piccolo valore che verifica il teorema è $m = 10$. Infatti si ha

$$\bar{A}^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5 Raggiungibilità ed osservabilità

La decomposizione strutturale delle reti vista nella sezione precedente può essere utilmente estesa al caso in cui si voglia tener conto della presenza di eventuali variabili indipendenti e/o di indici di prestazione. Cominciamo quindi con il considerare la nozione di nodo e rete raggiungibile.

DEFINIZIONE. (nodo e rete raggiungibile)

Un nodo i di una rete R_{ux} si dice *raggiungibile* se esiste almeno un cammino fra il nodo associato alla variabile indipendente u ed il nodo associato alla variabile di stato i . La rete R_{ux} si dice raggiungibile se tutti i nodi di R_x sono raggiungibili.

Analogamente, per quanto riguarda l'osservabilità, si considera la seguente definizione.

DEFINIZIONE. (nodo e rete osservabile)

Un nodo i di una rete R_{xy} si dice *osservabile* se esiste almeno un cammino fra il nodo associato alla variabile di stato i ed il nodo associato all'indice di prestazione y . La rete R_{xy} si dice osservabile se tutti i nodi di R_x sono osservabili.

E' importante notare che il concetto di nodo raggiungibile/osservabile non è legato in maniera semplice al concetto di stato raggiungibile/osservabile. Vale però il seguente teorema che fornisce un legame parziale fra tale proprietà per una rete e per il sistema dinamico corrispondente.

TEOREMA. (rete e sistema raggiungibile/osservabile)

Se una rete R_{ux} non è raggiungibile (cioè esiste almeno un nodo non raggiungibile) allora il corrispondente sistema dinamico (A, b) non è raggiungibile. Se una rete R_{xy} non è osservabile (cioè esiste almeno un nodo non osservabile) allora il corrispondente sistema dinamico (A, c) non è osservabile.

Per dimostrare il teorema, senza perdita di generalità, consideriamo il caso in cui il nodo corrispondente alla variabile indipendente u non abbia cammini orientati verso un certo numero n_1 di nodi della rete con n nodi mentre gli altri $n - n_1$ nodi siano invece raggiungibili. Numerando da 1 a n_1 il primo gruppo di nodi, è chiaro che la matrice di rete corrispondente sarà riducibile e quindi possiamo assumere, senza perdita di generalità, che le matrici del sistema siano nella forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

dove $A_{11} \in R^{n_1 \times n_1}$ come illustrato in Figura 1.13. Pertanto, la generica colonna della matrice di raggiungibilità è data da

$$A^k b = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

e poichè la matrice A è triangolare, avremo che

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^k & 0 \\ * & A_{22}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_{22}^k b_2 \end{pmatrix}$$

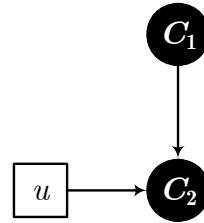


Figura 1.13: Rete di influenza riducibile con un gruppo di nodi (C_1) non raggiungibili.

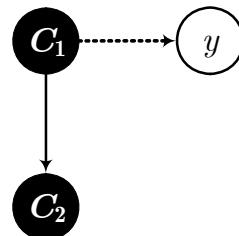


Figura 1.14: Rete di influenza riducibile con un gruppo di nodi (C_2) non osservabili.

dove il simbolo “*” indica un sottoblocco il cui valore numerico non è rilevante ai fini del ragionamento (chiamato *don't care entry*). La matrice di raggiungibilità assume la forma

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & A_{22}b_2 & \cdots & A_{22}^{n-1}b_2 \end{pmatrix}$$

ed essendo composta da n_1 righe nulle il suo determinante è nullo e pertanto il sistema non è certamente raggiungibile. La dimostrazione per quanto riguarda l'osservabilità è formalmente analoga alla precedente. Infatti, assumendo osservabili i nodi numerati da 1 ad n_1 e non osservabili gli altri $n - n_1$, la matrici dinamiche del sistema saranno quindi nella forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $A_{11} \in R^{n_1 \times n_1}$. Il grafo d'influenza corrispondente è disegnato in Figura 1.14. Pertanto, la generica riga della matrice di osservabilità è data da

$$cA^k = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^k$$

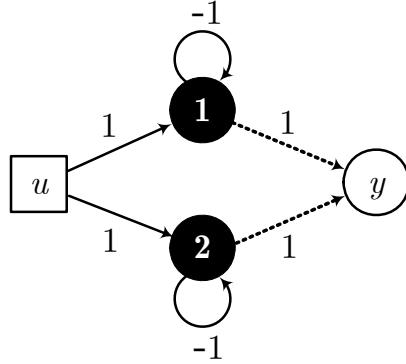


Figura 1.15: Esempio di rete raggiungibile e osservabile il cui sistema dinamico corrispondente non è né raggiungibile né osservabile.

e poichè la matrice A è triangolare, avremo che

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^k & 0 \\ * & A_{22}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 A_{11}^k & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice di osservabilità assume la forma

$$O = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_1 A_{11} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ c_1 A_{11}^{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

ed essendo composta da $n - n_1$ colonne nulle il suo determinante è nullo e pertanto il sistema non è certamente osservabile.

E' importante notare che le condizioni enunciate dal precedente teorema valgono nel solo verso considerato. Infatti, è facile trovare esempi di sistemi non raggiungibili la cui rete è invece raggiungibile. Analogamente, si trovano esempi dello stesso tipo per sistemi non osservabili. A tal fine si consideri la rete disegnata in Figura 1.15. Come si vede immediatamente, la rete è sia raggiungibile che osservabile. Scrivendo, per esempio, le matrici dinamiche (a tempo continuo o a tempo discreto)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice di raggiungibilità

$$R = \begin{pmatrix} b & Ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

non ha rango pieno (cioè pari a 2) e pertanto il sistema *non* è raggiungibile. Analogamente, la matrice di osservabilità

$$O = \begin{pmatrix} c \\ cA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

non ha rango pieno e di conseguenza il sistema *non* è osservabile. La non raggiungibilità e la non osservabilità mostrata in questo esempio è legata al valore esatto dei coefficienti d'influenza e pertanto anche un lieve cambiamento può far cadere le conclusioni. Infatti, se per esempio si ha che

$$A = \begin{pmatrix} -1 - \varepsilon & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = (1 \ 1)$$

allora, la matrice di raggiungibilità diventa

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 - \varepsilon \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

per cui $\det R = \varepsilon \neq 0$ ed il sistema è quindi raggiungibile.

Vediamo adesso delle condizioni di raggiungibilità e di osservabilità di una rete basate sulle matrici di rete.

TEOREMA. (condizione di raggiungibilità di un nodo e di una rete)

Una rete R_{ux} è raggiungibile se e solo se il vettore colonna

$$\bar{R} := \bar{b} + \bar{A}\bar{b} + \bar{A}^2\bar{b} + \dots + \bar{A}^{n-1}\bar{b} > 0$$

ed un nodo i è raggiungibile se l'elemento i -esimo di \bar{R} è positivo.

TEOREMA. (condizione di osservabilità di un nodo e di una rete)

Una rete R_{xy} è osservabile se e solo se il vettore riga

$$\bar{O} := \bar{c} + \bar{c}\bar{A} + \bar{c}\bar{A}^2 + \dots + \bar{c}\bar{A}^{n-1} > 0$$

ed un nodo i è osservabile se l'elemento i -esimo di \bar{O} è positivo.

Pertanto, gli elementi positivi delle matrici \bar{R} ed \bar{O} ci dicono quali nodi siano raggiungibili e quali siano osservabili, rispettivamente. Come esempio,

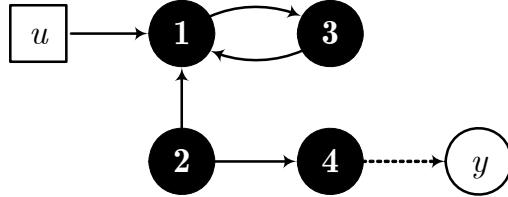


Figura 1.16: Rete d'influenza non raggiungibile e non osservabile. Pertanto, il sistema corrispondente non sarà né raggiungibile né osservabile, indipendentemente dai valori (non nulli) dei coefficienti nelle matrici di sistema A, b, c .

consideriamo la rete disegnata in Figura 1.16. Le matrici di rete sono le seguenti

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = (0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

e possiamo quindi calcolare le matrici previste dal teorema. Per quanto riguarda la raggiungibilità dei nodi della rete abbiano:

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e pertanto la rete non è raggiungibile ma solo i nodi 1 e 3 lo sono. Inoltre

$$\begin{aligned} \bar{O} &= (0 \ 0 \ 0 \ 1) + (0 \ 1 \ 0 \ 0) + \\ &\quad + (0 \ 0 \ 0 \ 0) + (0 \ 0 \ 0 \ 0) \\ \bar{O} &= (0 \ 1 \ 0 \ 1) \end{aligned}$$

e quindi la rete non è osservabile ma solo i nodi 2 e 4 lo sono.

E' importante ricordare che la non raggiungibilità e non osservabilità della rete appena discussa *implica* la non raggiungibilità e la non osservabilità di *qualsiasi* sistema dinamico la cui rete d'influenza sia quella disegnata in Figura 1.16. Pertanto, per esempio, considerando un sistema a tempo continuo o a tempo discreto descritto da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = (0 \ 0 \ 0 \ c_4)$$

questo sarà non raggiungibile e non osservabile per qualsiasi valore dei coefficienti. La matrice di raggiungibilità è

$$R = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_1 a_{13} a_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 a_{31} & 0 & b_1 a_{13} a_{31}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed avendo righe nulle non è certo a rango pieno. La matrice d'osservabilità è

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c_4 \\ 0 & c_4 a_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e pertanto valgono le stesse considerazioni. Val la pena notare che l'eventuale presenza di autoanelli nelle rete d'influenza non modifica in alcun modo l'analisi fin qui fatta, come è immediato verificare.

Capitolo 2

Sistemi lineari positivi

In questo capitolo ci occuperemo di *sistemi positivi* e cioè di questi sistemi dinamici caratterizzati dalla proprietà che le variabili di stato, indipendenti e gli indici di prestazione assumono esclusivamente valori positivi (od eventualmente nulli). La positività delle variabili è molto spesso facilmente ricavabile dalle informazioni a disposizione su un dato fenomeno. Per esempio essa deriva in modo immediato da quella classe di modelli che prende il nome di *modelli di trasferimento di risorse*, in quanto una risorsa non può che essere espressa da una quantità e quindi da un numero reale positivo o nullo. E' chiaro che sono possibili diverse interpretazioni, nel senso che una risorsa negativa può rappresentare, per esempio, un *debito* o altro, ma in questa parte del corso ci occuperemo di tutti quei fenomeni la cui rappresentazione matematica recepisca in modo sostanziale la positività delle variabili coinvolte nel modello. Pertanto, nel seguito studieremo le proprietà dei cosiddetti *sistemi positivi* ed, in particolare, di quei *sistemi dinamici lineari a tempo discreto* descritti da sistemi di equazioni del tipo

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + bu(k) \\ y(k) &= cx(k) \end{aligned}$$

con $p = q = 1$ (cioè con, al massimo, una variabile indipendente e un indice di prestazione) e a *tempo continuo* descritti da sistemi di equazioni del tipo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned}$$

con $p = q = 1$ (cioè con, al massimo, una variabile indipendente e un indice di prestazione) per i quali sussista il vincolo di *positività delle variabili* in esso rappresentate. Assumeremo inoltre che $D = 0$ e cioè che la variabile indipendente non sia anche un indice di prestazione.

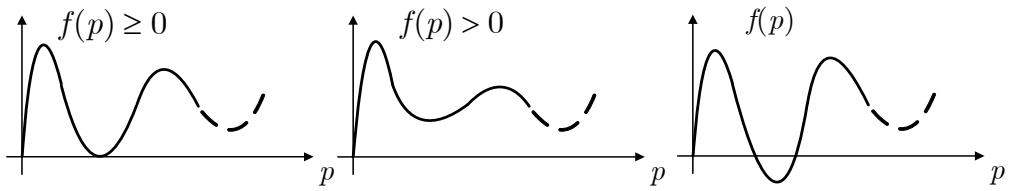


Figura 2.1: Esempi di funzioni non negative, positive e senza vincoli di segno.

2.1 Definizioni e proprietà

Preliminarmente definiamo alcune notazioni usate nel seguito. Una funzione (scalare o vettoriale) di un parametro $f(p)$ che assuma valori non negativi (cioè positivi o nulli) ma non tutti nulli *per ogni* valore del parametro p verrà indicata con $f(p) \geq 0$. Se invece i valori assunti *per ogni* valore del parametro p sono esclusivamente positivi (eccetto per $p = 0$ dove $f(0) \geq 0$), si scriverà $f(p) > 0$. Per esempio, scrivendo $u(t) \geq 0$ indicheremo il fatto che la variabile indipendente assumerà solo valori positivi o nulli per qualsiasi valore del tempo t .

Una matrice A i cui elementi sono tutti non negativi ma non tutti nulli si dice *matrice non negativa* ed indicata con $A \geq 0$; se invece tutti i suoi elementi sono positivi si dice *matrice positiva* e si scrive $A > 0$. Una matrice A per cui esiste uno scalare $\alpha \geq 0$ tale che $A + \alpha I \geq 0$ si dice *essenzialmente non negativa* e si scrive $A \geq_e 0$. Le matrici essenzialmente non negative sono tali per cui gli elementi fuori dalla diagonale principale sono non negativi mentre quelli su tale diagonale possono assumere qualsiasi segno. Possiamo adesso definire con precisione cosa si intenda per *sistema positivo*.

DEFINIZIONE. (**sistema lineare positivo**)

Un sistema lineare (A, b, c) si dice *positivo* se l’evoluzione dello stato e dell’indice di prestazione si mantengono entrambi non negativi a fronte di un qualsiasi andamento non negativo della variabile indipendente e per qualsiasi stato iniziale nonnegativo e cioè se $\forall u(t) \geq 0$ e $\forall x(0) \geq 0$ allora $x(t) \geq 0$ e $y(t) \geq 0 \ \forall t$ ($\forall u(k) \geq 0$ e $\forall x(0) \geq 0$ allora $x(k) \geq 0$ e $y(k) \geq 0 \ \forall k$).

Un sistema positivo è pertanto un sistema nel quale la positività delle variabili sia richiesta *in ogni istante* (o *passo*). Tale richiesta è legata, naturalmente, al significato “fisico” delle variabili e quindi essa impone un vincolo

di consistenza del modello rispetto alle assunzioni di partenza. Infatti, se una delle variabili assumesse valori negativi, allora il modello non potrebbe più essere considerato valido in quanto si perderebbe il legame con la “realtà”. Come vedremo subito, per esempio, i modelli di trasferimento di risorsa sono generalmente (ma non sempre) sistemi positivi e pertanto la loro consistenza modellistica è assicurata *a priori*.

► **ESEMPIO. (andamento ciclico dei prezzi e parco macchine)**

Si consideri il modello a ragnatela per descrivere l'andamento dei prezzi di un bene

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= -\frac{b}{a}x_1(k) + \frac{D-Q}{a} \end{aligned}$$

Tale modello non assicura la nonnegatività dei prezzi per qualsiasi stato iniziale dei prezzi. Infatti, anche assunto $u(k) = \frac{D-Q}{a} \geq 0$, avremo dopo il primo periodo che

$$\begin{aligned} x(1) &= x_2(0) \\ x_2(1) &= -\frac{b}{a}x_1(0) + \frac{D-Q}{a} \end{aligned}$$

e quindi dovrà essere verificata la condizione

$$-\frac{b}{a}x_1(0) + \frac{D-Q}{a} \geq 0 \iff x_1(0) \leq \frac{D-Q}{b}$$

e pertanto tale modello *non* è un sistema positivo.

Si consideri il modello di parco macchine la cui rete d'influenza è disegnata in Figura 2.2. Come si vede, è presente un prelievo di risorsa dal secondo compartimento dovuta alla vendita di macchine usate. E' chiaro che tale sistema non può essere positivo in quanto non sarà possibile prelevare dal secondo compartimento più automobili di quelle che sono correntemente presenti in esso. Pertanto, esiste certamente un $u(t) \geq 0$ in grado di portare il sistema in uno stato in cui $x_2(t)$ diventa negativo per qualche t . In conclusione, il modello di parco macchine non è un sistema positivo nel caso in cui sia presente prelievo di risorsa da qualche compartimento ma – per adesso – non possiamo nemmeno concludere che si tratti di un sistema positivo nel caso in cui non ci siano prelievi di risorsa da parte di variabili indipendenti. Per poter fare questo serve il prossimo teorema.



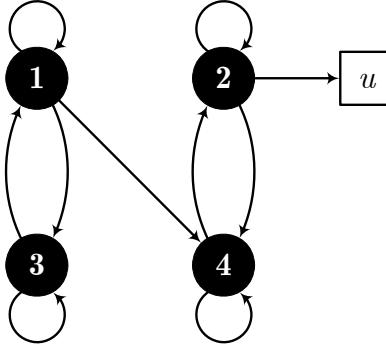


Figura 2.2: Rete d'influenza del modello di parco macchine in cui sia presente del prelievo di risorsa e cioè la vendita di automobili usate.

Vediamo quindi un teorema che ci permette di verificare immediatamente, sulla base delle matrici di sistema, se un dato sistema sia positivo o meno.

TEOREMA. (condizioni di positività)

Un sistema lineare a tempo discreto (A, b, c) è positivo se e solo se $A \geq 0$, $b \geq 0$ e $c \geq 0$ se definiti. Un sistema lineare a tempo continuo (A, b, c) è positivo se e solo se $A_e \geq 0$, $b \geq 0$ e $c \geq 0$.

Cominciamo la dimostrazione per il caso di sistemi a tempo discreto e cioè per quei sistemi descritti da

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + bu(k) \\ y(k) &= cx(k) \end{aligned}$$

Le condizioni $A \geq 0$, $b \geq 0$ e $c \geq 0$ certamente implicano la positività del sistema, infatti per quanto riguarda la variabile di stato si ha che

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} b u(h)$$

dove, per ogni scelta di $x(0)$ e $u(k)$ non negativo, tutte le quantità sono sempre non negative e le operazioni di prodotto e somma tra quantità non negative mantengono la non negatività. Analogamente per la l'indice di prestazione

$$y(k) = cx(k)$$

la non negatività di $y(k)$ segue dalla non negatività di $x(k)$ e del vettore riga c . Per quanto riguarda il caso a tempo continuo, e cioè per sistemi descritti da

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t)\end{aligned}$$

l'andamento dello stato è

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

e quindi, per dimostrare la non negatività di $x(t)$ per ogni scelta di $u(t)$ e $x(0)$ non negativo basta verificare che $e^A \geq 0$. Infatti, l'integrale di una funzione non negativa è certamente anch'essa non negativa. Poichè la matrice A è, per ipotesi, essenzialmente non negativa, allora esiste un $\alpha \geq 0$ tale che

$$A + \alpha I \geq 0$$

e quindi $e^{A+\alpha I} \geq 0$ essendo

$$e^{A+\alpha I} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A + \alpha I)^k \geq 0$$

Inoltre, si può scrivere

$$e^{A+\alpha I} = e^{\alpha I} e^A = e^{\alpha} e^A$$

è poichè e^{α} è uno scalare positivo, la non negatività di $e^{A+\alpha I}$ implica quella di e^A e quindi, ovviamente, anche quella di e^{At} per ogni $t \geq 0$. Abbiamo quindi dimostrato che le condizioni sulle matrici del sistema imposte dal teorema implicano la sua positività.

Vediamo adesso come si dimostra che la positività del sistema implica, per il tempo discreto, le condizioni $A \geq 0$, $b \geq 0$ e $c \geq 0$. Cominciamo con il dimostrare che $A \geq 0$ e per questo consideriamo la sola evoluzione libera

$$x(k+1) = Ax(k)$$

Poichè la positività è verificata per ogni stato iniziale $x(0) \geq 0$, a maggior ragione sarà verificata assumendo come stato iniziale uno qualsiasi dei versori degli assi coordinati e cioè

$$x(0) = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-esima posizione}$$

Pertanto, l'evoluzione libera dopo un passo $x(1)$ sarà

$$x(1) = Ax(0) = Ae_i = [A]_i$$

dove $[A]_i$ è proprio l' i -esima colonna della matrice A e poichè per ipotesi $x(1) \geq 0$, ne segue anche che $[A]_i \geq 0$. Ripetendo il ragionamento per tutti i versori degli assi si ottengono le condizioni di non negatività di tutte le colonne della matrice A e quindi la sua nonnegatività. La dimostrazione della non negatività del vettore riga c è analoga, in quanto si ha che

$$y(k) = cx(k), \quad y(k) \geq 0, \quad x(k) \geq 0$$

ed in particolare che

$$y(0) = cx(0), \quad y(0) \geq 0, \quad x(0) \geq 0$$

Pertanto, scegliendo i versori degli assi come stato iniziale, e cioè $x(0) = e_i$, si ottiene che $[c]_i \geq 0$, cioè che l' i -esimo elemento di c è non negativo per ogni $i = 1, 2, \dots, n$. Infine, per dimostrare la non negatività del vettore b consideriamo la risposta forzata ad un passo

$$x_f(1) = bu(0)$$

e poichè, senza perdita di generalità, lo scalare $u(0)$ è positivo e, per ipotesi, il vettore $x_f(1) \geq 0$, ne segue immediatamente che $b \geq 0$. Vediamo adesso come si dimostra il teorema per sistemi a tempo continuo. usando le illustrazioni di Figura 2.3. Cominciamo con il dimostrare che $b \geq 0$. Consideriamo la risposta forzata per $t = 0$ e quindi

$$\dot{x}(0) = bu(0)$$

In base alla Figura 2.3 (sinistra) si vede che, essendo qualsiasi traiettoria $x(t)$ confinata al quadrante nonnegativo, il vettore tangente alla traiettoria $\dot{x}(t)$ per $t = 0$ deve necessariamente essere non negativo perchè, altrimenti, parte della traiettoria dovrebbe avere una o più componenti negative per un certo tempo. Pertanto, se – senza perdita di generalità – assumiamo che sia $u(0) > 0$, ne segue immediatamente che $b \geq 0$. Per dimostrare che $A \geq_e 0$ consideriamo il caso in cui $u(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$ e $x(0) = e_i$ e cioè $x_i(0) = 1$ e $x_j(0) = 0$ per $j \neq i$. Come si vede in Figura 2.3 (destra) il vettore tangente alla traiettoria $\dot{x}(t)$ per $t = 0$ dovrà avere componenti non negative rispetto agli assi diversi dall' i -esimo, mentre potrà avere qualsiasi segno rispetto all'asse i -esimo. Poichè inoltre

$$\dot{x}(0) = Ae_i = [A]_i$$

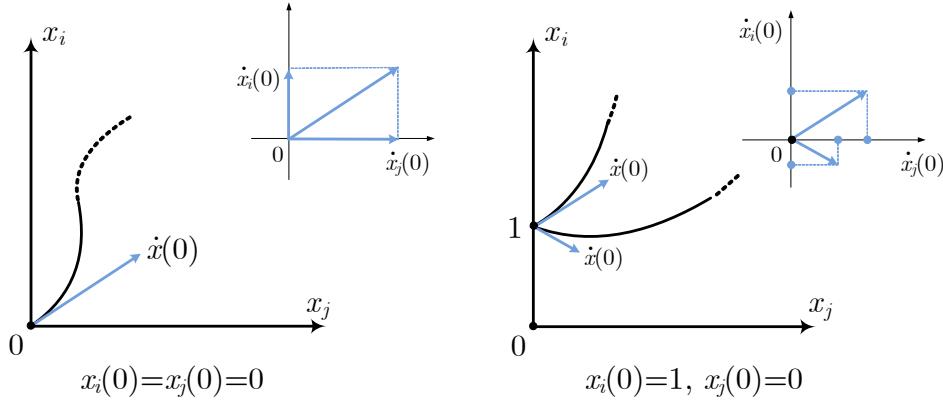


Figura 2.3: Illustrazione della dimostrazione del teorema che lega la positività del sistema alle matrici dinamiche di un sistema lineare a tempo continuo.

ne segue che l' i -esima colonna dovrà avere tutti elementi non negativi eccetto l' i -esimo che invece potrà assumere qualsiasi valore. Ripetendo il ragionamento per $i = 1, 2, \dots, n$ si ottiene che la matrice dinamica A dovrà avere tutti gli elementi fuori dalla diagonale principale non negativi, mentre quelli sulla diagonale potranno assumere qualsiasi valore e pertanto essa risulta essere essenzialmente non negativa. La dimostrazione che $c \geq 0$ è assolutamente analoga al caso a tempo discreto.

Il precedente teorema ci permette di verificare la positività di un sistema in modo molto semplice e direttamente sulle matrici di sistema (A, b, c) . In particolare è facile trovare le condizioni affinché un modello di flusso od un modello di decisione siano sistemi positivi.

TEOREMA. (positività dei modelli di flusso e dei modelli di decisione)

Un modello di flusso (o di decisione) (A, b) è un sistema positivo se e solo se non esistono prelievi di risorsa e cioè se $b \geq 0$.

La dimostrazione del precedente teorema è immediata.

► **ESEMPIO. (catena di produzione con test di qualità)**

Si consideri il modello di produzione il cui grafo di flusso è disegnato in Figura 2.4. Nel modello è previsto un prelievo di risorsa, infatti la variabile indipendente $u_2(t)$ rappresenta la vendita di prodotto finito e pertanto il

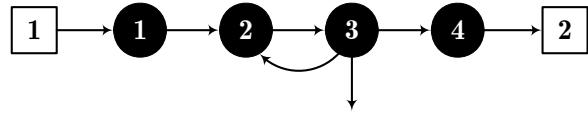


Figura 2.4: Catena di produzione con test di qualità nel quale sia presente sia immissione di risorsa (materiale grezzo) che prelievo (prodotto finito).

sistema, così com'è, non può essere un sistema positivo. La prima variabile indipendente $u_1(t)$, rappresenta invece un'immissione di risorsa e pertanto il sistema *senza* la seconda variabile indipendente è invece un sistema positivo. \blacktriangleleft

2.2 Comportamento di lungo periodo e stabilità

Come è noto, le proprietà di lungo periodo e quindi la stabilità degli equilibri e delle coppie d'equilibrio per i sistemi lineari riguardano esclusivamente la matrice dinamica A del sistema. Pertanto, in questa sezione, non terremo conto delle matrici b e c e quindi studieremo le proprietà delle matrici non negative (per sistemi a tempo discreto) e delle matrici essenzialmente non negative (sistemi a tempo continuo). A tal fine vale il seguente teorema che riguarda gli autovalori dominanti, e cioè quelli di massimo modulo per i sistemi a tempo discreto e di massima parte reale per i sistemi a tempo continuo. Assumeremo, come usuale, che gli autovalori siano distinti.

TEOREMA. (autovalore ed autovettore di Frobenius)

Un sistema lineare positivo a tempo discreto ammette almeno un autovalore dominante reale non negativo λ_F (detto di Frobenius) ed un sistema lineare positivo a tempo continuo ammette un solo autovalore dominante reale λ_F (detto di Frobenius). L'autovettore v_F (detto di Frobenius) associato a λ_F è non negativo e non esistono altri autovettori positivi.

Cominciamo con il dimostrare che, fra gli autovalori dominanti, ne esiste certamente uno reale per sistemi positivi a tempo continuo ed uno reale non negativo per i sistemi a tempo discreto. Infatti, se i modi dominanti fossero tutti complessi allora l'evoluzione libera, per qualche valore dello stato iniziale, dovrebbe diventare prima o poi negativa per qualche valore di t o

k “abbastanza grande” in quanto le corrispondenti leggi temporali sul lungo periodo, per un generico stato iniziale, assumeranno un valore negativo. Infatti, per il tempo continuo si ha che

$$x_l(t) \text{ per } t \rightarrow \infty : x_l(t) \cong \sum_{i=1}^{\rho} m_i e^{\alpha_i t} [\sin(\omega_i t + \varphi_i) v_{ia} + \cos(\omega_i t + \varphi_i) v_{ib}]$$

dove $\lambda_i = \alpha_i + j\omega_i$ e, per il tempo discreto, si che

$$x_l(k) \text{ per } k \rightarrow \infty : x_l(k) \cong c\lambda^k v + \sum_{i=1}^{\rho} m_i \sigma^k [\sin(\theta_i k + \varphi_i) v_{ia} + \cos(\theta_i k + \varphi_i) v_{ib}]$$

dove $\sigma_i e^{j\theta_i}$ sono gli autovalori dominanti complessi e $\lambda < 0$ è l’eventuale autovalore dominante negativo. Dimostriamo adesso che l’autovalore di Frobenius per sistemi positivi a tempo continuo, e cioè l’autovalore dominante reale, è unico.

La matrice dinamica A di un sistema positivo a tempo continuo è essenzialmente non negativa e quindi, per definizione, si ha che

$$\bar{A} := A + \alpha I \geq 0$$

per qualsiasi $\alpha \geq \bar{\alpha}$ dove $\bar{\alpha} = -\min_i a_{ii}$ con $i = 1, 2, \dots, n$. Inoltre, lo spettro della matrice \bar{A} concide con quello della matrice A traslato a destra di una quantità pari ad α . Infatti si ha che

$$p_{\bar{A}}(\lambda) = \det(\lambda I - \bar{A}) = \det(\lambda I - A - \alpha I) = \det[(\lambda - \alpha)I - A] = p_A(\lambda - \alpha)$$

Pertanto, la matrice \bar{A} è non negativa ed ha lo spettro che coincide con quello di A traslato a destra di α . Se ipotizziamo che A abbia autovalori complessi di massima parte reale, e cioè pari a λ_F , allora \bar{A} avrà necessariamente autovalori di massimo modulo complessi per la proprietà di traslazione dello spettro come mostrato in Figura 2.5. La presenza di autovalori di massimo modulo complessi contraddice l’ipotesi che sia $\bar{A} \geq 0$ in quanto un sistema positivo a tempo discreto non può avere autovalori dominanti complessi. Dimostriamo adesso che l’autovettore v_F associato a λ_F è non negativo per i soli sistemi a tempo continuo.

A tal fine è sufficiente considerare che l’evoluzione libera, al tendere di t o $k \rightarrow \infty$ e a partire da un generico stato iniziale, si allinea all’autovettore dominante che è unico e pari a v_F e se questo *non* fosse non negativo (cioè avesse qualche componente negativa), allora essa uscirebbe dall’ortante positivo per qualche t o k “abbastanza grande”. La Figura 2.6 illustra la dimostrazione nel caso di sistemi a tempo continuo. Dimostriamo, infine, che non esiste un

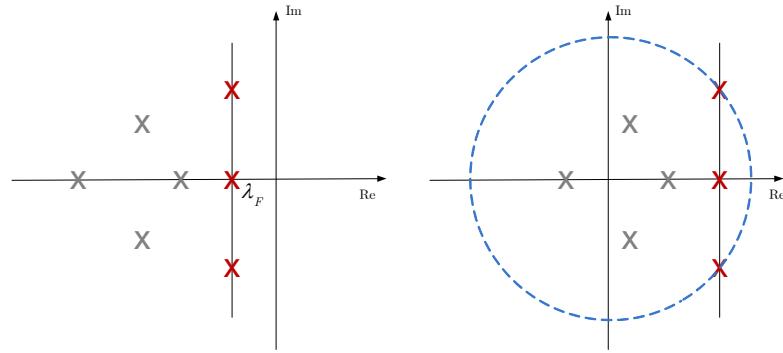


Figura 2.5: Traslazione dello spettro di una matrice essenzialmente non negativa. Si noti come l'autovalore di Frobenius di A , dopo la traslazione dello spettro, non sia più quello dominante, cioè di massimo modulo per la matrice \bar{A} .

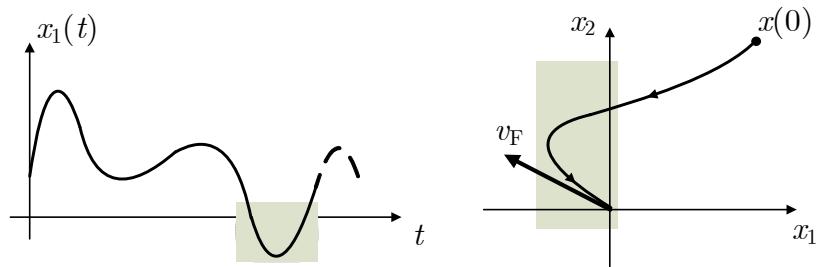


Figura 2.6: Illustrazione della dimostrazione del teorema di Frobenius. Andamento temporale di una variabile di stato (sinistra) e una traiettoria nello spazio di stato (destra) per un sistema a tempo continuo.

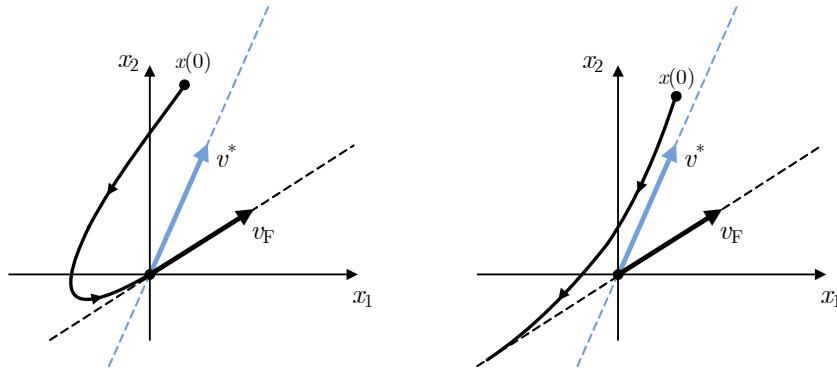


Figura 2.7: Illustrazione della prova che non può esistere un autovettore positivo che non sia quello di Frobenius. A sinistra il caso in cui sia $\lambda_F < 0$ e a destra il caso in cui sia $\lambda_F > 0$ e $\lambda^* < 0$.

autovettore positivo che non sia quello di Frobenius solo per il caso di sistemi a tempo continuo. Infatti, assumendo inizialmente che sia $n = 2$, se ci fosse un $v^* > 0$ associato ad un autovalore $\lambda^* < \lambda_F$ allora esisterebbe uno stato iniziale positivo per cui la traiettoria corrispondente dell’evoluzione libera nello spazio di stato diventerebbe, sul lungo periodo, certamente negativa, come illustrato in Figura 2.7. Si noti che, una qualsiasi evoluzione libera non può attraversare la retta definita da un qualsiasi autovettore reale in quanto l’autospazio generato da una autovettore è invariante rispetto all’evoluzione libera del sistema. In realtà la precedente dimostrazione vale per qualsiasi n . Infatti, basta considerare lo stesso ragionamento precedente considerando l’autospazio invariante generato dagli autovettori v^* e v_F .

► **ESEMPIO. (modello a struttura d’età)**

Consideriamo una popolazione con due sole classi d’età (come nel caso dei salmoni del Pacifico) le cui equazioni di stato siano le seguenti

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & s_0 f_2 \\ s_1 & 0 \end{pmatrix} x(k)$$

Il sistema è chiaramente positivo e verifichiamo quindi la validità del teorema di Frobenius. Il polinomio caratteristico è

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - s_0 s_1 f_2$$

e pertanto gli autovalori sono $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{s_0 s_1 f_2}$. Ne segue che $\lambda_F = \sqrt{s_0 s_1 f_2}$. L’autovettore corrispondente deve essere soluzione di

$$Av_F = \lambda_F v_F \implies (A - \lambda_F I)v_F = 0$$

e cioè

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{s_0 s_1 f_2} & \frac{s_0 f_2}{s_1} \\ s_1 & -\sqrt{s_0 s_1 f_2} \end{pmatrix} v_F = 0$$

da cui, per esempio, si ottiene

$$v_F = \begin{pmatrix} f_2 s_0 \\ \sqrt{f_2 s_0 s_1} \end{pmatrix}$$

che è proprio un vettore non negativo. Si noti come l'autovalore dominante non sia unico in quanto l'autovalore $-\sqrt{s_0 s_1 f_2}$ ha lo stesso modulo di λ_F .

◀

Per i sistemi positivi è possibile ottenere in modo semplice degli estremi inferiore e superiore per l'autovalore di Frobenius utilizzando il seguente teorema.

TEOREMA. (estremi inferiore e superiore dell'autovalore di Frobenius)

Dato un sistema positivo descritto dalla matrice A e siano r_i e c_i le somme degli elementi della riga i -esima e colonna i -esima rispettivamente, allora l'autovalore di Frobenius λ_F è compreso fra i seguenti estremi

$$\max \left(\min_i r_i, \min_i c_i \right) \leq \lambda_F \leq \min \left(\max_i r_i, \max_i c_i \right)$$

Vediamo adesso la dimostrazione del precedente teorema. Per il teorema di Frobenius esiste certamente l'autovettore v_F e il corrispondente autovalore di Frobenius λ_F . Senza perdita di generalità tale autovettore può essere scelto in modo che sia

$$\sum_{i=1}^n v_{F_i} = 1, \quad 0 \leq v_{F_i} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Inoltre, per definizione di autovettore vale la relazione $Av_F = \lambda_F v_F$ che scritta per esteso diventa

$$\begin{aligned} a_{11}v_{F_1} + a_{12}v_{F_2} + \dots + a_{1n}v_{F_n} &= \lambda_F v_{F_1} \\ a_{21}v_{F_1} + a_{22}v_{F_2} + \dots + a_{2n}v_{F_n} &= \lambda_F v_{F_2} \\ &\vdots \\ a_{n1}v_{F_1} + a_{n2}v_{F_2} + \dots + a_{nn}v_{F_n} &= \lambda_F v_{F_n} \end{aligned}$$

Sommando tutte queste equazioni si ottiene

$$c_1 v_{F_1} + c_2 v_{F_2} + \dots + c_n v_{F_n} = \lambda_F \sum_{i=1}^n v_{F_i} = \lambda_F$$

Pertanto l'autovalore dominante λ_F risulta essere una combinazione convessa dei coefficienti c_i e quindi

$$\min_i c_i \leq \lambda_F \leq \max_i c_i$$

Mediante lo stesso procedimento dimostrativo si mostra la stessa proprietà per le righe della matrice A considerando la matrice trasposta A^T la quale continua ad essere la matrice dinamica di un sistema positivo ed ha inoltre gli stessi autovalori della matrice A .

Si consideri, ad esempio, la matrice essenzialmente negativa

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

dove

$$\begin{aligned} r_1 &= -3, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = -2, \quad r_4 = -2 \\ c_1 &= -1, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = -5, \quad c_4 = -1 \end{aligned}$$

e pertanto avremo che

$$-3 \leq \lambda_F \leq -1$$

e infatti $\lambda_F = -1.8851$. Possiamo inoltre concludere dalla disequazione che il sistema dinamico positivo corrispondente è asintoticamente stabile. Vediamo adesso degli esempi di applicazione del teorema sui modelli.

► **ESEMPIO. (modello a struttura d'età)**

Si consideri un modello di popolazione con due sole classi d'età descritto dal sistema positivo a tempo discreto

$$A = \begin{pmatrix} 0 & s_0 f_2 \\ s_1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $s_0 = 0.2$, $s_1 = 0.5$ e $f_2 = 2$. Si ottiene la matrice dinamica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Il teorema precedente permette di scrivere immediatamente

$$0.4 \leq \lambda_F \leq 0.5$$

ed infatti l'autovalore di Frobenius λ_F , calcolato come radice reale nonnegativa di massimo modulo del polinomio caratteristico, è pari a $\lambda_F = \sqrt{s_0 s_1 f_2} = \sqrt{0.4 \times 0.5} = 0.44721$.

◀

► **ESEMPIO. (parco macchine)**

Il sistema positivo che descrive un parco macchine è definito dalla seguente matrice dinamica

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 & 90 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 50 \\ 5 & 0 & 0 & -92 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & -75 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 & 0 & -60 \end{pmatrix} \times 10^{-4}$$

le somme degli elementi sulle colonne e sulle righe sono

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = c_3 = 0, \quad c_4 = -2, \quad c_5 = -5, \quad c_6 = -10 \rightarrow \min_i c_i = -10, \quad \max_i c_i = 0 \\ r_1 &= 81, \quad r_2 = 59, \quad r_3 = 38, \quad r_4 = -87, \quad r_5 = -64, \quad r_6 = -44 \rightarrow \\ &\rightarrow \min_i r_i = -87, \quad \max_i r_i = 81 \end{aligned}$$

moltiplicati per 10^{-4} . Il precedente teorema ci permette di scrivere

$$\max(-87 \times 10^{-4}, -10 \times 10^{-4}) \leq \lambda_F \leq \min(81 \times 10^{-4}, 0)$$

e cioè

$$-10 \times 10^{-4} \leq \lambda_F \leq 0$$

Il valore esatto è $\lambda_F = -1.7071 \times 10^{-4}$.

◀

Vediamo adesso delle semplici condizioni sufficienti di instabilità per sistemi positivi.

TEOREMA. (condizioni sufficienti di instabilità)

Se un sistema positivo a tempo continuo descritto dalla matrice dinamica A è tale per cui esiste almeno un elemento sulla diagonale principale $a_{ii} > 0$

allora esso è instabile. Se un sistema positivo a tempo descritto descritto dalla matrice dinamica A è tale per cui esiste almeno un elemento sulla diagonale principale $a_{ii} > 1$ allora esso è instabile.

La precedente condizione è solo sufficiente ma, in alcuni casi, permette di concludere immediatamente l'instabilità di un sistema positivo per semplice ispezione della matrice dinamica A . Vediamo la dimostrazione del precedente teorema, per il tempo continuo. Se l'elemento a_{ii} della matrice A è positivo, allora possiamo scrivere l' i -esima equazione di stato

$$\dot{x}_i(t) = a_{ii}x_i(t) + f_i(t)$$

dove, essendo il sistema positivo, avremo che

$$f_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0$$

Inoltre, per ipotesi, $a_{ii} > 0$ e quindi $a_{ii}x_i(t) > 0$ per ogni $t \geq 0$. Ne segue che anche $\dot{x}_i(t)$ sarà sempre positiva e pertanto $x_i(t)$ sarà una funzione sempre crescente del tempo. Ne segue che il sistema sarà necessariamente instabile. Analogamente, per il tempo discreto avremo che

$$x_i(k+1) = a_{ii}x_i(k) + f_i(k)$$

con $f_i(k) \geq 0$ per ogni $k \geq 0$. Ma se $a_{ii} > 1$ allora $x_i(k+1) > x_i(k)$ per ogni $k \geq 0$ e, di conseguenza, il sistema è certamente instabile.

► **ESEMPIO. (modello a struttura d'età)**

Si consideri un modello di popolazione con due sole classi d'età e con entrambi le classi fertili descritto dal sistema positivo a tempo discreto

$$A = \begin{pmatrix} s_0f_1 & s_0f_2 \\ s_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il teorema precedente ci permette di concludere che se, per esempio, $s_0f_1 > 1$ allora la popolazione avrà un tasso di crescita positivo (cioè il sistema è instabile). ◀

Vediamo adesso delle condizioni necessarie e sufficienti di asintotica stabilità, analoghe ai criteri di Routh e Schur-Cohn, ma decisamente più semplici.

TEOREMA. (polinomio caratteristico e stabilità)

Un sistema positivo a tempo continuo descritto dalla matrice dinamica A è asintoticamente stabile se e solo se i coefficienti α_i del polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

sono tutti positivi ed è instabile se almeno uno è negativo. Un sistema positivo a tempo discreto descritto dalla matrice dinamica A è asintoticamente stabile se e solo se i coefficienti del polinomio caratteristico $p_{A-I}(\lambda)$ sono tutti positivi ed è instabile se almeno uno è negativo.

Dimostriamo solo la sufficienza del precedente teorema per quanto riguarda l'asintotica stabilità e per sistemi a tempo continuo. Supponiamo quindi i coefficienti α_i del polinomio caratteristico siano tutti positivi, e cioè $\alpha_i > 0$. Allora, se l'autovalore di Frobenius λ_F fosse positivo o nullo si avrebbe necessariamente $p_A(\lambda_F) > 0$ il che non è possibile visto che λ_F è una radice del polinomio caratteristico per ipotesi (cioè esso è un autovalore). Ne segue che necessariamente $\lambda_F < 0$ e quindi il sistema è asintoticamente stabile.

Consideriamo, come esempio di applicazione del teorema, la matrice essenzialmente non negativa già vista in precedenza e cioè

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

otteniamo il polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \lambda^4 + 17\lambda^3 + 104\lambda^2 + 267\lambda + 235$$

il quale, avendo tutti i coefficienti positivi, è asintoticamente stabile.

► **ESEMPIO. (emigrazione con nascite)**

Il modello di emigrazione con nascite è un sistema positivo a tempo continuo la cui matrice dinamica è

$$A = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha_n & 0 & 0 \\ \beta & -\alpha_m - \alpha_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & -\alpha_m & \beta \\ 0 & 0 & \alpha_n & -\beta \end{pmatrix}$$

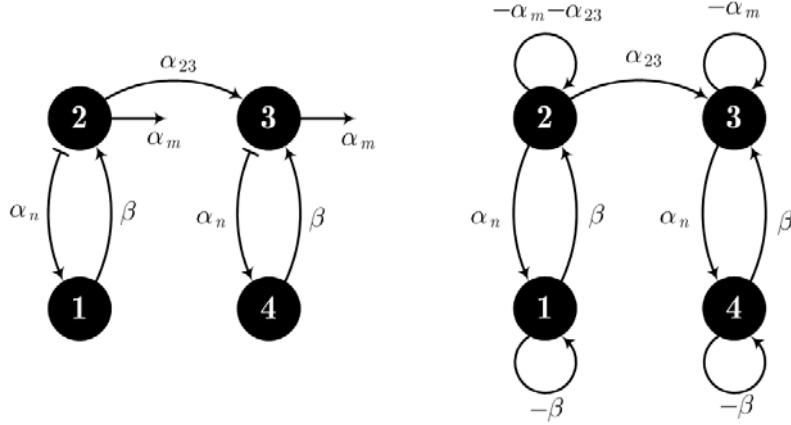


Figura 2.8: Grafo di trasferimento (sinistra) del modello di popolazione con emigrazione e relativo grafo d'influenza (destra).

ed il relativo grafo di trasferimento (o di flusso) e d'influenza sono disegnati in Figura 2.8. Se assumiamo $\alpha_m = \alpha_{23} = 1/1000$ e $\beta = 1/100$ la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} -1/100 & \alpha_n & 0 & 0 \\ 1/100 & -2/1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1/1000 & -1/1000 & 1/100 \\ 0 & 0 & \alpha_n & -1/100 \end{pmatrix}$$

che si può scrivere come

$$A = \frac{1}{100} \tilde{A}$$

dove

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 100\alpha_n & 0 & 0 \\ 1 & -1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & -1/10 & 1 \\ 0 & 0 & 100\alpha_n & -1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di \tilde{A} è

$$\begin{aligned} p_{\tilde{A}}(\lambda) = & \lambda^4 + \frac{23}{10}\lambda^3 + \left(-200\alpha_n + \frac{81}{50}\right)\lambda^2 + \left(-230\alpha_n + \frac{17}{50}\right)\lambda + \\ & + \frac{1}{50}(1000\alpha_n - 1)(500\alpha_n - 1) \end{aligned}$$

ed α_n rappresenta il tasso di natalità degli italiani (in Italia o all'estero). Se si vuole che la popolazione italiana non sia in declino, allora almeno uno dei

coefficienti del polinomio caratteristico deve essere negativo e quindi dovrà essere, per quanto riguarda i coefficienti α_2 ed α_3 :

$$\begin{aligned} -200\alpha_n + \frac{81}{50} &< 0 \rightarrow \alpha_n > \frac{81}{200 \times 50} = 0.0081 \text{ oppure} \\ -230\alpha_n + \frac{17}{50} &< 0 \rightarrow \alpha_n > \frac{17}{230 \times 50} = 0.0015 \end{aligned}$$

Inoltre, per quanto riguarda il coefficiente α_0 dovrà essere

$$\frac{1}{50} (1000\alpha_n - 1) (500\alpha_n - 1) < 0 \rightarrow 10000\alpha_n^2 - 30\alpha_n + \frac{1}{50} < 0$$

e quindi

$$0.001 < \alpha_n < 0.002$$

In conclusione, il tasso di natalità *minimo* per non avere una popolazione in declino è pari a $\alpha_n = 0.001$. Si noti, infine, che il segno dei coefficienti del polinomio caratteristico di A e di \tilde{A} sono gli stessi, come si verifica facilmente¹.

E' interessante notare che, in questo caso, è possibile arrivare alla stesse conclusioni semplicemente utilizzando il teorema sull'estremo inferiore e superiore dell'autovalore di Frobenius. Infatti, la somma delle colonne della matrice A è

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \alpha_n - \alpha_m, \quad c_3 = \alpha_n - \alpha_m, \quad c_4 = 0$$

Pertanto, se $\alpha_n - \alpha_m \leq 0$ e quindi $\alpha_n < \alpha_m$ avremo che

$$\alpha_n - \alpha_m \leq \lambda_F \leq 0$$

¹Infatti se

$$A = \frac{1}{c} \tilde{A}$$

si ha che

$$p_A(\lambda) = \frac{1}{c} p_{\tilde{A}}(c\lambda)$$

Basta verificare che

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} p_{\tilde{A}}(c\lambda) &= \frac{1}{c} \det(c\lambda I - \tilde{A}) = \\ &= \frac{1}{c} \det(c\lambda I - cA) = p_A(\lambda) \end{aligned}$$

ed osservare che il segno dei coefficienti del polinomio $\frac{1}{c} p_{\tilde{A}}(c\lambda)$ è lo stesso di $p_A(\lambda)$ se si sceglie $c > 0$.

e quindi il sistema è asintoticamente o marginalmente stabile. Se invece $\alpha_n - \alpha_m \geq 0$ e cioè $\alpha_n \geq \alpha_m$ avremo che

$$0 \leq \lambda_F \leq \alpha_n - \alpha_m$$

e quindi il sistema sarà marginalmente stabile o instabile. La conclusione è quindi che per $\alpha_n > \alpha_m$ il sistema sarà instabile, e cioè, nel caso in esame, per $\alpha_n > 1/1000$ e cioè quanto il tasso di natalità è superiore a quello di mortalità.

Infine, riprendendo il caso in esame e considerando il caso generale

$$A = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \alpha_{n1} & 0 & 0 \\ \beta_1 & -\alpha_{m1} - \alpha_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & -\alpha_{m2} & \beta_2 \\ 0 & 0 & \alpha_{n2} & -\beta_2 \end{pmatrix}$$

notiamo che il sistema è riducibile e quindi è possibile studiare gli autovalori separatamente dei due sottosistemi positivi

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \alpha_{n1} \\ \beta_1 & -\alpha_{m1} - \alpha_{23} \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} -\alpha_{m2} & \beta_2 \\ \alpha_{n2} & -\beta_2 \end{pmatrix}$$

ed applicare il ragionamento precedente, ottenendo che il sistema è instabile se

$$\alpha_{n1} > \alpha_{m1} + \alpha_{23}$$

oppure se

$$\alpha_{n2} > \alpha_{m2}$$

Val la pena notare che mentre la condizione $\alpha_{n2} > \alpha_{m2}$ è sufficiente a garantire l'instabilità del sistema, lo stesso non è vero in generale in quanto la sola condizione $\alpha_{n1} > \alpha_{m1}$ non assicura l'instabilità del sistema. L'interpretazione di questo risultato è molto semplice: per quanto riguarda la popolazione di italiani in Italia non basta considerare solo il bilancio fra natalità e mortalità ma bisogna considerare anche il flusso d'emigrazione.

◀

Per concludere, illustriamo un risultato che permette di collegare la positività delle coppie di equilibrio con l'asintotica stabilità di un sistema positivo.

TEOREMA. (coppie d'equilibrio e stabilità)

In un sistema lineare positivo a tempo continuo o a tempo discreto, due qualsiasi delle seguenti proprietà implicano la terza:

1. La rete R_{ux} è raggiungibile
 2. Il sistema è asintoticamente stabile
 3. La coppia di equilibrio $[u_e, x_e]$ con $u_e > 0$ è tale per cui $x_e > 0$.
-

La prova del teorema sarà descritta nel seguito per il solo caso di sistemi a tempo discreto. *Dimostriamo che la (1) e la (2) implicano la (3).* La coppia d'equilibrio $[x_e, u_e]$ è asintoticamente stabile e quindi si ha che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = x_e \quad \forall x(0)$$

e per $k > n - 1$ si ottiene

$$\begin{aligned} x(k) &= A^k x(0) + \left(\sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} b \right) u_e = \\ &= A^k x(0) + (A^{k-1} b + A^{k-2} b + \dots + A^{n-1} b + \dots + A b + b) u_e \end{aligned}$$

ma per l'ipotesi di raggiungibilità e per la non negatività della matrice A si ha che

$$b + A b + A^2 b + \dots + A^{n-1} b > 0$$

e quindi, essendo $u_e > 0$ vale

$$x(k) > 0 \text{ per } k > n - 1$$

A maggior ragione $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = x_e > 0$ in quanto, essendo il sistema asintoticamente stabile $A^k x(0)$ tenderà a zero per $k \rightarrow \infty$ e quindi si avrà che

$$x(k) \rightarrow (A^{k-1} b + A^{k-2} b + \dots + A^{n-1} b + \dots + A b + b) u_e$$

da cui, per k abbastanza grande, segue che $x(k+1) > x(k)$.

Dimostriamo che la (2) e la (3) implicano la (1). Dall'asintotica stabilità, segue che lo stato di equilibrio x_e esiste e coincide con la risposta sul lungo periodo e cioè

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = x_e \quad \forall x(0)$$

e poichè con il cambio di variabile $m = k - h - 1$ si può scrivere

$$x(k) = A^k x(0) + \left(\sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} b \right) u_e = A^k x(0) + \left(\sum_{m=0}^{k-1} A^m b \right) u_e$$

avremo che

$$x_e = \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} A^m b \right) u_e \quad (2.1)$$

in quanto il sistema è, per ipotesi, asintoticamente stabile. Inoltre, essendo $u_e > 0$ e $x_e > 0$ ne segue che

$$\sum_{m=0}^{\infty} A^m b > 0 \quad (2.2)$$

Dobbiamo adesso mostrare che la (2.2) implica la raggiungibilità della rete R_x e cioè che

$$\sum_{m=0}^{n-1} A^m b > 0$$

Ragionando per assurdo, ipotizziamo che il vettore $\sum_{m=0}^{n-1} A^m b$ abbia una componente, diciamo l' i -esima, che sia pari a zero, allora – per la non negatività delle matrici A e b – tale componente dovrebbe essere nulla anche in tutti i vettori $A^m b$ per $m = 0, 1, \dots, n-1$. Ma, per il teorema di Cayley-Hamilton, il vettore $A^n b$ è una combinazione lineare degli $n-1$ precedenti vettori $A^m b$ e quindi tale componente nulla continuerebbe ad essere presente anche nel vettore $A^n b$. Pertanto, la componente nulla è presente nei vettori per qualsiasi $m = 0, 1, \dots, n$. Ne segue che anche la somma $\sum_{m=0}^n A^m b$ avrà l' i -esima componente nulla. Continuando ad applicare il teorema di Cayley-Hamilton per $m = n+1, n+2, \dots$ e così via, risulterebbe che $\sum_{k=0}^{\infty} A^k b$ dovrebbe avere la componente i -esima nulla e quindi anche x_e (si veda la 2.1), il che è contro l'ipotesi $x_e > 0$.

Dimostriamo che la (1) e la (3) implicano la (2). All'equilibrio vale

$$x_e = Ax_e + bu_e$$

che si può riscrivere come

$$x_e = A(Ax_e + bu_e) + bu_e = A^2x_e + (b + Ab)u_e$$

iterando questo calcolo si arriva a scrivere

$$x_e = A^n x_e + (b + Ab + \dots + A^{n-1}b)u_e$$

La trasposta è

$$x_e^T = x_e^T (A^T)^n + (b + Ab + \dots + A^{n-1}b)^T u_e$$

che si riscrive come

$$x_e^T (I - (A^T)^n) = (b + Ab + \dots + A^{n-1}b)^T u_e \quad (2.3)$$

La matrice A^T è ovviamente una matrice nonnegativa e, come tale, avrà il suo autovettore di Frobenius v_F^* (diverso in generale da v_F) mentre l'autovalore di Frobenius λ_F sarà sempre lo stesso di quello di A e vale quindi

$$A^T v_F^* = \lambda_F v_F^*$$

Moltiplicando a destra per v_F^* ad ambo i membri della (2.3) si ottiene

$$x_e^T (I - (A^T)^n) v_F^* = (b + Ab + \dots + A^{n-1}b)^T v_F^* u_e$$

e poichè

$$x_e^T (I - (A^T)^n) v_F^* = x_e^T v_F^* - x_e^T (A^T)^n v_F^* = (1 - \lambda_F^n) x_e^T v_F^*$$

in quanto

$$(A^T)^n v_F^* = \lambda_F^n v_F^*$$

si ricava

$$(1 - \lambda_F^n) x_e^T v_F^* = (b + Ab + \dots + A^{n-1}b)^T v_F^* u_e$$

Adesso possiamo sfruttare le ipotesi (1) e (3) per provare la (2). Infatti, $x_e^T v_F^* > 0$ perché $x_e^T > 0$ per ipotesi e $v_F^* \geq 0$. Inoltre, anche $(b + Ab + \dots + A^{n-1}b)^T v_F^* > 0$ perché $b + Ab + \dots + A^{n-1}b > 0$ per l'ipotesi di raggiungibilità della rete. Pertanto segue che

$$1 - \lambda_F^n > 0 \rightarrow \lambda_F < 1$$

e cioè il sistema è asintoticamente stabile.

► **ESEMPIO. (corsa agli armamenti)**

Consideriamo il modello di Richardson sulla corsa agli armamenti. La matrice dinamica A è essenzialmente non negativa pertanto il sistema è certamente positivo. Inoltre, anche le variabili indipendenti possono assumere solo valori positivi in quanto esse rappresentano le spese per armamenti indipendenti dal sentimento di minaccia “esterno” e pertanto essa rappresenta una misura del suo grado di aggressività intrinseco. Assumendo che in un gruppo di nazioni ne esista solo una che sia aggressiva (cioè una variabile indipendente), è ragionevole assumere che tale nazione sia certamente percepita come una minaccia dalle altre e quindi influenzera le spese militari di tutte le altre nazioni in maniera diretta o indiretta. Quest'ultima affermazione è equivalente, come è facile verificare, alla raggiungibilità della rete

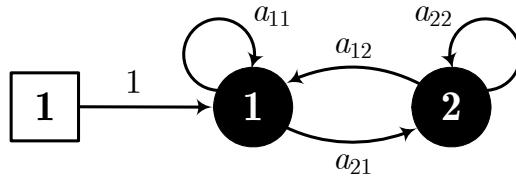


Figura 2.9: Grafo d'influenza del modello di corsa agli armamenti di Richardson nel caso di due sole nazioni. La nazione 1 è aggressiva e pertanto il coefficiente a_{21} sarà certamente positivo in quanto la nazione 2 percepirà la 1 come una minaccia aumentando così le sue spese in armamenti. La presenza dell'arco fra il nodo 1 ed il nodo 2 fa sì che il grafo risulti raggiungibile.

d'influenza ed è illustrata in Figura 2.9. Il precedente teorema ci permette di concludere che se in questo gruppo di nazioni si osserva un equilibrio positivo (tutte le nazioni hanno spese per armamenti) allora tale equilibrio è anche asintoticamente stabile e quindi, un eventuale aumento di spesa militare da parte di una qualsiasi delle nazioni, non porterà certamente alla corsa agli armamenti (cioè il sistema è asintoticamente stabile). ◀

Il teorema precedente può essere particolarizzato ai modelli di trasferimento senza generazione di risorsa nei quali, l'asintotica stabilità, è legata alla presenza di cammini che da ogni nodo portino a nodi che hanno una perdita. In questo caso, anche la seconda condizione diventa una condizione direttamente verificabile sul grafo d'influenza.

2.3 Proprietà dinamiche delle reti irriducibili

Vediamo adesso in questa sezione, come sia possibile caratterizzare ulteriormente la dinamica dominante dei sistemi positivi e quindi studiare tutti gli autovalori dominanti di un sistema positivo mediante le proprietà strutturali delle reti d'influenza.

Come descritto nella sezione precedente, non c'è perdita di generalità nell'assumere che il sistema sia nella forma canonica riducibile con i blocchi sulla diagonale corrispondenti a sottosistemi irriducibili. Poiché lo spettro di una matrice triangolare a blocchi è l'unione degli spettri degli autovalori dei suoi blocchi, nel seguito studieremo solo le proprietà spettrali delle reti e sistemi irriducibili.

TEOREMA. (modi dominanti dei sistemi irriducibili)

Un sistema lineare positivo a tempo discreto corrispondente ad una rete R_x irriducibile almeno un autovalore dominante reale positivo, cioè $\lambda_F > 0$. Inoltre, gli autovalori dominanti di una rete ciclica sono in numero pari all'indice di ciclicità r e sono disposti regolarmente, nel piano complesso, sulla circonferenza di raggio λ_F (si veda la Figura 2.10) e cioè soddisfano l'equazione

$$\lambda^r - \lambda_F^r = 0$$

e quindi

$$\lambda_{dom} = \lambda_F e^{j \frac{2\pi h}{r}}, \quad h = 0, 1, \dots, r-1$$

In particolare, se la rete è primitiva, l'autovalore dominante λ_F è unico.

Infine, nei sistemi positivi irriducibili a tempo discreto e a tempo continuo l'autovettore di Frobenius v_F è unico ed è positivo, cioè $v_F > 0$.

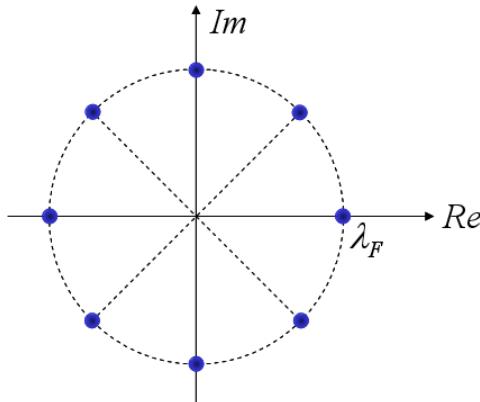


Figura 2.10: Posizione nel piano complesso degli autovalori dominanti di un sistema positivo ciclico con indice di ciclicità pari a $r = 8$.

Si consideri ad esempio una rete d'influenza ciclica con $r = 2$ come quella disegnata in Figura ?? la cui matrice di rete è

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un sistema positivo a tempo discreto corrispondente a tale rete è il seguente

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix} x(k)$$

il cui polinomio caratteristico è

$$p_A(\lambda) = \lambda^4 - a_{12}a_{21}\lambda^2 - a_{21}a_{14}a_{32}a_{43}$$

Il precedente teorema ci assicura che gli autovalori dominanti sono

$$\lambda_{dom} = \lambda_F e^{j\frac{2\pi h}{2}}, \quad h = 0, 1 \rightarrow \lambda_{dom1} = \lambda_F, \quad \lambda_{dom2} = \lambda_F e^{j\pi} = -\lambda_F$$

e quindi, oltre λ_F ci sarà anche l'autovalore $-\lambda_F$. Infatti, il polinomio caratteristico è un polinomio in λ^2 e pertanto se il numero reale λ_F è una sua soluzione allora lo sarà anche $-\lambda_F$. Il polinomio $p_A(\lambda)$ è fattorizzabile nella forma

$$p_A(\lambda) = (\lambda^2 - \lambda_F^2)(\lambda^2 + a) \quad \text{con } |a| < \lambda_F^2$$

L'evoluzione libera dominante è data da

$$x_{l\infty}(k) = \lambda_F^k [c_1 v_F + (-1)^k c_2 v_2]$$

la quale contiene un termine alternante e quindi il suo andamento di lungo periodo conterrà anch'esso tale termine.

► **ESEMPIO. (investimenti differenziati)**

Supponiamo che, ogni anno, una società riceva dai suoi clienti del denaro perchè faccia degli investimenti differenziati. Supponendo che, ogni anno, tutto il capitale disponibile venga investito (e cioè $a_{21} + a_{31} = 1$) e che tale capitale più gli interessi maturati ritornino disponibili, la rete d'influenza di un modello di decisione che possa descrivere questo fenomeno è disegnato in Figura 2.11. Dove $x_1(k)$ rappresenta il capitale disponibile dopo k anni, $x_2(k)$ ed $x_3(k)$ il capitale investito rispettivamente nel fondo che fornisce degli interessi pari a $1 + i_2$ e pari a $1 + i_3$. La variabile indipendente $u(k)$ rappresenta l'afflusso di denaro proveniente dal'esterno fra il periodo k ed il periodo $k+1$. Le matrici di sistema corrispondenti sono

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 + i_2 & 1 + i_3 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

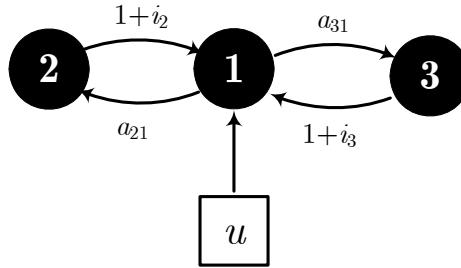


Figura 2.11: Rete d'influenza di un modello di investimenti differenziati in cui, ogni anno, tutto il capitale disponibile venga investito e tale capitale più gli interessi maturati ritornino a far parte del capitale disponibile.

con $a_{21} + a_{31}$. Come si vede dalla Figura 2.11, la rete d'influenza è ciclica di indice di ciclicità $r = 2$ e pertanto la sua dinamica dominante sarà caratterizzata da due autovalori reali di cui uno positivo (e cioè λ_F) ed un altro autovalore negativo pari a $-\lambda_F$. Questo vuol dire che, sul lungo periodo, l'andamento dell'evoluzione libera e della risposta forzata per $u(k)$ costanti conterranno dei modi alternanti e cioè delle oscillazioni negli andamenti delle variabili di stato. La dinamica dominante è quindi data da

$$x_{l\infty}(k) = \lambda_F^k [c_1 v_F + (-1)^k c_2 v_2]$$

con

$$\lambda_F = \sqrt{(1 + i_2) a_{21} + (1 + i_3) a_{31}}$$

e

$$v_F = \begin{pmatrix} \sqrt{(1 + i_2) a_{21} + (1 + i_3) a_{31}} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

Se, invece, pensiamo di non investire ogni anno tutto il denaro disponibile, ma solo una data frazione $\alpha < 1$, avremo che $a_{21} + a_{31} = \alpha$ e $a_{11} = 1 - \alpha = 1 - a_{21} - a_{31}$. In questo caso la rete d'influenza è quella disegnata in Figura 2.12 e le matrici del corrispondente modello di decisione sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 - a_{21} - a_{31} & 1 + i_2 & 1 + i_3 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Come si vede, la rete adesso non è più ciclica ma essa risulta primitiva ($r = 1$), pertanto la dinamica dominante sarà composta dal solo autovalore di

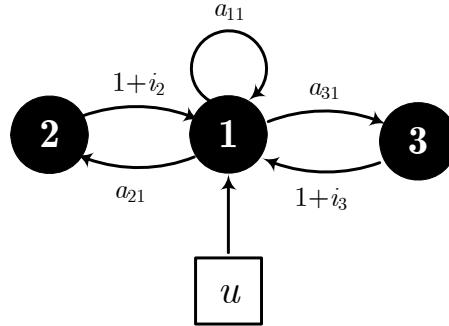


Figura 2.12: Rete d'influenza di un modello di investimenti differenziati in cui, ogni anno, *non* tutto il capitale disponibile venga investito.

Frobenius λ_F e l'andamento sul lungo periodo non conterrà oscillazioni ma un comportamento più regolare. La dinamica dominante è quindi data da

$$x_{l\infty}(k) = \lambda_F^k c_1 v_F$$

con

$$\lambda_F = \frac{1 - a_{31} - a_{21} + \sqrt{(1 + a_{21} + a_{31})^2 + 4(i_2 a_{21} + i_3 a_{31})}}{2}$$

e

$$v_F = \begin{pmatrix} 1 - a_{21} - a_{31} + \sqrt{(1 + a_{21} + a_{31})^2 + 4(i_2 a_{21} + i_3 a_{31})} \\ 2a_{21} \\ 2 \end{pmatrix}$$

In questo caso quindi il sistema diverge con una legge temporale che tende a diventare una semplice crescita geometrica (cioè λ_F^k) con un tasso di crescita pari a $\lambda_F - 1$. In altre parole, il capitale prodotto dall'investimento differenziato, sul lungo periodo, avrà un tasso di crescita pari a $\lambda_F - 1$.

L'andamento dell'evoluzione libera nei due casi è disegnata in Figura 2.13. Gli andamenti in figura corrispondono ai valori di $i_2 = 5\%$, $i_3 = 7\%$, $a_{21} = 0.4$, $a_{31} = 0.6$ (caso ciclico) cui corrisponde $\lambda_F - 1 = 0.0305$ e $a_{21} = 0.3$, $a_{31} = 0.5$ (caso primitivo) a cui corrisponde $\lambda_F - 1 = 0.0274$ e quindi un tasso di crescita sul lungo periodo pari a 2.74%. Si noti che, nel caso ciclico, non si può parlare in senso proprio di un tasso di crescita sul lungo periodo in quanto l'evoluzione si mantiene oscillatoria nel tempo (come ben si vede nella figura), ma solo di un tasso di crescita “medio” sul lungo periodo.



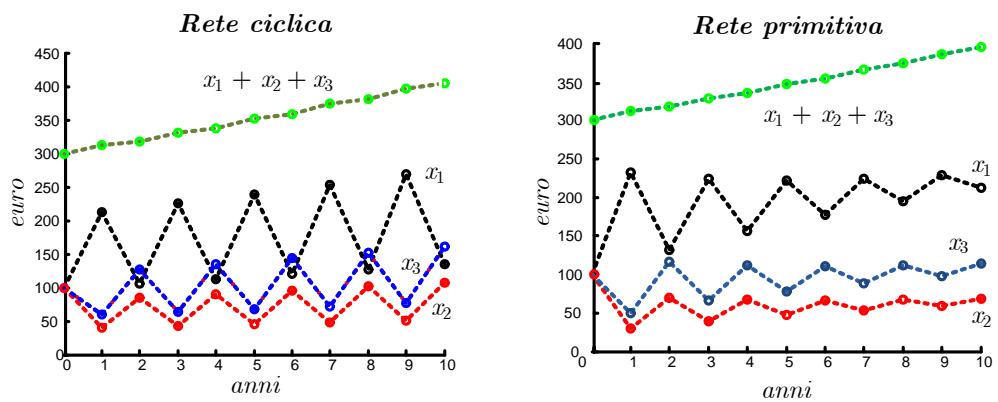


Figura 2.13: Evoluzione libera per il modello di investimenti differenziati nel caso di rete ciclica (sinistra) e primitiva (destra).

Parte seconda

1D EQUAZIONI SCALARI AUTONOME

L'EQUAZIONE LOGISTICA

Su alcune differenze tra i sistemi dinamici lineari e non

Un possibile modello, detto di Malthus (Figura 1), per descrivere la crescita di una popolazione è dato dall'equazione differenziale

$$\dot{n}(t) = rn(t)$$

in cui la quantità $n(t) > 0$ misura la numerosità della popolazione all'istante t ed $r = \dot{n}(t)/n(t)$ rappresenta il tasso di crescita istantaneo della popolazione stessa. Tale modello deriva dallo studio fatto da Malthus sull'andamento della popolazione delle colonie inglesi del New England, dove la disponibilità "illimitata" di nuova terra fertile aveva permesso uno sviluppo della popolazione con una progressione geometrica crescente di ragione costante $1 + R(T)$, e cioè

$$n(t + T) = (1 + R(T))n(t)$$

in cui $R(T)$ rappresenta il tasso di crescita della popolazione nell'intervallo di tempo T . Considerando intervalli di tempo T sempre più piccoli si ottiene quindi

$$\dot{n}(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{n(t + T) - n(t)}{T} = rn(t)$$

con $r = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{R(T)}{T}$.



Figura 1:

Thomas Robert Malthus (Roocherry, 13 febbraio 1766 – Bath, 23 dicembre 1834) è stato un economista e demografo inglese. Nel 1798 pubblicò "An essay of the principle of the population as it affects the future improvement of society" (Saggio sul principio della popolazione e i suoi effetti sullo sviluppo futuro della società), in cui sostenne che l'incremento demografico avrebbe spinto a coltivare terre sempre meno fertili con conseguente penuria di generi di sussistenza per giungere all'arresto dello sviluppo economico, poiché la popolazione tenderebbe a crescere in progressione geometrica, quindi più velocemente della disponibilità di alimenti, che crescono invece in progressione aritmetica, teoria questa che sarà poi ripresa da altri economisti per teorizzare l'esaurimento del carbone prima, e del petrolio dopo.

Se la popolazione è in crescita, cioè $r > 0$, allora, poiché

$$r = \frac{\dot{n}(t)}{n(t)} = \frac{1}{n(t)} \frac{dn(t)}{dt} = \frac{d \ln n(t)}{dt}$$

si ha

$$d \ln n(t) = r dt$$

e quindi, integrando entrambi i membri, si ottiene

$$\ln n(t) - \ln n(0) = rt$$

da cui

$$n(t) = n(0)e^{rt}$$

La crescita della popolazione è quindi di tipo esponenziale, come mostrato in Figura 2.

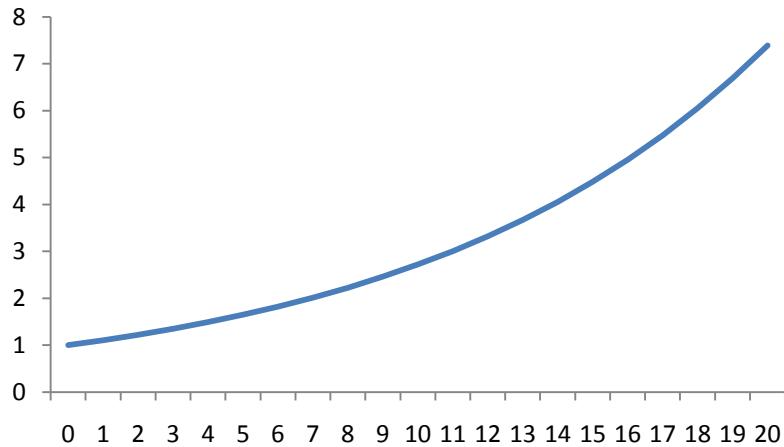


Figura 2 :
Crescita esponenziale di una popolazione con tasso istantaneo di crescita costante.

Tale modello si fonda su semplificazioni molto drastiche trascurando diversi fattori. Si assume infatti che il tasso di riproduzione non dipenda né dall'età né dalla numerosità della popolazione. Questo secondo aspetto dipende essenzialmente dal fatto che, in presenza di risorse limitate, l'aumento della numerosità della popolazione crea una sempre maggiore competizione per le risorse stesse che può far diminuire il tasso di riproduzione. Il modo più semplice di modellare la dipendenza del tasso di riproduzione dalla numerosità della popolazione è quello di assumere una sua dipendenza lineare, e cioè

$$r(n) \stackrel{\text{def}}{=} r \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

La funzione $r(n)$ è riportata in Figura 3.

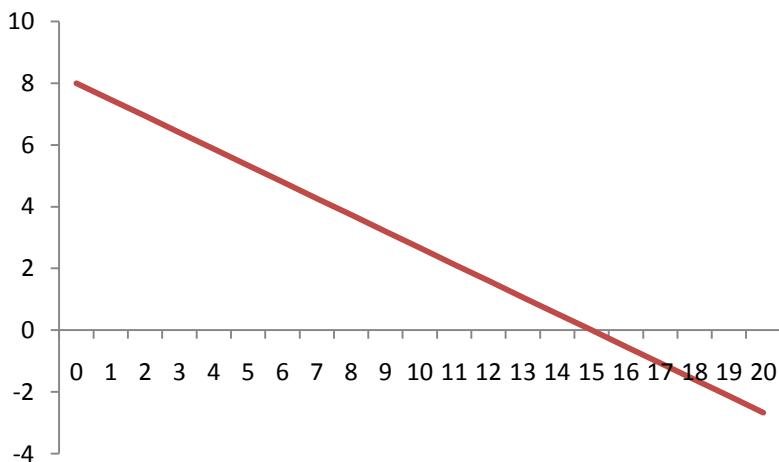


Figura 3 :
Andamento del tasso istantaneo di crescita di una popolazione in funzione della numerosità della popolazione stessa. Nel caso specifico si è scelto $r = 8$ e $N = 15$.

Sotto tale ipotesi, la crescita della popolazione è descritta dalla seguente equazione differenziale

$$\dot{n}(t) = rn(t) \left(1 - \frac{n(t)}{N}\right)$$

I parametri r e N sono positivi e possono essere interpretati rispettivamente come il massimo tasso di crescita della popolazione e la massima numerosità sostenibile della popolazione. Infatti, quando la popolazione è poco numerosa, il termine $n^2(t)/N$ è trascurabile rispetto al termine $n(t)$ e l'equazione che descrive la crescita si riduce a quella corrispondente ad una crescita esponenziale. Inoltre, come si vede dalla Figura 3, quando $n = N$ il tasso di crescita è nullo e per $n > N$ è addirittura negativo.

Si noti che non è restrittivo assumere $N = 1$. Questo corrisponde infatti ad un cambio di scala, e più precisamente nella scelta del valore N come unità di misura della popolazione. Posto $x(t) = n(t)/N$ l'equazione che descrive la crescita della popolazione diventa infatti

$$\dot{x}(t) = rx(t)(1 - x(t))$$

Tale equazione prende il nome di equazione logistica. Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine, in forma normale (poiché è esplicitata rispetto a $\dot{x}(t)$) e non lineare. Infatti, il secondo membro dell'equazione non è una funzione lineare di $x(t)$. Ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} rx(1 - x) = 0$$

si possono calcolare gli stati di equilibrio del sistema. Si ottiene che esistono due stati di equilibrio, o soluzioni costanti: $x(t) \equiv x'_{eq} = 0$ e $x(t) \equiv x''_{eq} = 1$ per ogni $t \geq 0$. Per $0 < x < 1$ risulta $f(x) > 0$ mentre per $x > 1$ si ha $f(x) < 0$. Lo stato $x'_{eq} = 0$ è quindi uno stato di equilibrio instabile mentre lo stato $x''_{eq} = 1$ è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile. Il fatto che esistano due stati di equilibrio già mostra una chiara differenza di comportamento rispetto ai sistemi lineari per i quali gli stati di equilibrio formano sempre un sottospazio lineare dello spazio di stato. Una seconda differenza risiede nel fatto che i due equilibri siano di natura differente. Infatti, nei sistemi lineari, tutti gli stati di equilibrio sono della stessa tipo.

La soluzione in forma esplicita dell'equazione logistica può essere calcolata integrando separatamente le variabili. In particolare si ha

$$\frac{dx(t)}{x(t)(1 - x(t))} = rdt$$

e quindi

$$\frac{dx(t)}{x(t)} + \frac{dx(t)}{1 - x(t)} = rdt$$

Integrando entrambi i membri, ricordando che $x > 0$, si ottiene

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x} + \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{1 - x} = \ln x(t) - \ln x(0) - \ln|1 - x(t)| + \ln|1 - x(0)| = \int_0^t rdt = rt$$

da cui

$$\ln \frac{x(t)}{|1-x(t)|} - \ln \frac{x(0)}{|1-x(0)|} = rt$$

Quindi

$$\frac{x(t)}{1-x(t)} = \frac{x(0)}{1-x(0)} e^{rt}$$

e, dopo qualche passaggio algebrico,

$$x(t) = \frac{x(0)e^{rt}}{1+x(0)(e^{rt}-1)}$$

Per quanto riguarda la popolazione $n(t)$ si ha

$$n(t) = \frac{Nn(0)e^{rt}}{N+n(0)(e^{rt}-1)}$$

Alcune soluzioni dell'equazione logistica sono disegnate in Figura 4 per diversi valori delle condizioni iniziali mentre la Figura 5 mostra come vari l'andamento della popolazione al variare del parametro r .

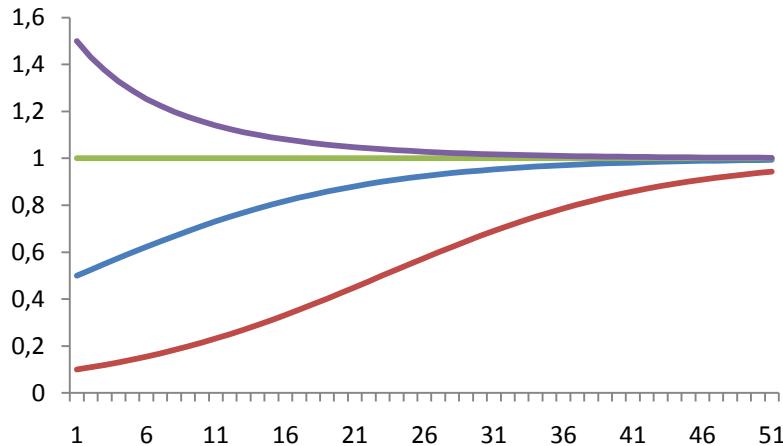


Figura 4 :
Andamento della numerosità della popolazione con crescita logistica a partire da diverse condizioni iniziali.

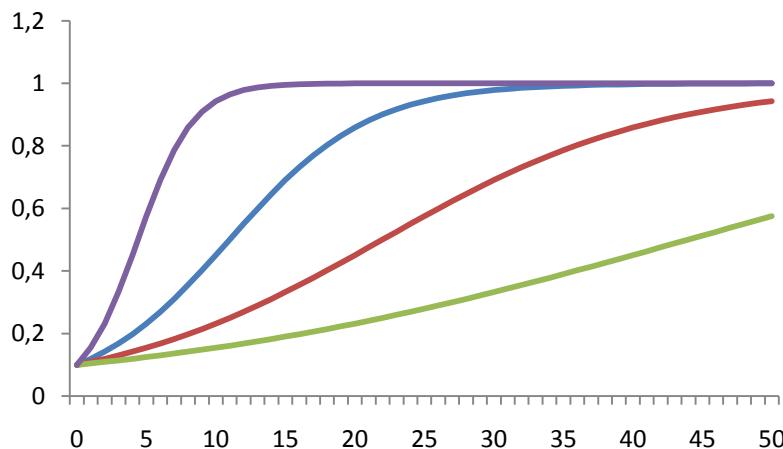


Figura 5 :
Andamento della numerosità della popolazione per diversi valori di r .

Il modello di crescita logistica può essere anche usato per modellare l'andamento della produzione di un determinato bene di consumo, come la televisione, il computer, l'automobile. In questo caso,

la diminuzione della produzione sul lungo periodo è dovuta fondamentalmente alla saturazione della domanda del bene. Questo risulta evidente dalla Figura 6 in cui sono riportate le percentuali di diffusione di alcuni beni in funzione del tempo (misurato in anni) trascorso dalla introduzione del bene stesso sul mercato.

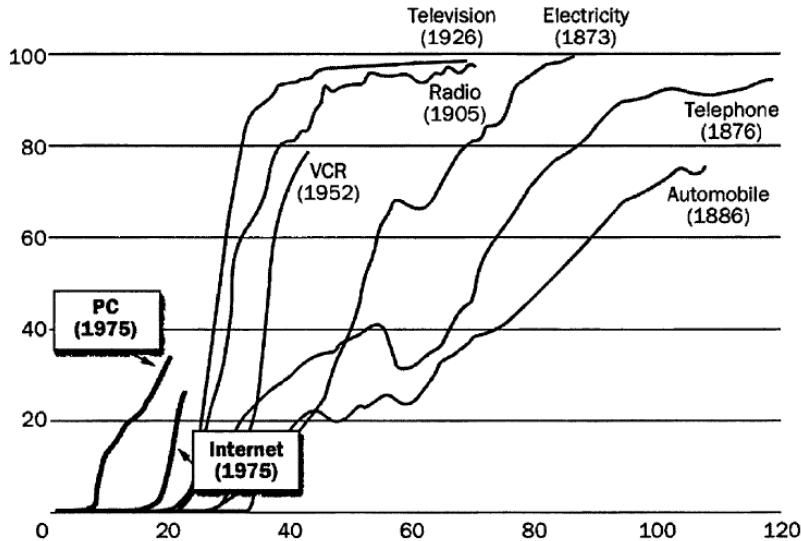


Figura 6 :
Andamento delle percentuali di diffusione di alcuni beni o servizi in funzione del tempo trascorso dalla loro introduzione sull mercato.

STUDIO DI UN CASO: LA POPOLAZIONE AMERICANA NEL XIX SECOLO

Come determinare il tipo di crescita

Quando siano disponibili i dati relativi alla numerosità di una popolazione in diversi anni, è possibile determinare quale tipo di crescita sia il più appropriato. Si considerino ad esempio i dati relativi ai censimenti della popolazione degli Stati Uniti d'America effettuati ogni dieci anni dal 1800 al 1910, riportati nella Tabella 1.

Anno	Popolazione (milioni)
1800	5,308
1810	7,24
1820	9,638
1830	12,866
1840	17,069
1850	23,192
1860	31,443
1870	38,558
1880	50,156
1890	62,948
1900	75,995
1910	91,972

Tabella 1 :
Popolazione degli Stati Uniti d'America dal 1800 al 1910.

Per verificare se i dati possano corrispondere ad una crescita Malthusiana, cioè del tipo

$$n(t) = n(0)e^{rt}$$

è sufficiente riportare su di un grafico i valori di $y = \ln(n(t))$ in funzione di $x = t$. Infatti si ha

$$y = \ln(n(t)) = \ln(n(0)) + rt = \ln(n(0)) + rx$$

per cui i dati dovrebbero disporsi, approssimativamente, su di una retta con pendenza pari ad r . In Figura 7 vengono quindi riportati i valori del logaritmo naturale dei dati in funzione degli anni.

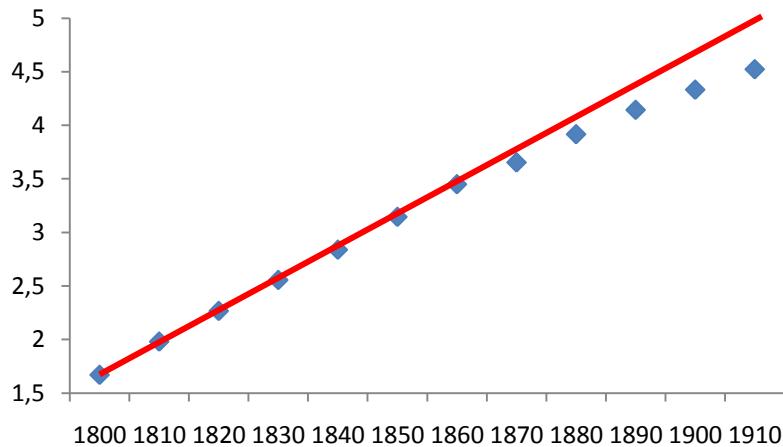


Figura 7:
Andamento di $y = \ln(n(t))$ in funzione del tempo $x = t$ relativamente ai dati riportati nella Tabella 1.

Come si vede chiaramente i dati non sono compatibili con una crescita esponenziale. Infatti, solo i primi dati possono considerarsi allineati poiché, a partire dal 1870, il tasso di crescita inizia a diminuire. Tale fatto suggerisce la possibilità che la crescita sia di tipo logistico. Per verificare tale ipotesi si consideri una crescita logistica

$$n(t) = \frac{Nn(0)e^{rt}}{N + n(0)(e^{rt} - 1)}$$

e si riportino su di un grafico i valori di $y = 1/n(t + T)$ in funzione dei valori di $x = 1/n(t)$, dove $T = 10$ è l'intervallo di tempo costante che intercorre tra due rilevazioni dei dati. In questo caso si ha

$$y = \frac{1}{n(t + T)} = \frac{N + n(0)(e^{r(t+T)} - 1)}{Nn(0)e^{r(t+T)}} = \frac{1}{e^{rT}} \cdot \frac{1}{n(t)} + \frac{e^{rT} - 1}{Ne^{rT}} = \frac{1}{e^{rT}} \cdot x + \frac{e^{rT} - 1}{Ne^{rT}}$$

per cui i valori dovrebbero disporsi, approssimativamente, su di una retta con pendenza pari a e^{-rT} . In Figura 8 vengono quindi riportati i valori di $1/n(t + T)$ in funzione dei valori di $1/n(t)$.

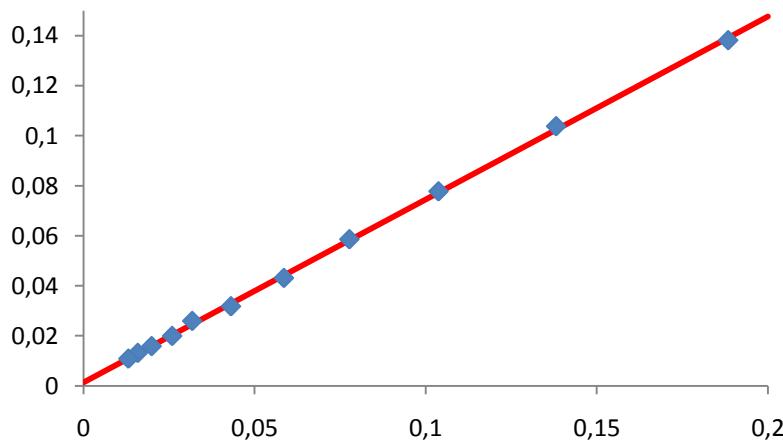


Figura 8:
Andamento di $y = 1/n(t + T)$ in funzione di $x = 1/n(t)$ relativamente ai dati riportati nella Tabella 1.

Come si vede chiaramente i dati sono compatibili con una crescita logistica ed è quindi possibile stimare i corrispondenti valori di r e di N . Utilizzando il metodo dei minimi quadrati con distanza perpendicolare si ottiene

$$y = mx + q = 0,73147 \cdot x + 0,001351$$

da cui si ricava

$$r = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{1}{m} \right) = 0,03127 \quad N = \frac{1 - m}{q} = 198,8 \text{ milioni}$$

In Figura 9 vengono riportati i dati e la crescita logistica identificata.

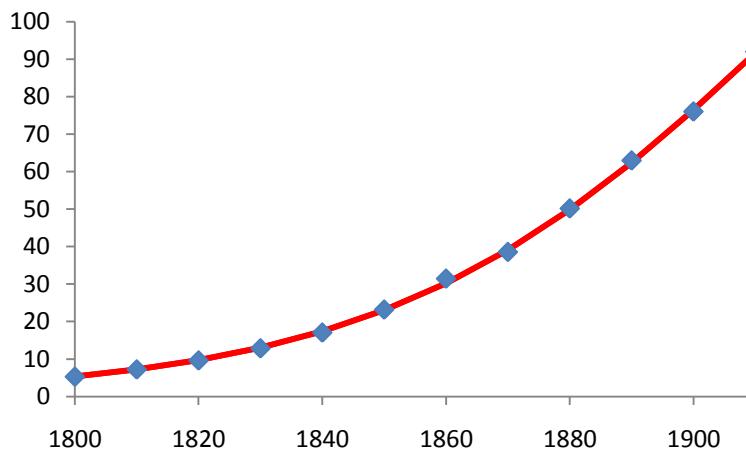


Figura 9 :
Andamento della popolazione degli
Stati Uniti d'America dal 1800 al 1910
e corrispondente crescita logistica.

STUDIO DI UN CASO: GLI ESPERIMENTI DI GAUSE

Come determinare i parametri del modello

Nel suo libro del 1934 "The struggle for existence", il biologo Gause (Figura 10) descrive una serie di esperimenti molto interessanti svolti su diverse popolazioni di due differenti tipi di protozoi, il *Paramecium aurelia* ed il *Paramecium caudatum* (Figura 11).



Figura 10 :
Georgii Frantsevich Gause (Mosca, December 27 dicembre 1910 – 4 maggio 1986),
microbiologo russo, nel suo libro "The struggle for existence" (La lotta per la sopravvivenza), ha
proposto il principio d'esclusione competitiva, chiamato anche in seguito principio di
Gause. Tale principio afferma che se due specie coesistono in un medesimo ambiente ciò
avviene in ragione del fatto che esse presentano nicchie ecologiche separate. Qualora, però,
le due specie presentino nicchie sovrapposte, allora una delle due specie prenderà il
sopravvento sull'altra fino ad eliminarla.

La crescita di queste popolazioni è stata osservata quando ogni specie viveva da sola in un volume costante di nutriente. Questo consisteva in 5 cc di soluzione fisiologica nella quale veniva immessa giornalmente una quantità fissa di coltura di *Bacillus pyocyanus* che serviva come cibo per i protozoi. Poiché i batteri non si riproducevano una volta immessi nella soluzione fisiologica, le riserve di cibo

giornaliere erano costanti. Ogni serie di esperimenti è stata replicata tre o quattro volte e le colture sono state tenute a temperatura fissa di 26° C. Ogni ventiquattro ore un campione di 0,5 cc di soluzione è stato prelevato in modo da poter contare i protozoi in esso presenti. La restante soluzione è stata quindi centrifugata e i protozoi rimasti sono stati reintrodotti in un volume di 5cc di soluzione con una nuova coltura fresca di batteri.

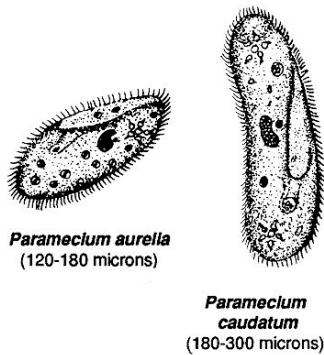


Figura 11 :

I parameci vengono considerati, nella classificazione tradizionale, protozoi appartenenti alla classe dei ciliati di cui sono i rappresentanti più tipici. Il paramecio si caratterizza per la sua forma ovale, la cui superficie è ricoperta da ciglia che permettono lo spostamento. Date le sue dimensioni, per poterlo osservare è necessario l'utilizzo di un microscopio. I parameci vivono in acqua dolce stagnante e quando si muovono seguono una traiettoria dall'andamento a spirale, ruotando rispetto all'asse maggiore. Se incontrano un ostacolo, mostrano la cosiddetta "reazione di esitamento", indietreggiando in diagonale e ripartendo in una nuova direzione. I batteri costituiscono la principale fonte di nutrimento per i parameci.

Questi esperimenti sono adatti per verificare una crescita logistica delle popolazioni di protozoi. Infatti, le popolazioni vivono in un ambiente di dimensioni fisse con una quantità di cibo costante ed in condizioni ambientali costanti nel tempo. Inoltre, le specie considerate sono molto semplici e si riproducono quasi esclusivamente per scissione. Infine, il tasso di riproduzione non dipende dall'età per cui la struttura d'età della popolazione può essere trascurata. I dati relativi agli esperimenti di Gause, così come riportati nell'appendice del suo libro (Tavola 3, pagine 144-145) sono riportati nella Tabella 2. Si noti che ogni valore della tabella deve essere moltiplicato per 10 per ottenere il numero totale $d(k)$ di parameci presenti nei 5 cc di soluzione. Ogni popolazione è inizialmente composta da 20 individui che si sono riprodotti fino ad arrivare, in alcune colture, ad un valore di 5000-6000 individui.

Se la crescita della popolazione è descritta da una equazione logistica, allora il numero di parameci dovrebbe crescere secondo la seguente legge

$$n(t) = \frac{Nn(0)e^{rt}}{N + n(0)(e^{rt} - 1)}$$

Bisogna però notare che la popolazione non vive in un ambiente isolato in quanto il procedimento di misura del numero dei parameci ha un effetto sulla numerosità della popolazione. Infatti, ogni giorno, prima che la sostanza nutriente venga rinnovata, 0,5 cc (1/10 del volume totale) vengono rimossi per poter contare gli individui presenti nel campione. L'operazione di misura ha quindi lo stesso effetto di un predatore che ogni 24 ore distrugga un decimo della popolazione di parameci. Se indichiamo con $n(k)$ il numero di individui presenti nella soluzione al termine del k -esimo giorno, prima del prelievo, allora il numero di individui $n'(k)$ che restano nella soluzione dopo il prelievo è pari a

$$n'(k) = 0,9 n(k)$$

AGE IN DAYS	P. Aurelia			P. Caudatum				Mean	
	Number of individuals per 0.5 cc in the culture No.:			Number of individuals per 0.5 cc in the culture No.:					
	1	2	3	1	2	3	4		
0	2	2	2	2	2	2	2	2	
1	-	-	-	-	-	-	-	-	
2	17	15	11	14	13	8	13	10	
3	29	36	37	34	19	9	6	10	
4	39	62	67	56	16	14	7	11	
5	63	84	134	94	31	16	16	21	
6	185	156	226	189	97	57	40	57	
7	258	234	306	266	140	94	98	104	
8	267	348	376	330	180	142	124	137	
9	392	370	485	416	204	175	145	166	
10	510	480	530	507	264	150	175	195	
11	570	520	650	580	220	200	280	218	
12	650	575	605	610	180	172	240	199	
13	560	400	580	513	175	189	230	201	
14	575	545	660	593		234	171	182	
15	650	560	460	557		192	219	192	
16	550	480	650	560		168	216	179	
17	480	510	575	522		240	195	190	
18	520	650	525	565		183	216	206	
19	500	500	550	517		219	189	209	
20				500				196	
21				585				195	
22				500				234	
23				495				210	
24				525				210	
25				510				180	

Tabella 2:
Risultati degli esperimenti di Gause sulle popolazioni di parameci. Si noti che a partire dal ventesimo giorno vengono riportati solo i valori medi dei conteggi effettuati su diversi esperimenti.

Assumendo quindi che la popolazione seguia una crescita logistica fino al prelievo successivo, si ottiene che la numerosità della popolazione in un giorno diventa pari a

$$n(k+1) = \frac{Nn'(k)e^r}{N + n'(k)(e^r - 1)}$$

dove $n(0) = n'(0)$ è pari al numero di parameci inizialmente presenti nella coltura. Noti i valori dei parametri r e N si ha che la successione del numero di individui presenti nella soluzione al momento dei prelievi, a partire da $n(0) = 20$, dovrebbe essere la seguente

$$\begin{aligned} 0 & \qquad \qquad n(0) = 20 \\ 1 & \qquad \qquad - \\ 2 & \qquad \qquad n(2) = \frac{Nn(0)e^{2r}}{N + n(0)(e^{2r} - 1)} \\ 3 & \qquad \qquad n(3) = \frac{0,9 N n(2)e^r}{N + 0,9 n(2)(e^r - 1)} \\ 4 & \qquad \qquad n(4) = \frac{0,9 N n(3)e^r}{N + 0,9 n(3)(e^r - 1)} \end{aligned}$$

$$25 \quad n(25) = \frac{\dots}{N + 0,9 n(24)(e^r - 1)}$$

Si noti che, nel costruire la successione, si è tenuto conto del fatto che alla fine del primo giorno non venga prelevato alcun campione. E' quindi possibile confrontare i valori di tale sequenza $n(k)$, per diversi valori dei parametri r e N , con le medie $\bar{d}(k)$ dei valori $d_i(k)$ misurati da Gause (dove i indica l' i -esimo esperimento) e scegliere il valore dei parametri che minimizza la somma dei quadrati degli errori (metodo dei minimi quadrati con distanza verticale), cioè

$$\min_{r,N} \sum_{k=2}^{25} (n(k) - \bar{d}(k))^2$$

Questo può essere facilmente fatto mediante un calcolatore; si veda ad esempio in Figura 12 il programma Matlab® per il calcolo dei parametri ottimi nel caso del Paramecium aurelia. In tale caso si ottiene $r = 0,8687$ e $N = 5910$ mentre, nel caso del Paramecium caudatum, si ha $r = 0,7395$ e $N = 2258$. Nelle Figure 13 e 14 vengono riportati il numero di parameci misurati da Gause insieme con l'andamento del numero di parameci corrispondente ad una crescita logistica con i parametri precedentemente stimati. Si noti come, nel grafico, si sia anche considerato il fenomeno del prelievo che determina un andamento a “dente di sega” della crescita.

```

d = [20 140 340 560 940 1890 2660 3300 4160 5070 5800 6100 5130...
...5930 5570 5600 5220 5650 5170 5000 5850 5000 4950 5250 5100];
min_err = 10^10;
n(1) = 20;
for r = 0.8:0.0001:0.9
    for N = 5500:1:6000
        n(2) = [N*20*exp(2*r) / (N+20*(exp(2*r)-1))];
        err = (n(2)-d(2))^2;
        for k = 3:25
            n(k) = (0.9*N*n(k-1)*exp(r)) / (N+0.9*n(k-1)*(exp(r)-1));
            err = err + (n(k)-d(k))^2;
        end
        if err < min_err
            r_opt = r;
            N_opt = N;
            min_err = err;
        end
    end
end

```

Figura 12 : Programma Matlab® per la stima dei parametri r e N nel caso del Paramecium aurelia

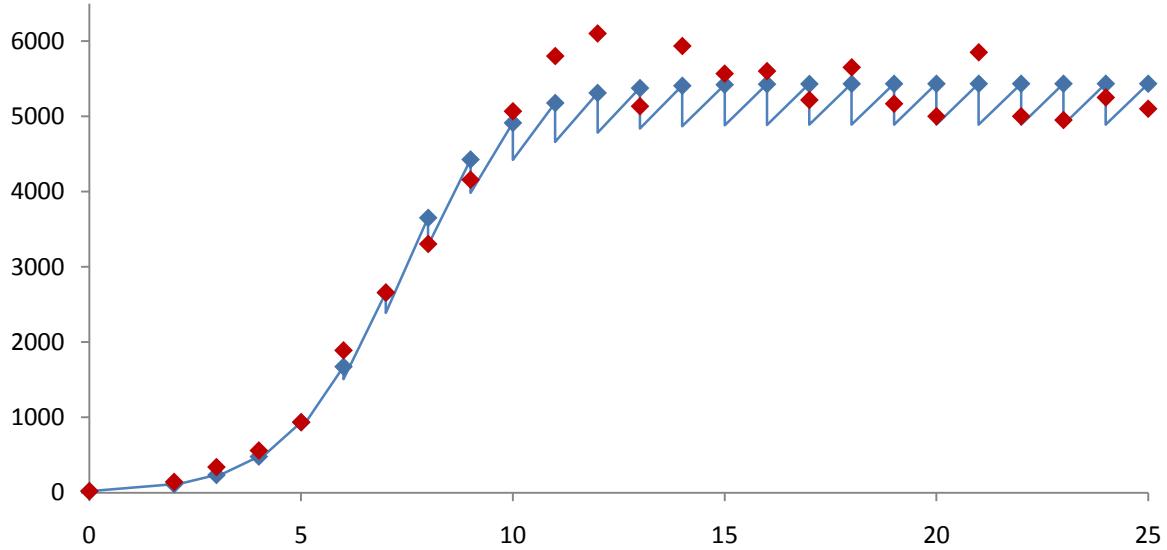


Figura 13 : Dati misurati (♦) ed andamento stimato (—) nel caso del Paramecium aurelia

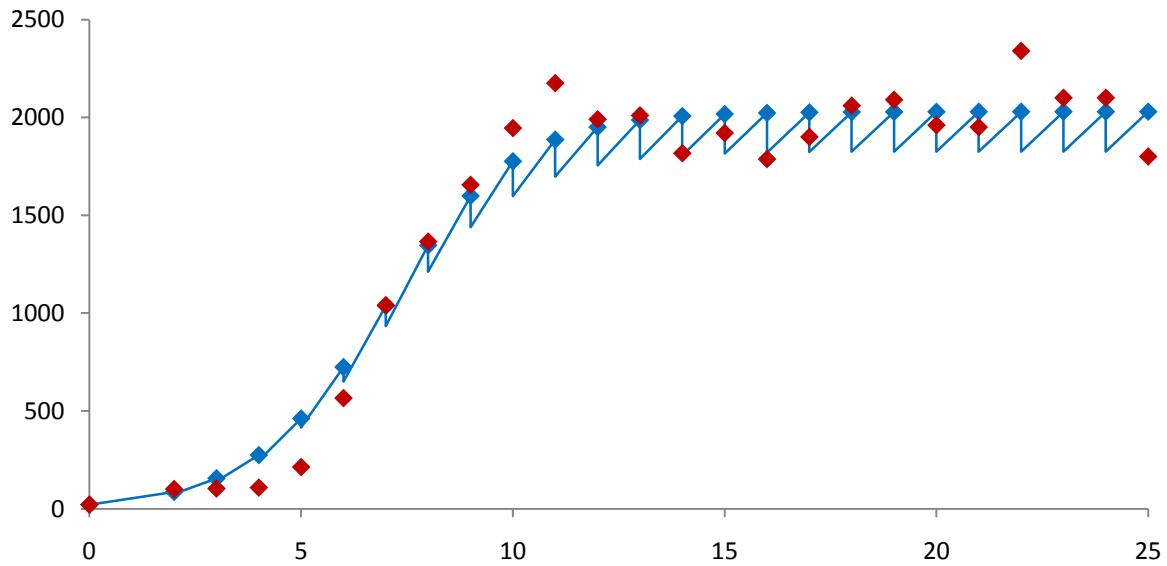


Figura 14 : Dati misurati (♦) ed andamento stimato (—) nel caso del Paramecium caudatum

La bontà della stima può essere verificata confrontando la deviazione standard delle misure per i diversi esperimenti, calcolabile dal secondo al diciannovesimo giorno, con il valore assoluto dell'errore tra l'andamento proposto ed il valor medio delle misure. Per esempio, nel caso del Paramecium aurelia, si ha che il valor medio della deviazione standard delle misure è

$$\bar{\sigma}_d = \frac{1}{18} \sum_{k=2}^{19} \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (d_i(k) - \bar{d}(k))^2} = 393$$

mentre il valor medio del valore assoluto dell'errore è

$$\bar{e} = \frac{1}{18} \sum_{i=2}^{19} |n(k) - \bar{d}(k)| = 260$$

Allo stesso modo, per il *Paramecium caudatum*, si ha che $\bar{\sigma}_d = 229$ e $\bar{e} = 113$. In altre parole, assumendo una crescita logistica, l'errore che si compie rispetto ai dati misurati è minore, in media, della variabilità intrinseca dei dati stessi.

L'EQUAZIONE LOGISTICA NEL TEMPO DISCRETO

Sui comportamenti "complessi" dei sistemi dinamici non lineari

Nel tempo discreto, come detto precedentemente, la crescita esponenziale di una popolazione corrisponde ad un suo sviluppo in progressione geometrica crescente di ragione costante $R > 0$, cioè

$$n(k+1) = (1+R)n(k)$$

in cui $n(k)$ è la numerosità della popolazione dopo k intervalli di tempo T ed R rappresenta il tasso di crescita della popolazione in un intervallo di tempo T . Anche in questo caso, la dipendenza del tasso di crescita della popolazione dalla numerosità della popolazione stessa può essere modellata mediante una funzione lineare del tipo

$$R(n) \stackrel{\text{def}}{=} R \left(1 - \frac{n}{N}\right) \quad R, N > 0$$

L'equazione che modella la crescita della popolazione diventa allora

$$n(k+1) = \left[1 + R \left(1 - \frac{n(k)}{N}\right)\right] n(k) = (1+R)n(k) - \frac{R}{N} n^2(k)$$

Effettuando un cambio di scala $x(k) = n(k)/N$ si ha

$$x(k+1) = (1+R)x(k) - Rx^2(k)$$

Tale equazione è un'equazione alle differenze del primo ordine non lineare e prende il nome di equazione logistica. Come prima cosa si noti che il sistema ha due soli stati di equilibrio (o punti fissi della mappa) che si possono calcolare ponendo

$$x = (1+R)x - Rx^2 \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$$

In Figura 15 è disegnato l'andamento della funzione $f(x)$, detta mappa logistica. Si ottiene che gli stati di equilibrio sono: $x'_{eq} = 0$ e $x''_{eq} = 1$. Inoltre, se $x(0) < 0$ o $x(0) > \frac{1+R}{R}$, allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = -\infty$$

Infatti, se $x(0) < 0$, si ha

$$x(1) = f(x(0)) = (1+R)x(0) - Rx^2(0) < x(0)$$

da cui segue che la sequenza $x(k)$ è tale per cui

$$x(k) = f(x(k-1)) < x(k-1) = f(x(k-2)) < x(k-2) < \dots x(1) = f(x(0)) < x(0) < 0$$

è decrescente.

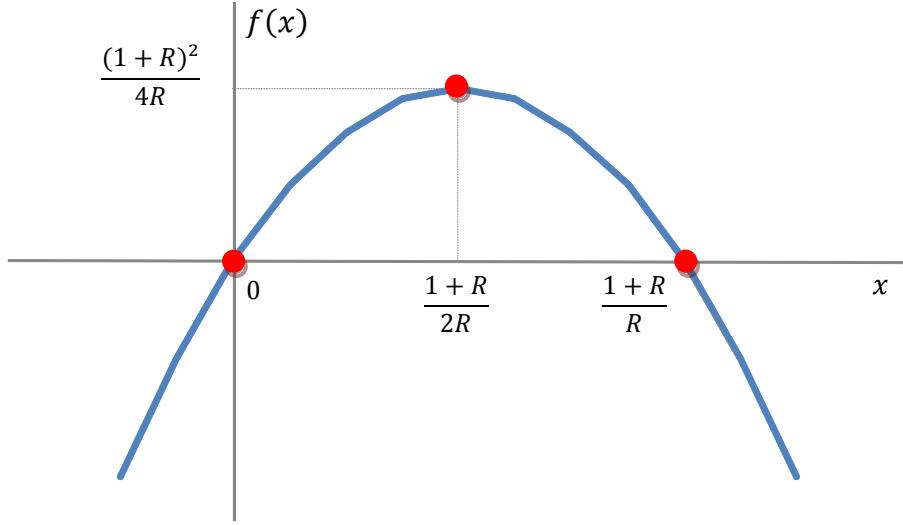


Figura 15 :
Andamento della mappa logistica.

Tale sequenza non può fra l'altro convergere ad alcun valore in quanto non esiste uno stato di equilibrio negativo. Se invece $x(0) > \frac{1+R}{R}$, allora

$$x(1) = f(x(0)) < 0$$

da cui, applicando il ragionamento precedente, segue la tesi.

Si assume quindi

$$0 < x(0) < \frac{1+R}{R}$$

E' facile dimostrare che, sotto tale ipotesi, se $0 < R < 3$, allora

$$0 < x(k) < \frac{1+R}{R} \quad \forall k \geq 0$$

Infatti il valore massimo di $f(x(k))$ per $0 < x(k) < \frac{1+R}{R}$ si ha in corrispondenza di $x(k) = \frac{1+R}{2R}$ ed è pari a

$$f\left(\frac{1+R}{2R}\right) = \frac{(1+R)^2}{4R}$$

E' quindi immediato verificare che tale valore è minore di $\frac{1+R}{R}$ solo se $R < 3$.

Esaminiamo quindi il comportamento del sistema al variare del valore del parametro $R \in (0, 3)$ per valori dello stato iniziale $x(0) \in (0, \frac{1+R}{R})$.

- $0 < R < 1$: Per tali valori di R lo stato di equilibrio $x'_{eq} = 0$ è instabile mentre lo stato di equilibrio $x''_{eq} = 1$ è asintoticamente stabile. Infatti si ha

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0} = 1 + R > 1, \quad 0 < \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=1} = 1 - R < 1$$

Inoltre, per qualsiasi valore ammissibile dello stato iniziale si ha che la sequenza $x(k)$ tende allo stato di equilibrio $x''_{eq} = 1$. Fra l'altro, se $0 < x(0) \leq \frac{1+R}{2R}$, come si vede dalla Figura 16, la sequenza tende monotonicamente a 1 a mentre, se $\frac{1+R}{2R} < x(0) < 1$ la sequenza tende ad 1 monotonicamente dopo la prima iterazione, come illustrato in Figura 17 (questo comportamento può essere mostrato facilmente per via grafica).

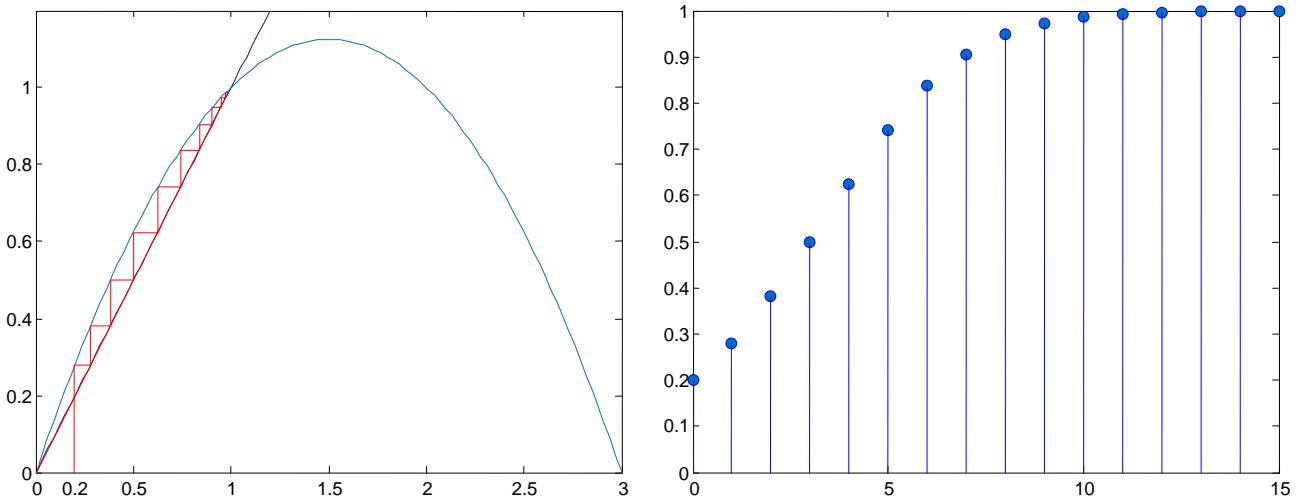


Figura 16 : Andamento monotono della sequenza $x(k)$ verso il punto di equilibrio $x = 1$ per $R = 0.5$ e $x(0) = 0.2$.

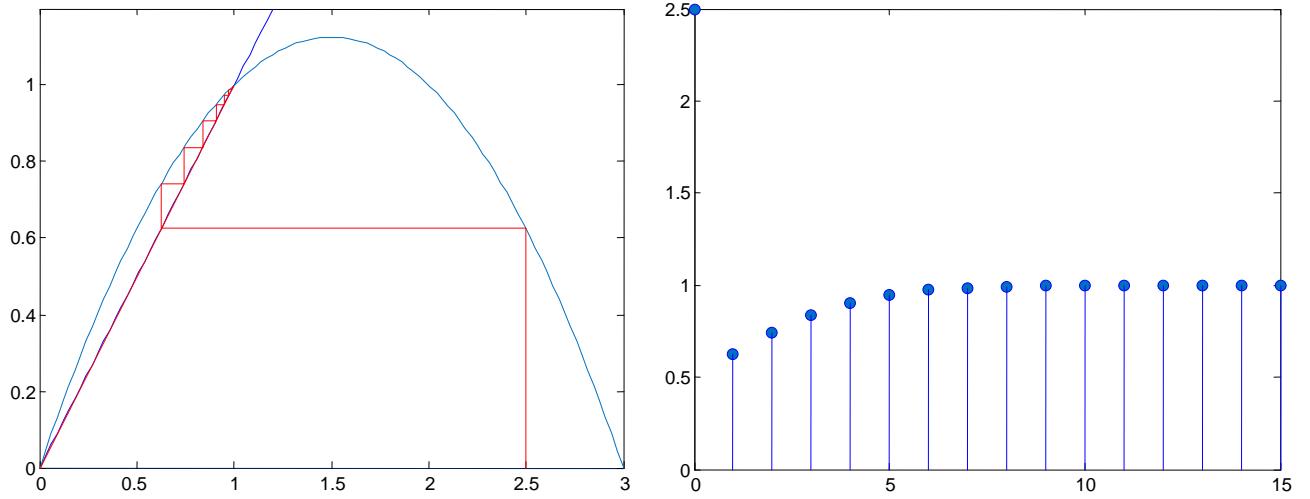


Figura 17 : Andamento monotono, dopo il primo passo, della sequenza $x(k)$ verso il punto di equilibrio $x = 1$ per $R = 0.5$ e $x(0) = 2.5$.

- $1 < R < 2$: Anche in questo caso tutte le sequenze $x(k)$ tendono allo stato di equilibrio $x''_{eq} = 1$ ma non più in modo monotono. Come esempio, si veda la Figura 18. Questo comportamento può essere dedotto dal sistema linearizzato che ha un autovalore negativo in modulo minore di uno. Si noti che la sequenza, al contrario di quanto avviene nel modello tempo continuo, tende al valore $x = 1$ assumendo valori maggiori di 1. Ciò è dovuto al fatto

che, nel tempo discreto, il fenomeno di “regolazione” della popolazione al valore massimo sostenibile avviene con un passo di ritardo.

- $2 < R < \sqrt{6}$: Per valori di $R > 2$ sia lo stato di equilibrio $x'_{eq} = 0$ che lo stato di equilibrio $x''_{eq} = 1$ sono instabili. La sequenza $x(k)$ non può quindi convergere a nessuno dei due stati. In questo caso, come mostrato nella Figura 19, la sequenza converge ad una orbita periodica di periodo (minimo) 2, ovverosia ad una sequenza che assume alternativamente i valori x_1 e x_2 per cui

$$f(x_1) = x_2 \quad \text{e} \quad f(x_2) = x_1$$

Tale orbita viene quindi detta asintoticamente stabile.

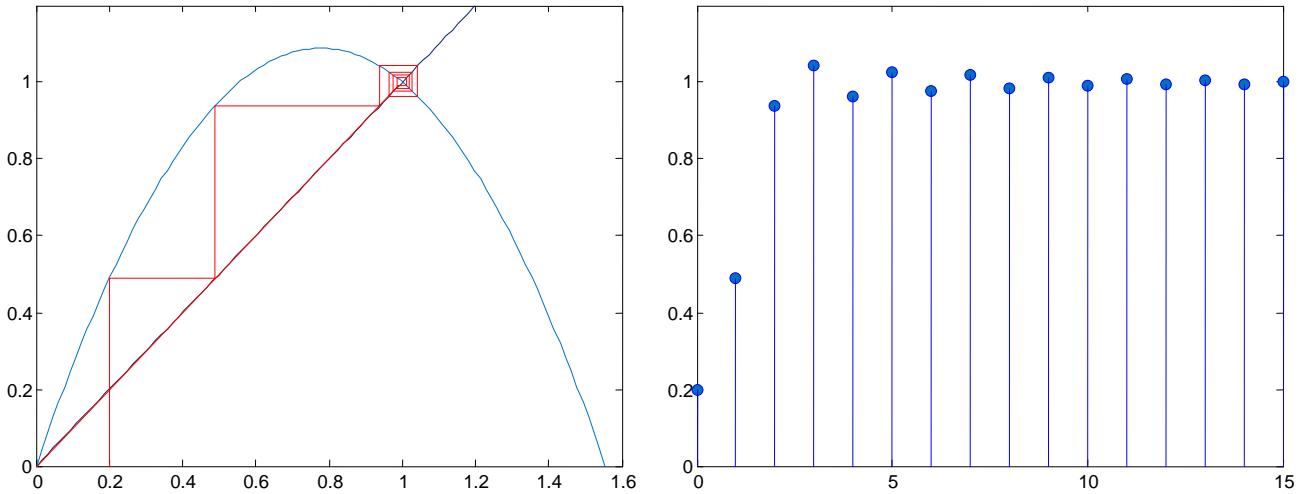


Figura 18 : Andamento non monotono della sequenza $x(k)$ verso il punto di equilibrio $x = 1$ per $R = 1.8$ e $x(0) = 0.2$.

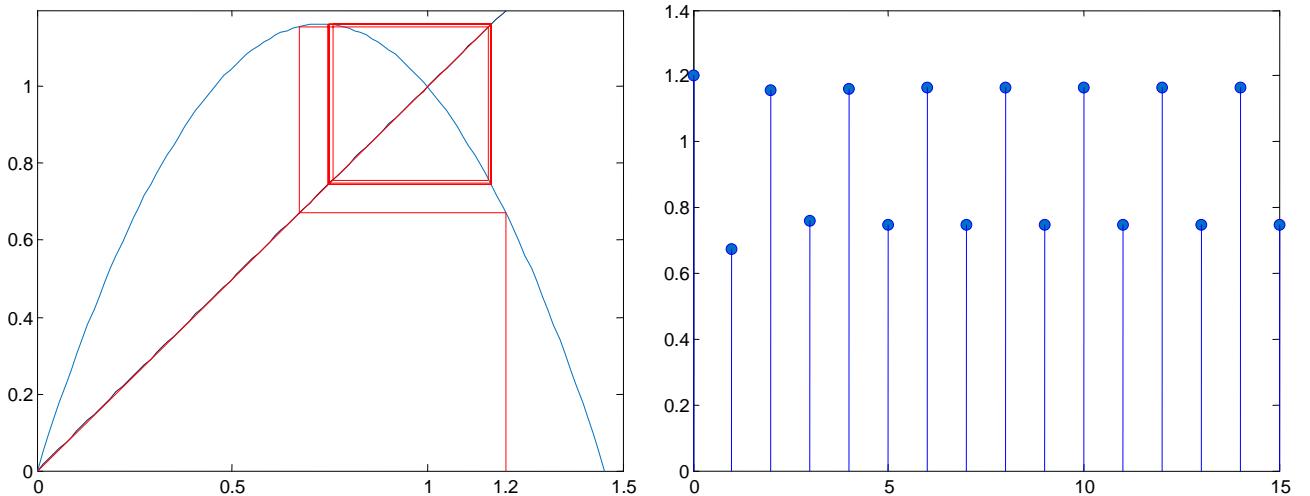


Figura 19 : Orbita periodica di periodo 2 della sequenza $x(k)$ per $R = 2.2$.

Si noti che se esiste tale orbita allora i due valori x_1 e x_2 devono essere due stati di equilibrio asintoticamente stabili per il sistema tempo discreto

$$x(k+1) = f(f(x(k))) \stackrel{\text{def}}{=} f^2(x(k))$$

I valori di x_1 e x_2 possono quindi essere calcolati trovando le radici dell'equazione

$$x - f^2(x) = R x(x-1)(R^2 x^2 - R(2+R)x + 2+R)$$

ed è possibile provare che tali stati sono stati di equilibrio asintoticamente stabili per $R < \sqrt{6}$. Tutte le sequenze $x(k)$, eccetto quelle che in un numero finito di passi assumono il valore 1, tenderanno quindi sul lungo periodo all'orbita periodica di periodo 2.

- $\sqrt{6} < R < 2,570$: Per valori di $R > \sqrt{6}$, non solo gli stati di equilibrio $x'_{eq} = 0$ e $x''_{eq} = 1$ sono instabili, ma lo diventa anche l'orbita periodica di periodo 2. La sequenza $x(k)$ non può quindi convergere a nessuno dei due stati di equilibrio e neanche alla suddetta orbita periodica. In questo caso, come mostrato in Figura 20, la sequenza converge ad una orbita periodica di periodo (minimo) 4, ovverosia ad una sequenza che assume alternativamente i valori x_1, x_2, x_3 , e x_4 per cui

$$f(x_1) = x_2, \quad f(x_2) = x_3, \quad f(x_3) = x_4, \quad f(x_4) = x_1$$

Questo corrisponde a dire che esistono quattro stati di equilibrio asintoticamente stabili per il sistema tempo discreto

$$x(k+1) = f^4(x(k))$$

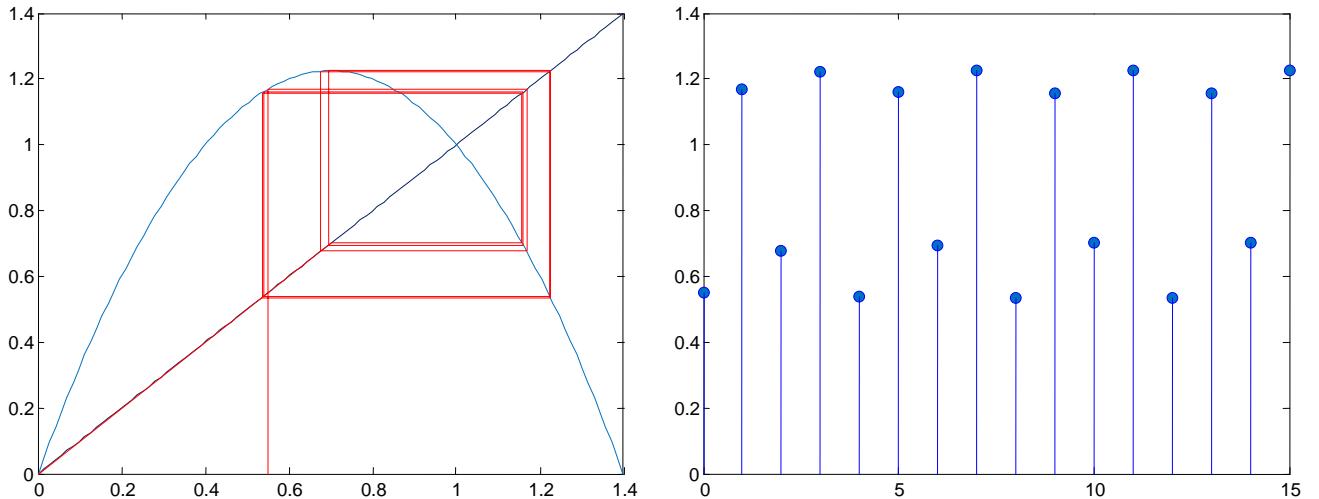


Figura 20 : Orbita periodica di periodo 4 della sequenza $x(k)$ per $R = 2.5$.

Al crescere del parametro R l'orbita periodica di periodo 4 diviene instabile e compare un'orbita periodica asintoticamente stabile di periodo 8. Più nel dettaglio, esiste una sequenza di valori $R_1 < R_2 < R_3 < \dots$ tali per cui quando il parametro R passa per il valore R_k l'orbita periodica asintoticamente stabile di periodo 2^{k-1} diviene instabile e compare un'orbita periodica asintoticamente stabile di periodo 2^k , cioè di periodo doppio della precedente. I primi valori di R_k sono

$$R_1 = 2, \quad R_2 = \sqrt{6}, \quad R_3 = 2,544, \quad R_4 = 2,564$$

Per $k \rightarrow \infty$ la sequenza R_k tende al valore 2,570 (approssimativamente). Inoltre, anche il rapporto delle distanze successive tra i valori R_k tende ad un valore costante, detto numero di Feigenbaum

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_k - R_{k-1}}{R_{k+1} - R_k} = 4,6692 \dots$$

- $R > 2,570$: Per questi valori del parametro la dinamica del sistema diviene molto complicata. Per alcuni valori di R la sequenza $x(k)$ assume una andamento caotico (vedi Figura 21). Per altri valori del parametro la sequenza tende invece ad un andamento periodico il cui periodo, come visto in precedenza, raddoppia al crescere del parametro. Vale la pena notare che, ad esempio, per $R = 2,839$ il sistema ammette una sola orbita periodica asintoticamente stabile e tale orbita è di periodo (minimo) 3 (vedi Figura 22). Al crescere del parametro R l'orbita diviene instabile e compare un'orbita periodica asintoticamente stabile di periodo 6. Anche in questo caso esiste una sequenza R_k di valori tali per cui, quando il parametro R passa per il valore R_k , l'orbita periodica asintoticamente stabile diviene instabile e compare un'orbita periodica asintoticamente stabile di periodo doppio della precedente. Inoltre, anche in questo caso, il rapporto delle distanze successive tra i valori R_k tende al numero di Feigenbaum.

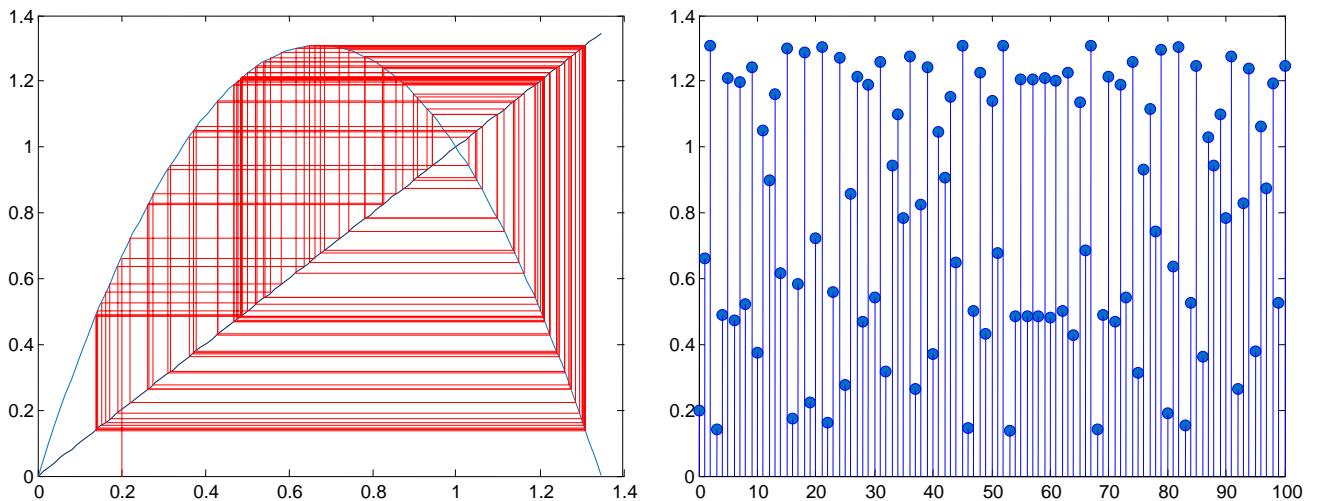


Figura 21 : Andamento caotico della sequenza $x(k)$ (sono riportati i primi cento valori) per $R = 2.891$.

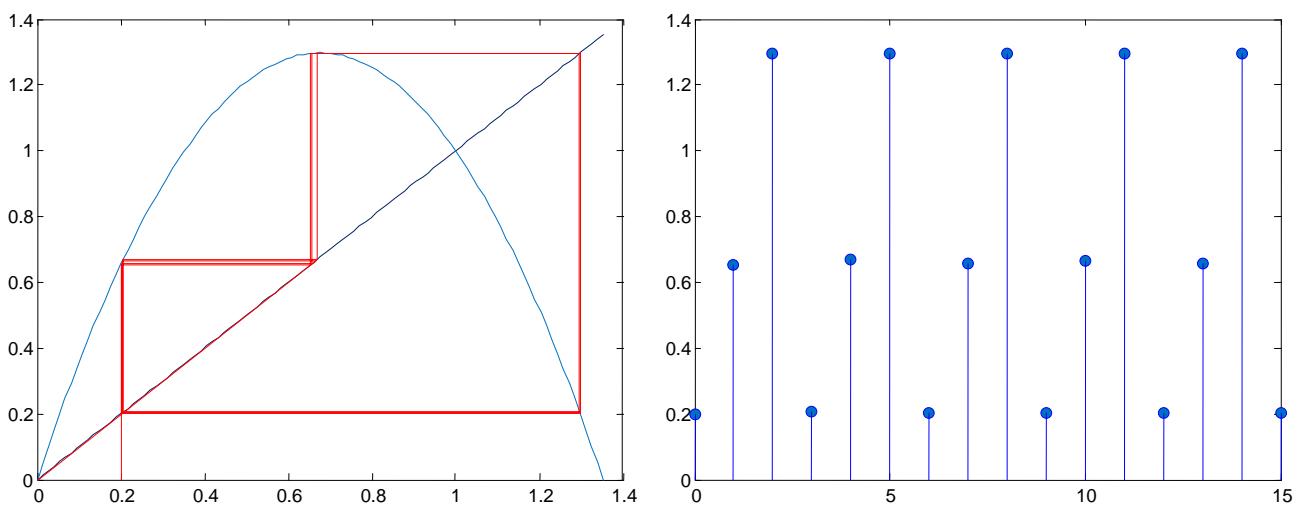


Figura 22 : Orbita periodica di periodo 3 della sequenza $x(k)$ per $R = 2.839$.

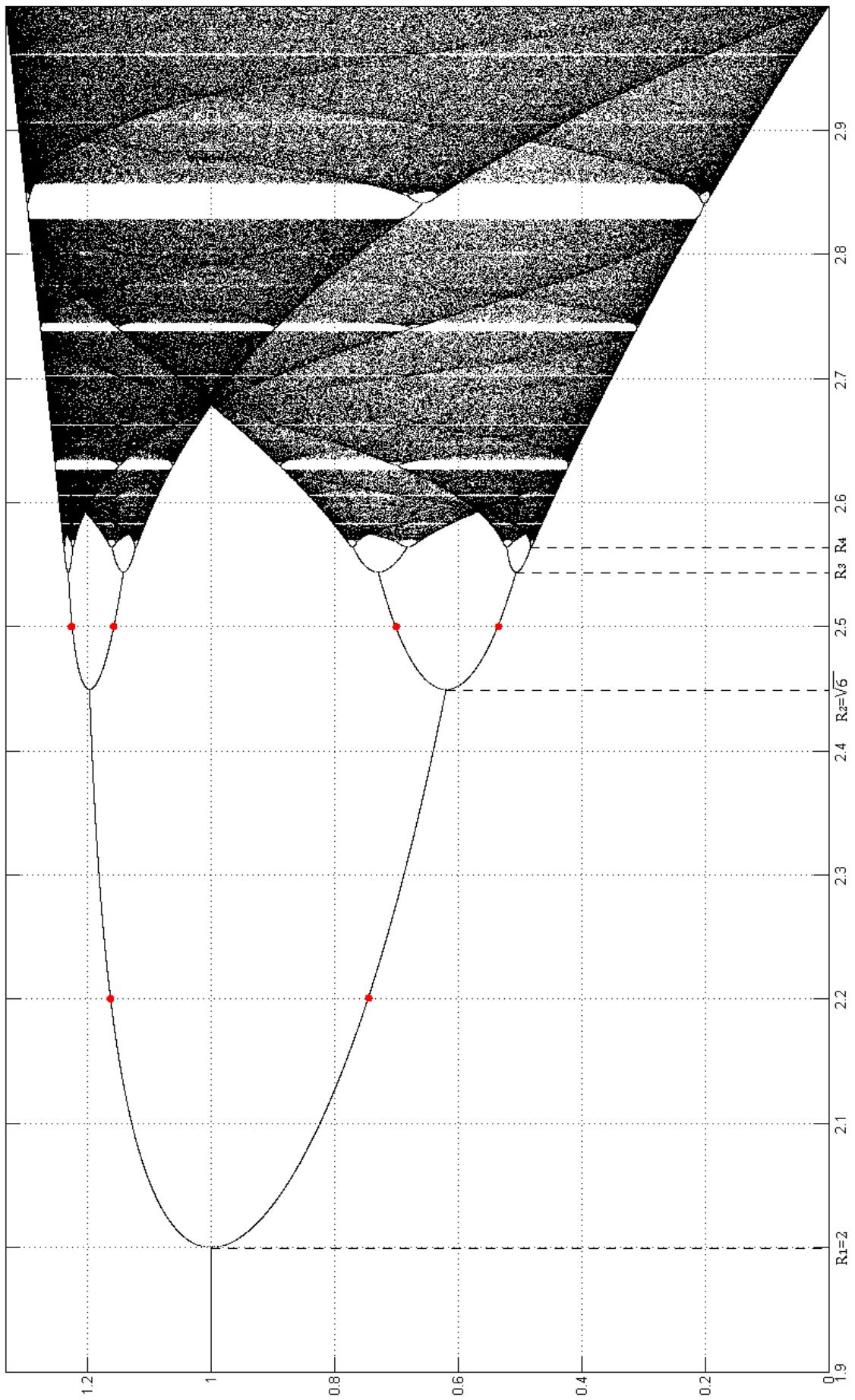


Figura 23: Diagramma delle biforcazioni per la mappa logistica.

La Figura 23 mostra i valori che assume la sequenza $x(k)$ sul lungo periodo al variare del parametro $R \in (1,9,3)$. Tale diagramma è detto *diagramma delle biforazioni* in quanto la “scomparsa” di un’orbita periodica asintoticamente stabile e la conseguente “comparsa” di un’orbita periodica di periodo doppio della precedente viene detta biforazione.

Il comportamento del sistema per $R = 2,839$ è, per quanto possibile, ancora più ricco di quello finora descritto, come mostrato dal Teorema di Sharkovskii che segue. Per illustrare tale teorema si consideri il seguente ordinamento dei numeri interi positivi, detto appunto ordinamento di Sharkovskii:

$$\begin{aligned} 3 &\triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \dots \\ &\triangleright 2^3 \cdot 3 \triangleright 2^3 \cdot 5 \triangleright 2^3 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1 \end{aligned}$$

Tale ordinamento prevede per primi tutti i numeri dispari eccetto 1, seguiti dagli stessi numeri moltiplicati per 2, seguiti a loro volta dagli stessi numeri moltiplicati per 4, e così via. Alla fine compaiono tutti i numeri pari in ordine inverso e per ultimo il numero 1. Tale lista, per quanto “strana” comprende tutti i numeri interi positivi. Il Teorema di Sharkovskii è il seguente:

Teorema. Si consideri il sistema tempo discreto

$$x(k+1) = f(x(k))$$

in cui la mappa $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua e si assuma che esista un’orbita periodica di periodo minimo m . Se $m \triangleright n$ nell’ordinamento di Sharkovskii, allora esiste anche un’orbita periodica di periodo minimo n .

Una conseguenza immediata del precedente teorema è che se esiste un’orbita periodica di periodo 3, allora esistono orbite periodiche di qualsiasi periodo. Quindi, per $R = 2,839$, il sistema descritto dall’equazione logistica ammette orbite periodiche di tutti i periodi! Tuttavia, a causa del fatto che solo l’orbita di periodo 3 è asintoticamente stabile, tali orbite non sono facilmente calcolabili.

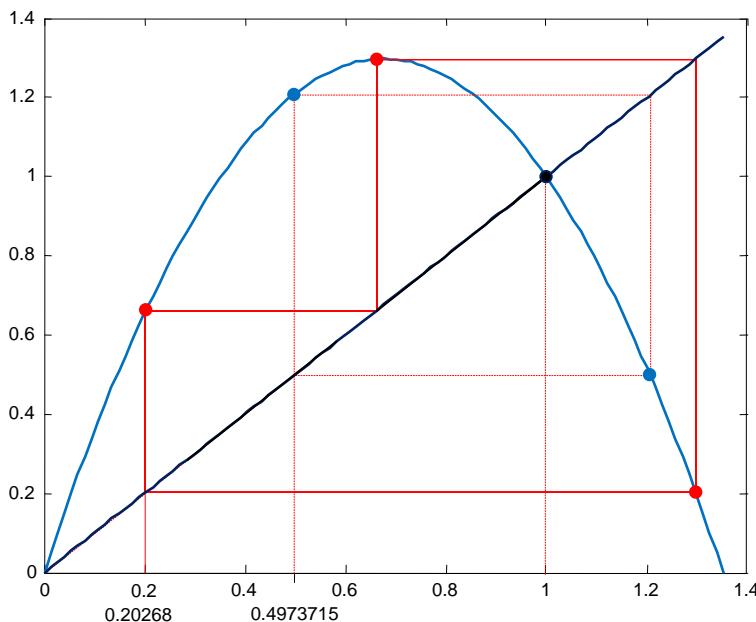


Figura 24 :
Orbite periodiche di periodo 1 (●), di periodo 2 (●) e di periodo 3 (●) per $R = 2839$.

In Figura 24 vengono mostrate le orbite periodiche di periodo 1 (punto di equilibrio $x = 1$), di periodo 2 ($x_1 \cong 0,49737151033026$ e $x_2 \cong 1,207101895798663$) e di periodo 3 per $R = 2,839$. Per verificare l'instabilità delle orbite di periodo 1 e 2 e mostrare l'asintotica stabilità dell'orbita periodica di periodo 3 si noti come, nella Figura 25, l'andamento della sequenza $x(k)$ a partire da condizioni iniziali molto vicine a quelle delle orbite periodiche di periodo 1 e 2 tenda comunque a convergere all'orbita periodica di periodo 3.

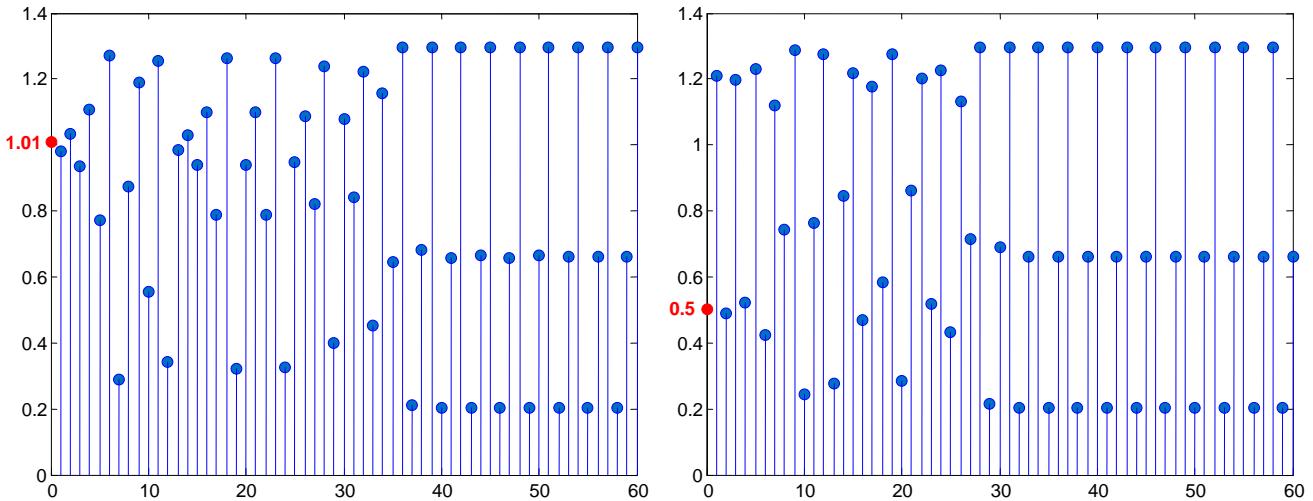


Figura 25 : Andamento della sequenza $x(k)$ per $R = 2839$ a partire da $x(0) = 1,01$ e $x(0) = 0,5$.

CAOS

Sulla dipendenza della traiettoria dalle condizioni iniziali

Si consideri la mappa logistica per $R = 3$. In questo caso $x(0) \in I = (0, 4/3)$ ed il massimo della parabola è pari a proprio a $4/3$. L'intervallo I può quindi essere suddiviso in due intervalli $I_0 = [0, 2/3]$ e $I_1 = [2/3, 4/3]$, entrambi mappati da $f(x)$ sull'intero intervallo $[0, 4/3]$, cioè tali per cui

$$x \in I_0 \Rightarrow f(x) \in I, \quad x \in I_1 \Rightarrow f(x) \in I$$

Allo stesso modo, come mostrato in Figura 26, l'intervallo I_0 può essere decomposto in due intervalli I_{00} e I_{01} che sono mappati da $f(x)$ rispettivamente negli intervalli I_0 e I_1 :

$$x \in I_{00} \Rightarrow f(x) \in I_0, \quad x \in I_{01} \Rightarrow f(x) \in I_1$$

Anche l'intervallo I_1 può essere decomposto in due intervalli I_{10} e I_{11} mappati da $f(x)$ rispettivamente negli intervalli I_0 e I_1 :

$$x \in I_{10} \Rightarrow f(x) \in I_0, \quad x \in I_{11} \Rightarrow f(x) \in I_1$$

Questa procedura di decomposizione può essere applicata nuovamente agli intervalli I_{00} , I_{01} , I_{10} e I_{11} ottenendo otto intervalli I_{000} , I_{001} , I_{010} , I_{011} , I_{100} , I_{101} , I_{110} , I_{111} tali per cui:

$$x \in I_{000} \Rightarrow f(x) \in I_{00}, \quad x \in I_{001} \Rightarrow f(x) \in I_{01}, \quad x \in I_{011} \Rightarrow f(x) \in I_{11}, \quad x \in I_{010} \Rightarrow f(x) \in I_{10}$$

$$x \in I_{110} \Rightarrow f(x) \in I_{10}, \quad x \in I_{111} \Rightarrow f(x) \in I_{11}, \quad x \in I_{101} \Rightarrow f(x) \in I_{01}, \quad x \in I_{100} \Rightarrow f(x) \in I_{00}$$

La procedura può essere quindi applicata iterativamente e la notazione scelta per gli intervalli è tale per cui se ad esempio $x \in I_{0100}$, allora

$$x \in I_0, \quad f(x) \in I_1, \quad f^2(x) \in I_0, \quad f^3(x) \in I_0$$

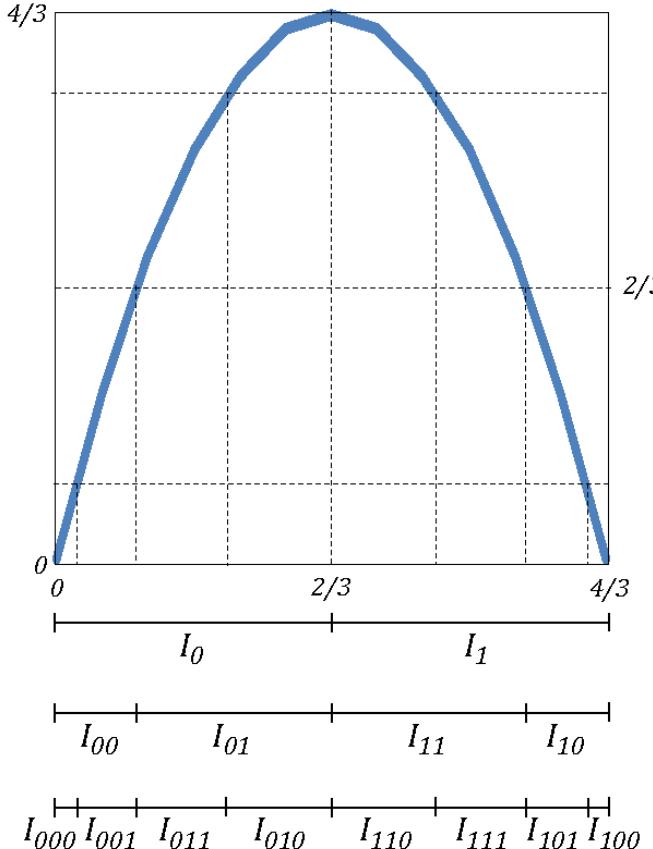


Figura 26 :
Decomposizione dell'intervallo $[0, 4/3]$ in otto sottointervalli.

In conclusione, data una sequenza finita o infinita di 0 e 1, ottenuta per esempio lanciando ripetutamente una moneta, è sempre possibile trovare una condizione iniziale $x(0)$ tale per cui la sequenza $x(k)$ da essa generata cade, al crescere di k , negli intervalli I_0 e I_1 nell'ordine della sequenza data. D'altronde, se si considerano due differenti condizioni iniziali, per quanto vicine possano essere, sarà sempre possibile suddividere iterativamente gli intervalli I_0 e I_1 fintantoché esse non appartengano a due differenti sottointervalli. Le sequenze che vengono generate da tali condizioni iniziali avranno quindi, a partire da un certo valore k , un andamento del tutto incorrelato. Questo è mostrato per esempio in Figura 27 dove viene riportata la differenza delle sequenze $x'(k)$ e $x''(k)$ ottenute rispettivamente a partire dalle condizioni iniziali $x'(0) = 0,2$ e $x''(0) = 0,2 + 10^{-10}$.

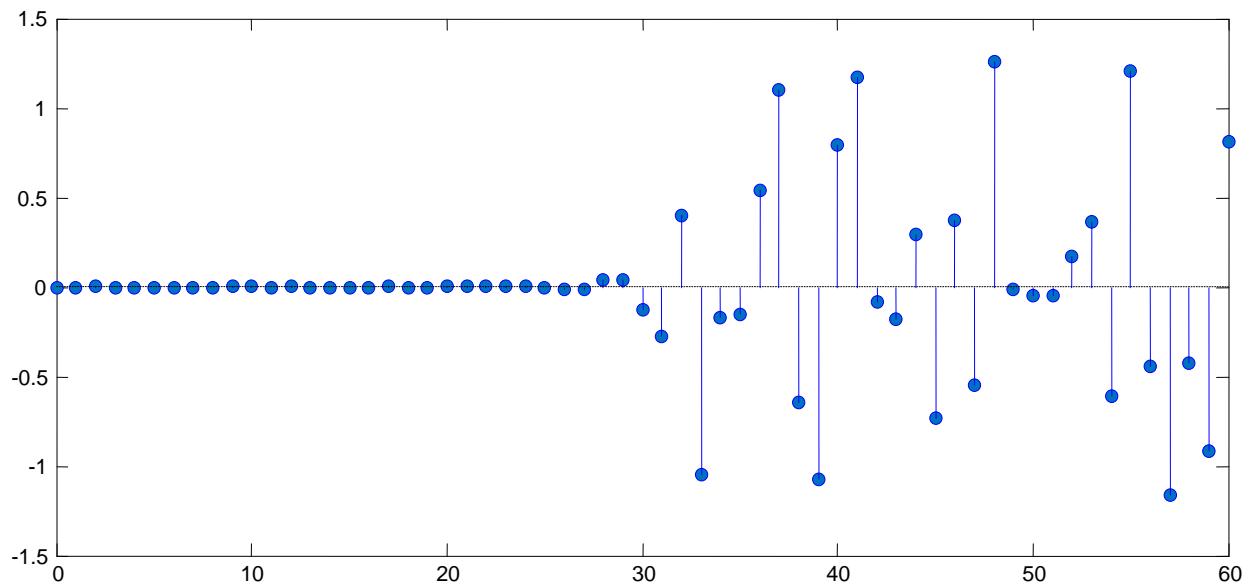


Figura 27 : Divergenza sul lungo periodo di due traiettorie ottenute a partire da condizioni iniziali molto “vicine”.

2D EQUAZIONI PLANARI AUTONOME

IL MODELLO PREDATORE-PREDA

Sull'integrale primo di un sistema non lineare

Negli anni subito dopo la prima guerra mondiale il matematico Umberto D'Ancona studiava le variazioni delle popolazioni di varie specie di pesci e si accorse che la percentuale di pesci predatori (selacei: squali, razze...) nel mare Adriatico era aumentata rispetto agli anni immediatamente precedenti al conflitto. La guerra tra Austria ed Italia aveva praticamente azzerato l'attività di pesca ma non era chiaro come mai questo fosse stato un "vantaggio" per i pesci predatori ed uno "svantaggio" per le prede, cioè il pesce commestibile. I dati raccolti nel porto di Fiume, negli anni dal 1914 al 1923 circa la percentuale media di selacei pescati rispetto al totale del pescato erano i seguenti:

1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
11,9%	21,4%	22,1%	21,1%	36,4%	27,3%	16,0%	15,9%	14,8%	10,7%

D'Ancona si rivolse ad un collega, il famoso matematico italiano Vito Volterra, nella speranza che quest'ultimo potesse formulare un modello matematico dello sviluppo delle popolazioni di selaci e delle loro prede.



Figura 28 :

Vito Volterra (Ancona, 3 maggio 1860 – Roma, 11 ottobre 1940) è stato un matematico e fisico italiano. Fu uno dei principali fondatori dell'analisi funzionale e della connessa teoria delle equazioni integrali. Il suo nome è noto soprattutto per i suoi contributi alla biologia matematica.

Volterra indicò con x e y la numerosità delle popolazioni di prede e predatori e fece l'ipotesi che il tasso di riproduzione r_x delle prede dipendesse in modo lineare dalla numerosità y della popolazione di predatori, diminuendo al crescere di quest'ultima. Pose quindi

$$\frac{\dot{x}}{x} = r_x(y) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 - a_2 y, \quad a_1, a_2 > 0$$

Inoltre assunse che anche il tasso di riproduzione r_y dei predatori dipendesse in modo lineare dalla numerosità x della popolazione delle prede. In particolare, in assenza di prede, i predatori sono destinati ad estinguersi ma crescono in numerosità all'aumentare del numero di prede, si ha quindi

$$\frac{\dot{y}}{y} = r_y(x) \stackrel{\text{def}}{=} -a_3 + a_4 x, \quad a_3, a_4 > 0$$

Le equazioni che descrivono come varia la numerosità delle prede e dei predatori nel tempo sono quindi le seguenti

$$\dot{x}(t) = a_1 x(t) - a_2 x(t)y(t) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(x(t), y(t))$$

$$\dot{y}(t) = -a_3 y(t) + a_4 x(t)y(t) \stackrel{\text{def}}{=} f_2(x(t), y(t))$$

E' immediato trovare tre soluzioni del precedente sistema:

1. $x(t) = y(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$;
2. $x(t) = 0$ e $y(t) = y(0)e^{-a_3 t}$, per $y(0) > 0$;
3. $y(t) = 0$ e $x(t) = x(0)e^{a_1 t}$, per $x(0) > 0$.

La prima soluzione, che è uno stato di equilibrio x'_{eq} , corrisponde all'origine dello spazio di stato e mostra che se inizialmente sono assenti sia le prede che i predatori, allora entrambi saranno sempre assenti. La seconda soluzione corrisponde al caso in cui non ci siano prede. In questo caso, la traiettoria giace sull'asse positivo delle ordinate e mostra come i predatori siano destinati ad estinguersi con andamento esponenziale. La terza soluzione corrisponde invece al caso in cui non siano presenti predatori. In questo caso, la traiettoria giace sull'asse positivo delle ascisse e mostra una crescita Malthusiana delle prede. Infatti, nelle ipotesi iniziali, non è previsto alcun meccanismo di regolazione della popolazione di prede ad un valore massimo sostenibile. Le tre soluzioni formano quindi, al variare di $x(0)$ e $y(0)$, il bordo dell'ortante positivo, cioè del primo quadrante, dello spazio di stato. Poiché le numerosità delle prede e dei predatori assumono per definizione solo valori non negativi, considereremo nel seguito solo le traiettorie che giacciono nel primo quadrante. E' importante notare quindi che il primo quadrante è un insieme invariante per il sistema. Infatti, come visto in precedenza, il bordo del primo quadrante è composto da traiettorie del sistema e nessuna traiettoria può "attraversarne" un'altra.

Il sistema ammette un solo punto di equilibrio x''_{eq} (oltre l'origine) che può essere calcolato annullando le derivate:

$$f_1(x, y) = a_1 x - a_2 x y = 0$$

$$f_2(x, y) = -a_3 y + a_4 x y = 0$$

Si ha dunque $x''_{eq} = a_3/a_4$ e $y''_{eq} = a_1/a_2$.

Non è possibile trovare una soluzione esplicita per il sistema a partire da generiche condizioni iniziali ma è possibile effettuare una analisi qualitativa dell'andamento delle traiettorie nel piano e calcolare un *integrale primo* (o costante di moto) del sistema di equazioni.

Per capire come siano fatte le traiettorie del sistema, si studi il segno di \dot{x} e \dot{y} nel primo quadrante. Poiché

$$\dot{x} = f_1(x, y) = a_2 x (y''_{eq} - y)$$

$$\dot{y} = f_2(x, y) = a_4 y (x - x''_{eq})$$

allora il quadrante è diviso in quattro regioni I, II, III, e IV, come mostrato in Figura 29, e le traiettorie del sistema passano dalla I alla II regione, dalla II alla III, dalla III alla IV e dalla IV alla I.

Per calcolare un integrale primo del sistema si sommi il prodotto di \dot{x}/x per $a_3 - a_4x$ con il prodotto di \dot{y}/y per $a_1 - a_2y$. Si ottiene

$$\frac{\dot{x}}{x} (a_3 - a_4x) + \frac{\dot{y}}{y} (a_1 - a_2y) = \dot{x} \left(\frac{a_3}{x} - a_4 \right) + \dot{y} \left(\frac{a_1}{y} - a_2 \right) = 0$$

che può essere riscritta come

$$\frac{d}{dt} (a_3 \ln(x(t)) - a_4 x(t) + a_1 \ln(y(t)) - a_2 y(t)) = 0$$

Posto

$$V(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} a_3 (x - x''_{eq} \ln(x)) + a_2 (y - y''_{eq} \ln(y))$$

si ha quindi che la derivata di $H(x, y)$ lungo le soluzioni del sistema è nulla, cioè

$$\frac{dV(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} f_1(x, y) + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} f_2(x, y) = 0$$

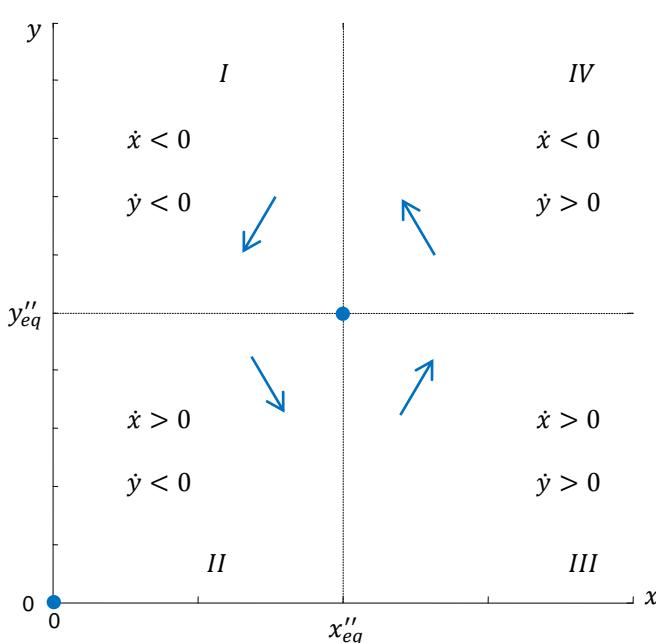


Figura 29 :
Studio qualitativo delle traiettorie del sistema di
equazioni predatore-preda.

La funzione $V(x, y)$ rimane costante, e pari al suo valore iniziale, lungo le traiettorie del sistema. Tale funzione è dunque un integrale primo del sistema ed mostrata in Figura 30 per $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$. La funzione $V(x, y)$ ha un punto di minimo in (x''_{eq}, y''_{eq}) . Infatti le sue derivate parziali

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = a_4 \left(1 - \frac{x''_{eq}}{x}\right), \quad \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = a_2 \left(1 - \frac{y''_{eq}}{y}\right)$$

si annullano per $x = x''_{eq}$ e $y = y''_{eq}$ ed inoltre

$$\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} \bigg|_{\substack{x=x''_{eq} \\ y=y''_{eq}}} = \frac{a_4}{x''_{eq}} = \frac{a_4^2}{a_3} > 0$$

$$\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} \bigg|_{\substack{x=x''_{eq} \\ y=y''_{eq}}} = \frac{a_2}{y''_{eq}} = \frac{a_2^2}{a_1} > 0$$

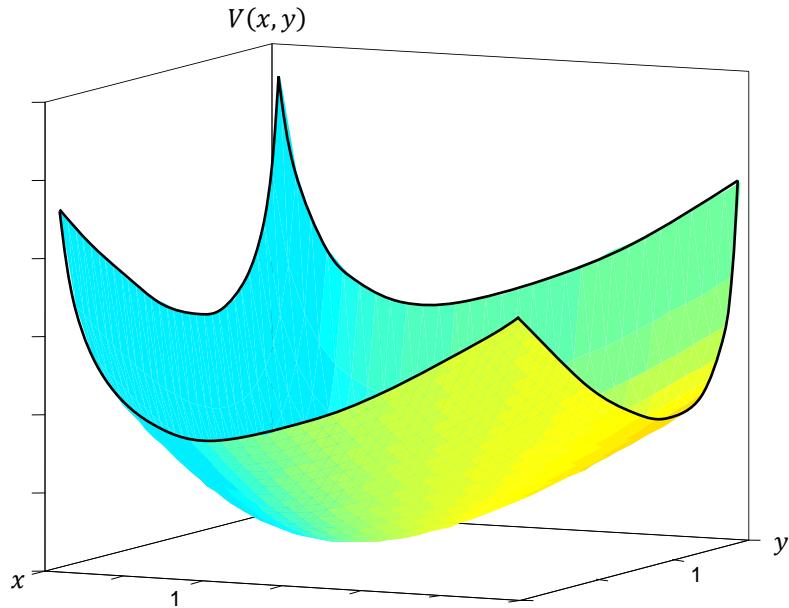


Figura 30 :
Integrale primo del sistema di equazioni predatore-preda.

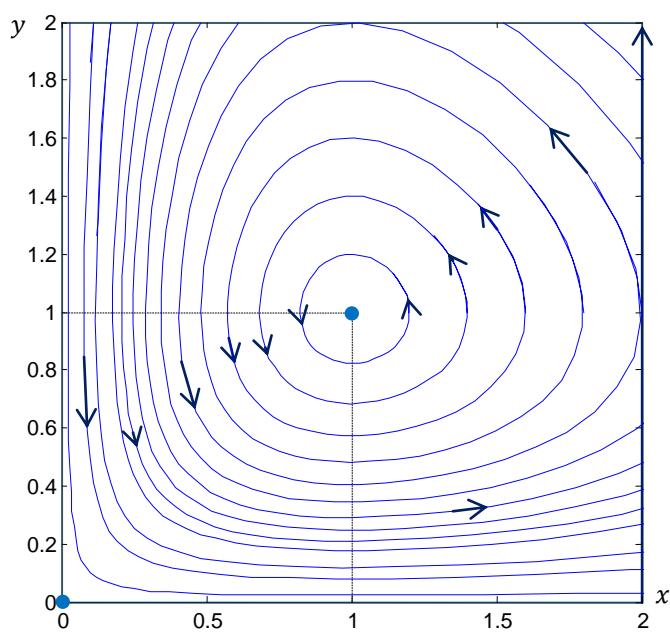


Figura 31 :
Traiettorie del sistema di equazioni predatore-preda.

Le curve di livello di $V(x, y)$, cioè le curve del piano per cui $V(x, y) = \text{cost.}$, sono quindi le traiettorie del sistema di equazioni differenziali e, poiché la funzione ha un solo minimo corrispondente al punto di equilibrio (x''_{eq}, y''_{eq}) , tali curve sono curve chiuse che circondano il punto di equilibrio stesso. Le curve, come mostrato in precedenza, vengono percorse in senso antiorario. Alcune traiettorie sono mostrate in Figura 31 per $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$.

Dal fatto che le traiettorie nel piano sono curve chiuse segue immediatamente che le soluzioni del sistema predatore-preda sono soluzioni periodiche nel tempo. Alcune soluzioni sono mostrate in Figura 32 per $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$. La figura mette chiaramente in evidenza come il periodo delle coppie di soluzioni sia differente dipendendo quindi dal valore delle condizioni iniziali.

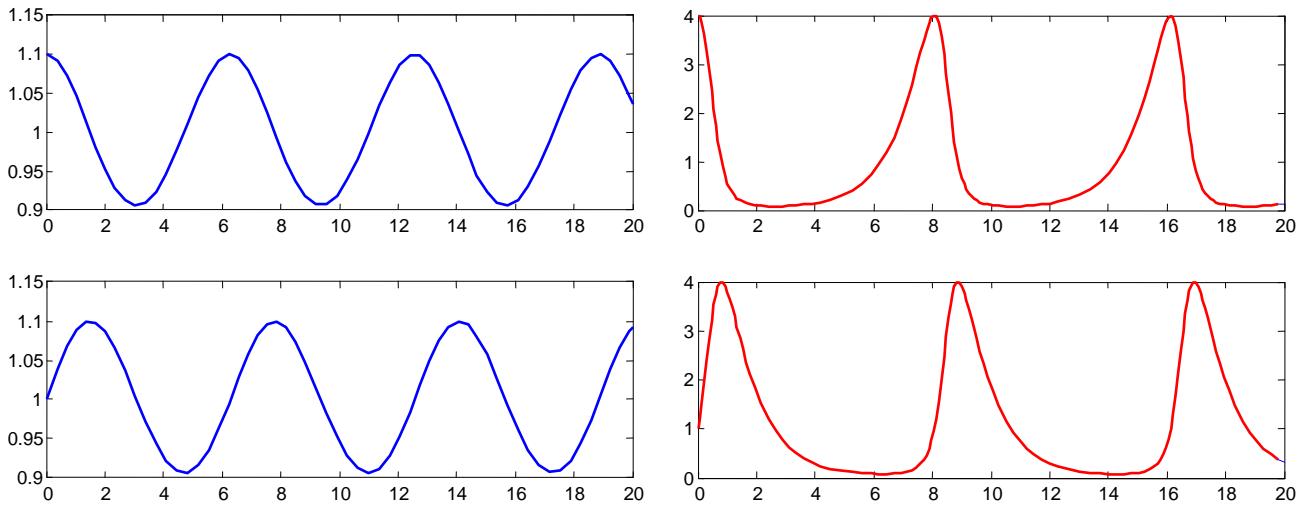


Figura 32 : Soluzioni del sistema di equazioni predatore-preda per $x(0) = 1,1$ e $y(0) = 1$ (a sinistra) e per $x(0) = 4$ e $y(0) = 1$ (a destra).

IL PRINCIPIO DI VOLTERRA

Come mostrato in precedenza, la numerosità delle prede e dei predatori oscilla in modo periodico con una ampiezza ed un periodo che dipendono dalle condizioni iniziali. La media nel tempo della numerosità di ogni popolazione rimane però costante e pari al valore di equilibrio, e cioè

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = x''_{eq}, \quad \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = y''_{eq}$$

dove T è il periodo di oscillazione. Per mostrare tale proprietà si noti che

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{d(\ln x)}{dt} = a_1 - a_2 y$$

da cui per integrazione si ottiene

$$\int_0^T \frac{d(\ln x(t))}{dt} dt = \int_0^T (a_1 - a_2 y(t)) dt$$

e cioè

$$\ln x(T) - \ln x(0) = a_1 T - a_2 \int_0^T y(t) dt$$

Poiché $x(T) = x(0)$ si ha

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a_1}{a_2} = y''_{eq}$$

Un risultato analogo vale ovviamente per la numerosità delle prede.

I dati raccolti da D'Ancona costituiscono in effetti una media su un periodo di un anno del numero relativo di predatori e perciò, in base al risultato appena ottenuto, è ora possibile enunciare il Principio di Volterra che spiega come mai una diminuzione della pesca porti ad un aumento dei predatori e ad una diminuzione delle prede. L'assenza di pesca può essere vista come un minore tasso di mortalità di entrambe le popolazioni. Si avrà dunque che in assenza di pesca il tasso di crescita della popolazione di prede sarà pari a

$$\frac{\dot{x}}{x} = \hat{a}_1 - a_2 y$$

con $\hat{a}_1 > a_1$. Allo stesso modo, il tasso di riproduzione dei predatori sarà

$$\frac{\dot{y}}{y} = -\hat{a}_3 + a_4 x$$

con $\hat{a}_3 < a_3$. Il nuovo equilibrio, o valor medio nel tempo, che si andrà a stabilire sarà quindi pari a $\hat{x}_{eq}'' = \hat{a}_1/a_2$ e $\hat{y}_{eq}'' = \hat{a}_3/a_4$ e quindi

$$\hat{x}_{eq}'' < x''_{eq}, \quad \hat{y}_{eq}'' > y''_{eq}$$

Il principio di Volterra ha una interessante applicazione nel trattamento con gli insetticidi, trattamento che distrugge sia gli insetti infestanti (prede) che i loro naturali predatori. In base al principio, infatti, l'uso degli insetticidi invece di far diminuire la popolazione di insetti infestanti determinerà una loro crescita poiché la loro popolazione è tenuta sotto controllo da insetti predatori. Una notevole conferma è data da un insetto (*Icerya purchasi*) che, quando venne introdotto accidentalmente in America dall'Australia nel 1868 minacciò di distruggere l'industria americana degli agrumi. Come rimedio, venne introdotto il suo naturale predatore australiano, una coccinella (*Novius cardinalis*) che effettivamente causò una riduzione del numero di *Iceryae*. Quando venne introdotto il DDT, gli orticoltori ne fecero immediatamente uso nella speranza di ridurre ulteriormente la popolazione di questi parassiti. Invece, in accordo con il principio di Volterra, l'effetto fu addirittura un aumento numerico delle *Iceryae*.

IL MODELLO PREDATORE-PREDA con COMPETIZIONE INTRASPECIFICA

Sulla funzione di Lyapunov

Nel modello precedentemente illustrato, in assenza di predatori, le prede seguono una crescita Malthusiana. Se si vuole tenere conto del fatto che le risorse a loro disposizione sono limitate, allora si può prevedere per le prede una crescita logistica. Per quanto riguarda i predatori tale limitazione non è necessaria in quanto la popolazione non tende comunque a divergere e, nel caso cresca, la sua crescita è comunque regolata dal numero (limitato) di prede. Introducendo quindi una crescita logistica per la popolazione delle prede, le equazioni che descrivono l'evoluzione nel tempo delle due popolazioni diventano le seguenti:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= a_1 x(t) \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{N_x}\right) - a_2 x(t)y(t) = a_1 x(t) - a_2 x(t)y(t) - b_1 x^2(t) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= -a_3 y(t) + a_4 x(t)y(t) \stackrel{\text{def}}{=} f_2(x(t), y(t))\end{aligned}$$

Anche in questo caso l'ortante positivo dello spazio di stato è un insieme invariante per il sistema in quanto il suo bordo è costituito da particolari traiettorie del sistema. Più nel dettaglio, è immediato trovare le seguenti soluzioni del precedente sistema:

1. $x(t) = y(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$;
2. $x(t) = a_1/b_1$, $y(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$;
3. $x(t) = 0$ e $y(t) = y(0)e^{-a_3 t}$, per $y(0) > 0$;
4. $y(t) = 0$ e $x(t) = \frac{N_x x(0)e^{a_1 t}}{N_x + x(0)(e^{a_1 t} - 1)}$, per $x(0) > 0$

che formano appunto, al variare di $x(0)$ e $y(0)$, il bordo dell'ortante positivo.

Il sistema ammette nessuno o un solo punto di equilibrio (oltre l'origine ed il punto di coordinate $(a_1/b_1, 0)$) che può essere calcolato annullando le derivate:

$$\begin{aligned}f_1(x, y) &= a_1 x - a_2 x y - b_1 x^2 = 0 \\ f_2(x, y) &= -a_3 y + a_4 x y = 0\end{aligned}$$

Si ha dunque che l'ulteriore punto di equilibrio ha coordinate

$$x^* = \frac{a_3}{a_4} \quad \text{e} \quad y^* = \frac{a_1 a_4 - b_1 a_3}{a_2 a_4}$$

ed appartiene al primo quadrante solo se $a_1 a_4 \geq b_1 a_3$.

Per capire come siano fatte le traiettorie del sistema, si studia il segno di \dot{x} e \dot{y} nel primo quadrante nei due casi possibili. Se $a_1 a_4 < b_1 a_3$, il quadrante è diviso in tre regioni I, II e III come mostrato nella Figura 33 (a sinistra). Le traiettorie del sistema passano dalla I alla II regione, mentre dalla II regione esse possono passare alla III o rimanere confinate nella II regione stessa convergendo verso il punto di equilibrio. Le traiettorie che partono dalla III regione rimangono invece in essa confinate in quanto questa regione è invariante per il sistema. In definitiva, tutte le traiettorie convergono verso il punto di equilibrio di coordinate $(a_1/b_1, 0)$, cioè ad una situazione in cui i predatori si sono

estinti e le prede hanno raggiunto la capacità massima sostenibile per la popolazione $N_x = a_1/b_1$. Alcune traiettorie sono mostrate in Figura 33 (a destra) per $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ e $b_1 = 2$.

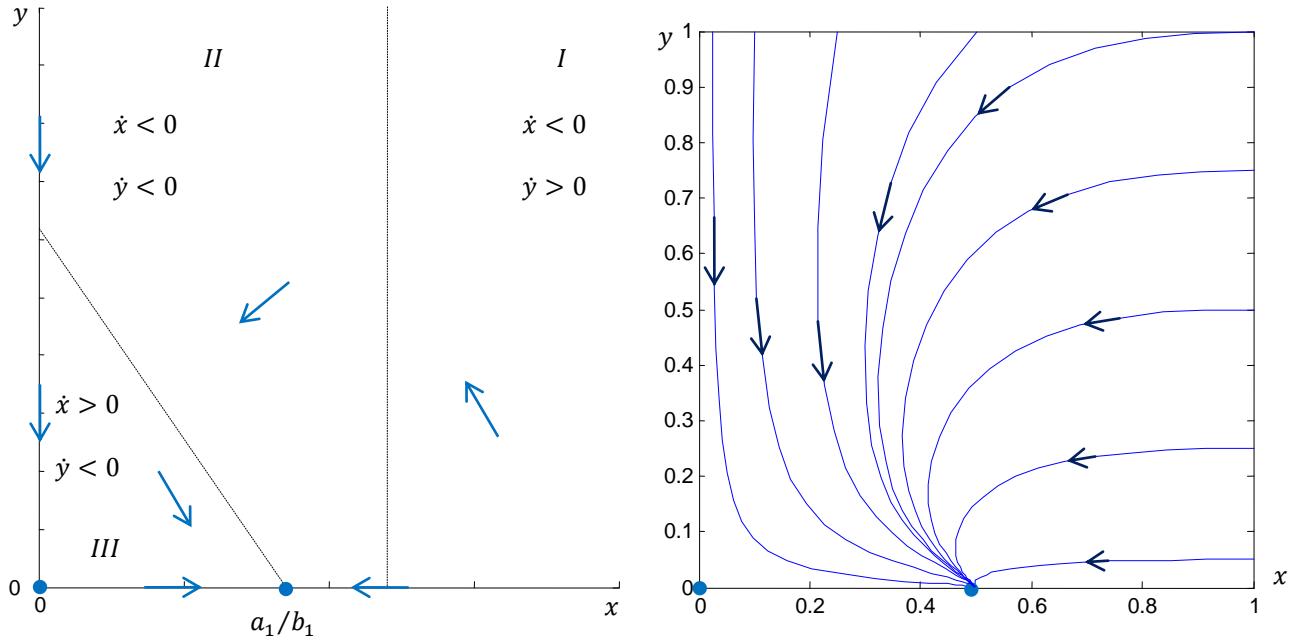


Figura 33 : Studio qualitativo delle traiettorie del sistema predatore-preda con competizione interspecifica (sinistra) e alcune traiettorie del sistema.

Se $a_1 a_4 < b_1 a_3$, il primo quadrante è diviso in quattro regioni I, II, III e IV come mostrato nella Figura 34 (a sinistra) e le traiettorie del sistema passano dalla I alla II regione, dalla II alla III, dalla III alla IV e dalla IV alla I.

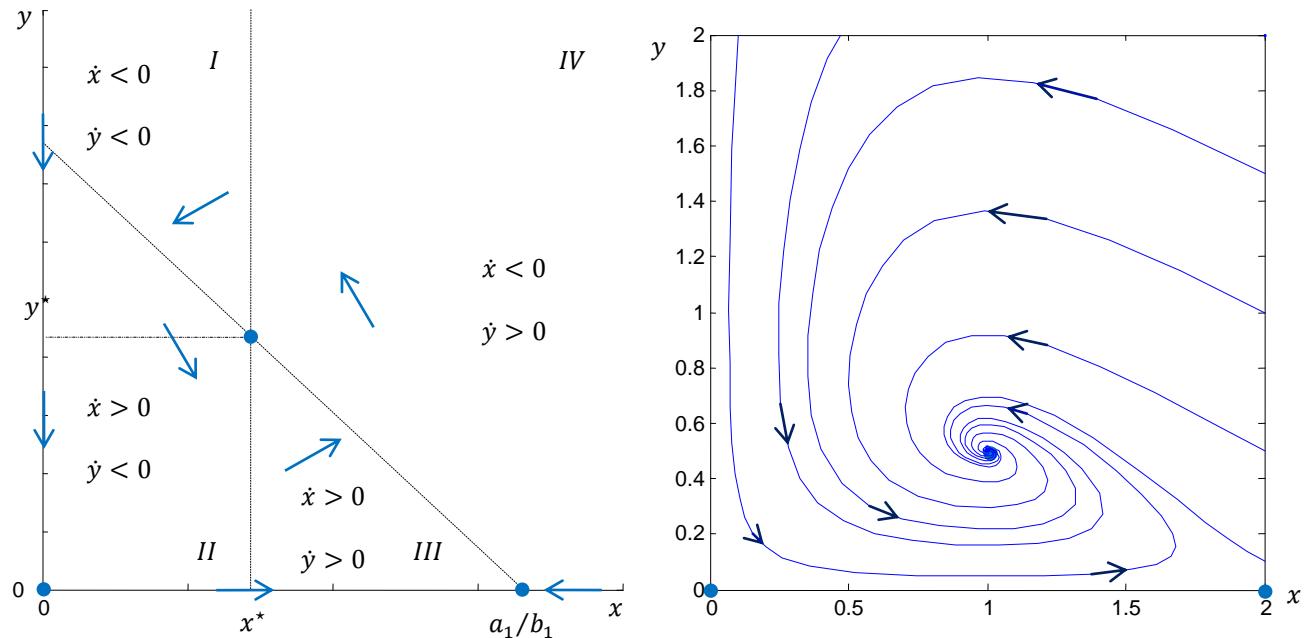


Figura 34 : Studio qualitativo delle traiettorie del sistema predatore-preda con competizione interspecifica (sinistra) e alcune traiettorie del sistema.

Per capire come siano fatte le traiettorie si consideri ancora la funzione

$$V(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} a_4(x - x^* \ln x) + a_2(y - y^* \ln y)$$

La funzione $V(x, y)$ ha un punto di minimo in (x^*, y^*) . La derivata di $V(x, y)$ lungo le soluzioni del sistema è la seguente:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t), y(t))}{dt} &= \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} f_1(x, y) + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} f_2(x, y) \\ &= a_4 \left(1 - \frac{x^*}{x}\right) x(a_1 - a_2 y - b_1 x) + a_2 \left(1 - \frac{y^*}{y}\right) y(-a_3 + a_4 x) \end{aligned}$$

Poiché x^* e y^* sono tali per cui

$$a_1 - a_2 y^* - b_1 x^* = 0$$

$$-a_3 + a_4 x^* = 0$$

si può sostituire, nel calcolo della derivata di $V(x, y)$, a_1 con $a_2 y^* + b_1 x^*$ ed a_3 con $a_4 x^*$. Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t), y(t))}{dt} &= -a_4(x - x^*)[a_2(y - y^*) + b_1(x - x^*)] + a_2(y - y^*)a_4(x - x^*) \\ &= -a_4 b_1(x - x^*)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

In conclusione, si ha che la funzione $V(x, y)$ è una *funzione di Lyapunov* per il sistema ed il punto di equilibrio. In base al criterio di Krasowskii le traiettorie del sistema predatore-preda, nel caso in cui si consideri una crescita logistica per le prede, tendono quindi a convergere al punto di equilibrio (x^*, y^*) con spirali percorse in senso antiorario. Alcune traiettorie sono mostrate in Figura 34 (a destra) per $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ e $b_1 = 0,5$.

Il modello predatore-preda è stato utilizzato anche in campo economico per descrivere la dinamica della popolazione e del prodotto interno delle nazioni o delle città. In particolare, quando si considerino come variabili per descrivere lo stato di una determinata città la percentuale della sua popolazione rispetto alla popolazione dell'intera nazione e il rapporto tra i prodotti pro-capite medi della città e della nazione, si notano traiettorie del tutto simili a quelle del modello predatore-preda. In effetti i dati possono essere spiegati utilizzando un modello predatore-preda in cui i predatori siano la popolazione e la preda sia il prodotto pro capite. Infatti, al crescere del prodotto pro capite il benessere della città genera una immigrazione dalle altre città e quindi la popolazione tende a crescere. Al crescere della popolazione però, il reddito pro capite tende a diminuire innescando così un ciclo. Nella Figura 35 viene riportato l'andamento di tali variabili relativamente alla città di New York negli anni che vanno dal 1930 al 1980. Come si vede, a partire dalla seconda guerra mondiale, la popolazione scende dal 6,4% al 4% della popolazione totale degli Stati Uniti. In realtà la diminuzione del reddito pro-capite era iniziata molto prima scendendo dal doppio della media nazionale nel 1930 al valore di 1,4 nel 1950.

Sulla base del modello di ogni città è possibile “ricostruire” le dinamiche delle variabili a loro associate e produrre delle proiezioni. In Figura 36 vengono mostrate gli andamenti relativi alle maggiori città degli Stati Uniti d'America.

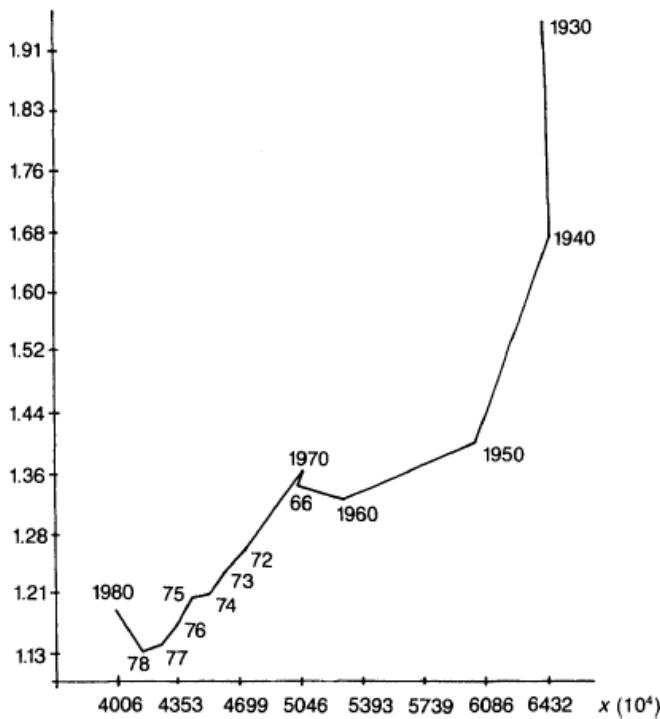


Figura 35 : Traiettoria relativa alla città di New York dal 1930 al 1980.

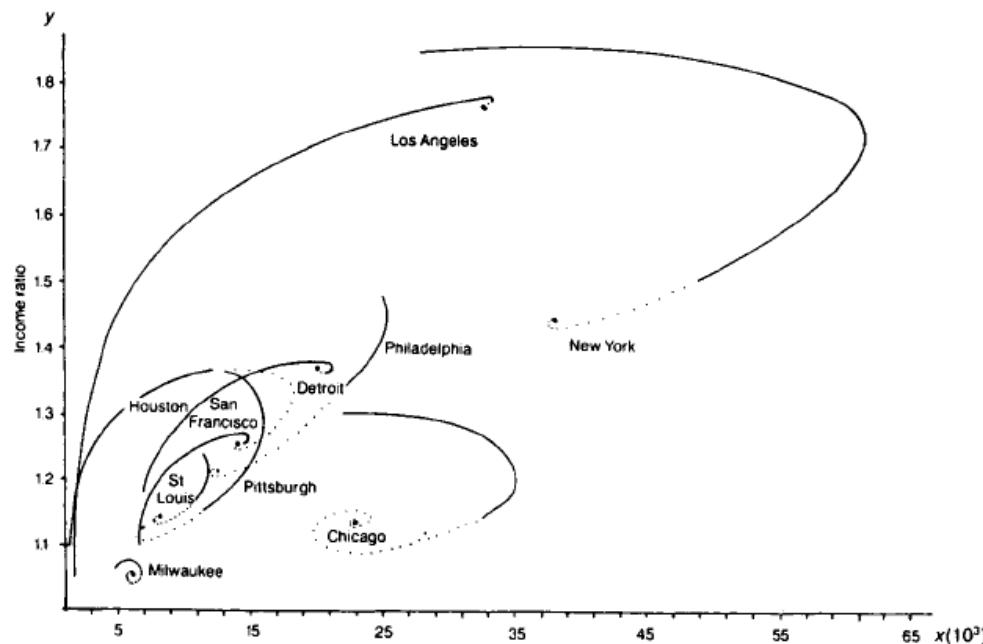


Figura 36 : Traiettorie simulate (linea continua) e proiezioni (punti) relativamente alle maggiori città degli USA dal 1890 il 1980.

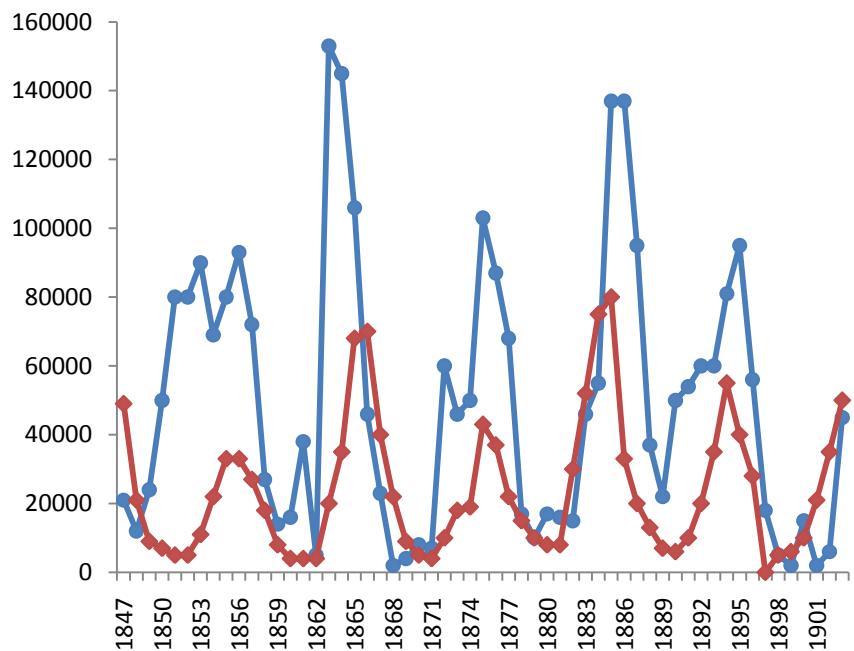
ESEMPIO: LE LINCI E LE LEPRI CANADESI

Come esempio di un sistema predatore-presa si considera in questo paragrafo l'ecosistema delle popolazioni di lepri e di linci in Canada dal 1847 al 1903, censite anno per anno dalla Hudson's Bay Company canadese per la raccolta di pellicce. I dati raccolti dalla Hudson's Bay Company sono riportati nella Tabella 3. Come reso evidente dall'elaborazione grafica dei dati riportata a lato della tabella, l'andamento delle popolazioni in questione è caratterizzato da un andamento fortemente periodico che può quindi essere interpretato come diretta conseguenza del rapporto tra prede e

predatori. In realtà la numerosità delle popolazioni di lepri varia ciclicamente anche in zone dove non siano presenti loro predatori. Tale fatto può però essere motivato dallo stesso tipo di interazione: in tale caso i predatori sono le lepri mentre le prede consistono nelle risorse primarie che caratterizzano l'alimentazione di questi roditori. In realtà quindi, l'ecosistema preso ad esempio dovrebbe essere costituito da tre equazioni differenziali con l'aggiunta di una terza popolazione che consiste nella popolazione della flora di cui si cibano le lepri. Tuttavia il fattore limitante costituito dalle linci è talmente forte da rendere trascurabile il fattore limitante dovuto all'alimentazione delle lepri.

Anno	Numero di Lepri	Numero di Linci
1847	21000	49000
1848	12000	21000
1849	24000	9000
1850	50000	7000
1851	80000	5000
1852	80000	5000
1853	90000	11000
1854	69000	22000
1855	80000	33000
1856	93000	33000
1857	72000	27000
1858	27000	18000
1859	14000	8000
1860	16000	4000
1861	38000	4000
1862	5000	4000
1863	153000	20000
1864	145000	35000
1865	106000	68000
1866	46000	70000
1867	23000	40000
1868	2000	22000
1869	4000	9000
1870	8000	5000
1871	7000	4000
1872	60000	10000
1873	46000	18000
1874	50000	19000
1875	103000	43000
1876	87000	37000
1877	68000	22000
1878	17000	15000
1879	10000	10000
1880	17000	8000
1881	16000	8000
1882	15000	30000
1883	46000	52000
1884	55000	75000
1885	137000	80000
1886	137000	33000
1887	95000	20000
1888	37000	13000
1889	22000	7000
1890	50000	6000
1891	54000	10000
1892	60000	20000
1893	60000	35000
1894	81000	55000
1895	95000	40000
1896	56000	28000
1897	18000	0
1898	5000	5000
1899	2000	6000
1900	15000	10000
1901	2000	21000
1902	6000	35000
1903	45000	50000

Tabella 3:
Dati ottenuti dalla Hudson's Bay Company, e pubblicati su *Selected Lectures on Mathematical Biology* (dell'American Ecological Society)



IL MODELLO DI COMPETIZIONE INTERSPECIFICA

La competizione intraspecifica considerata nella crescita logistica di una popolazione costituisce solo un aspetto particolare della competizione all'interno di un ecosistema. Di fatto, lo stesso meccanismo è alla base della competizione tra specie differenti che sfruttano la stessa risorsa (nicchia ecologica). Il modello che descrive questo tipo di interazione è stato introdotto sempre dal matematico Vito Volterra e da questo è possibile dedurre quel principio di esclusione che ancora oggi costituisce uno dei principi fondamentali dell'ecologia. Si considerino due popolazioni la cui numerosità nel tempo sia $n_1(t)$ e $n_2(t)$. Se le due popolazioni sfruttano la stessa risorsa allora, in presenza di risorse limitate, l'aumento della numerosità delle popolazioni crea una sempre maggiore competizione per le risorse stesse che può far diminuire il tasso di riproduzione di ogni singola popolazione. Il modo più semplice di modellare la dipendenza del tasso di riproduzione di una popolazione dalla numerosità delle popolazioni che sfruttano la stessa risorsa è quello di assumere una sua dipendenza lineare, e cioè

$$r(n_i) \stackrel{\text{def}}{=} r_i \left(1 - \frac{n_i}{N_i} - \alpha_{ij} \frac{n_j}{N_j} \right)$$

dove i parametri r_i e N_i sono positivi e possono essere interpretati rispettivamente come il massimo tasso di crescita della popolazione e la massima numerosità sostenibile della popolazione considerata. N_j rappresenta la massima numerosità sostenibile della seconda popolazione e α_{ij} un coefficiente di interazione tra le due popolazioni. Sotto tale ipotesi, la crescita delle popolazioni è descritta dalle seguenti equazioni differenziali

$$\dot{n}_1(t) = r_1 n_1(t) \left(1 - \frac{n_1(t)}{N_1} - \alpha_{12} \frac{n_2(t)}{N_2} \right)$$

$$\dot{n}_2(t) = r_2 n_2(t) \left(1 - \frac{n_2(t)}{N_2} - \alpha_{21} \frac{n_1(t)}{N_1} \right)$$

Si noti che in assenza di una delle due popolazioni, l'altra segue una crescita logistica. Anche in questo caso l'ortante positivo dello spazio di stato è un insieme invariante per il sistema in quanto il suo bordo è costituito da particolari traiettorie del sistema. Nello specifico, il sistema può essere scritto come

$$\dot{x}(t) = r_1 x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{N_1} - \alpha_{12} \frac{y(t)}{N_2} \right) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(x(t), y(t))$$

$$\dot{y}(t) = r_2 y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{N_2} - \alpha_{21} \frac{x(t)}{N_1} \right) \stackrel{\text{def}}{=} f_2(x(t), y(t))$$

e si hanno le seguenti soluzioni del sistema:

1. $x(t) = y(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$;
2. $x(t) = 0$ e $y(t) = \frac{N_2 y(0) e^{r_2 t}}{N_2 + y(0) (e^{r_2 t} - 1)}$, per $y(0) > 0$;
3. $y(t) = 0$ e $x(t) = \frac{N_1 x(0) e^{r_1 t}}{N_1 + x(0) (e^{r_1 t} - 1)}$, per $x(0) > 0$;

4. $x(t) = 0$ e $y(t) = N_2$ per ogni $t \geq 0$;
5. $x(t) = N_1$ e $y(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$

che formano appunto, al variare di $x(0)$ e $y(0)$, il bordo dell'ortante positivo.

Il sistema può ammettere un solo punto di equilibrio (oltre l'origine e i punti di coordinate $(N_1, 0)$ e $(0, N_2)$) che può essere calcolato annullando le derivate:

$$f_1(x, y) = r_1 x \left(1 - \frac{x}{N_1} - \alpha_{12} \frac{y}{N_2}\right) = 0$$

$$f_2(x, y) = r_2 y \left(1 - \frac{y}{N_2} - \alpha_{21} \frac{x}{N_1}\right) = 0$$

Si ha dunque che l'ulteriore punto di equilibrio è l'intersezione delle rette

$$1 - \frac{x}{N_1} - \alpha_{12} \frac{y}{N_2} = 0$$

$$1 - \frac{y}{N_2} - \alpha_{21} \frac{x}{N_1} = 0$$

ed ha coordinate $x^* = N_1 \frac{1-\alpha_{12}}{1-\alpha_{12}\alpha_{21}}$ e $y^* = N_2 \frac{1-\alpha_{21}}{1-\alpha_{12}\alpha_{21}}$. Se tale punto non appartiene al primo quadrante, allora una delle due popolazioni tende ad estinguersi.

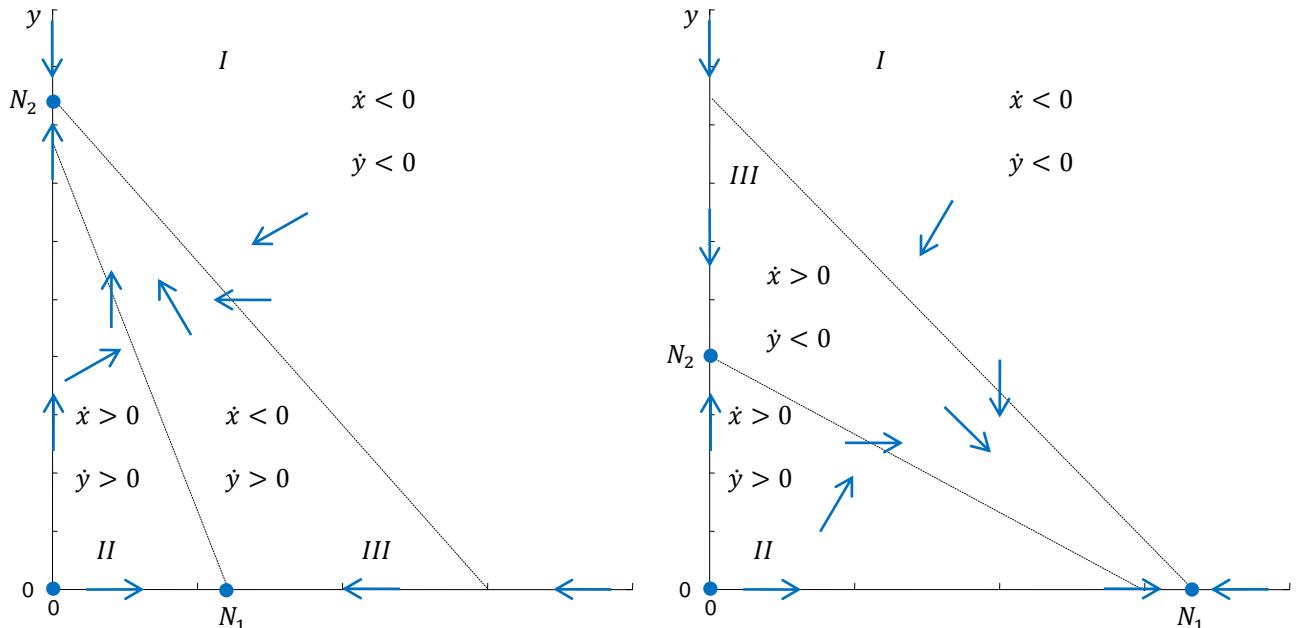


Figura 37 : Studio qualitativo delle traiettorie del sistema di due popolazioni in competizione per la stessa risorsa.

Per capire ciò basta studiare il segno di \dot{x} e \dot{y} nel primo quadrante: esso è diviso in tre regioni I, II e III come mostrato nei grafici della Figura 37. Le traiettorie del sistema passano dalla I e II regione alla III regione esse rimangono confinate nella regione stessa convergendo al corrispondente punto di equilibrio.

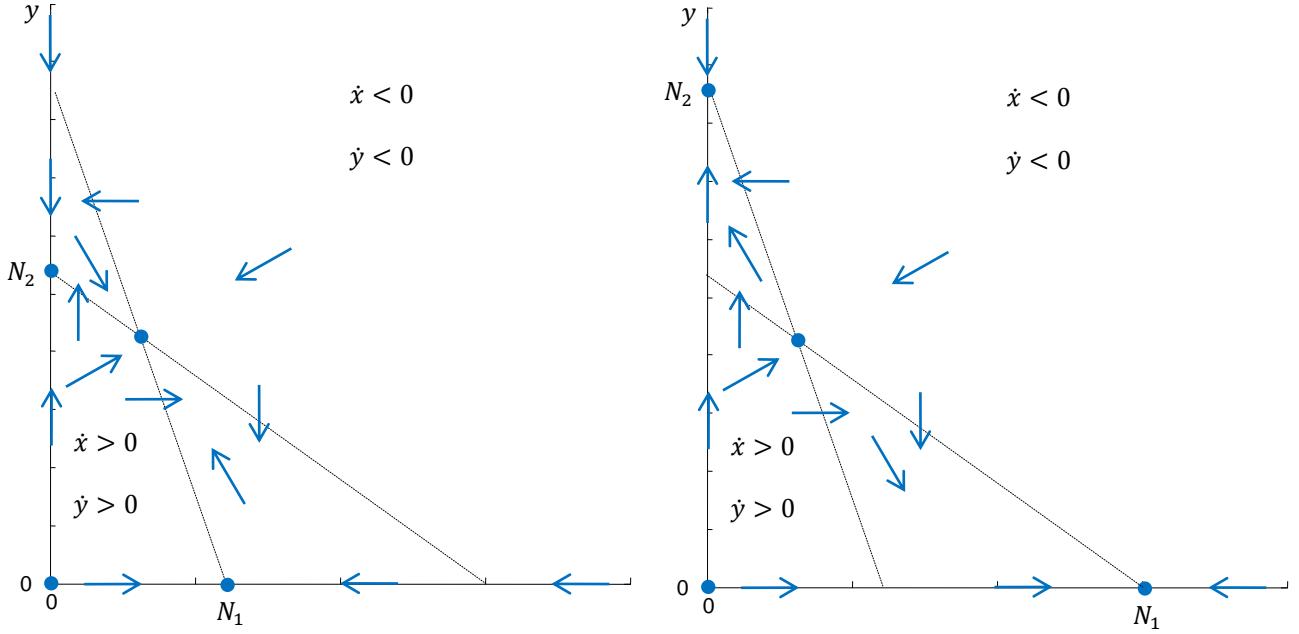


Figura 38 : Studio qualitativo delle traiettorie del sistema di due popolazioni in competizione per la stessa risorsa.

Se invece il punto di coordinate (x^*, y^*) appartiene al primo quadrante, allora sono possibili due casi come mostrato in Figura 38. Nel primo caso le traiettorie tendono sul lungo periodo al punto (x^*, y^*) mentre, nel secondo caso, le traiettorie tendono al punto di coordinate $(N_1, 0)$ o a quello di coordinate $(0, N_2)$ a seconda delle condizioni iniziali.

Alcune traiettorie, per diversi valori dei parametri che caratterizzano il sistema, sono riportate nella Figura 39.

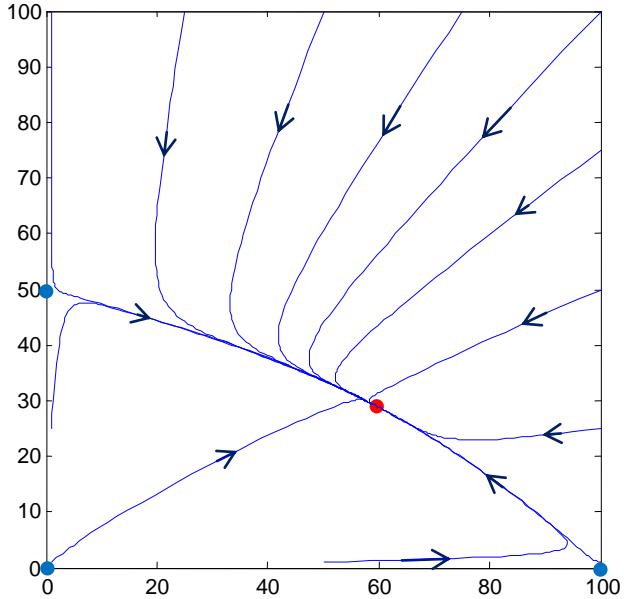


Figura 39a : Traiettorie del sistema per $r_1 = 0,8, r_2 = 0,7, N_1 = 100, N_2 = 50, \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0,7$. Le traiettorie tendono sul lungo periodo al punto $(x^*, y^*) \cong (59, 29)$ come nella situazione della Figura 36 a sinistra.

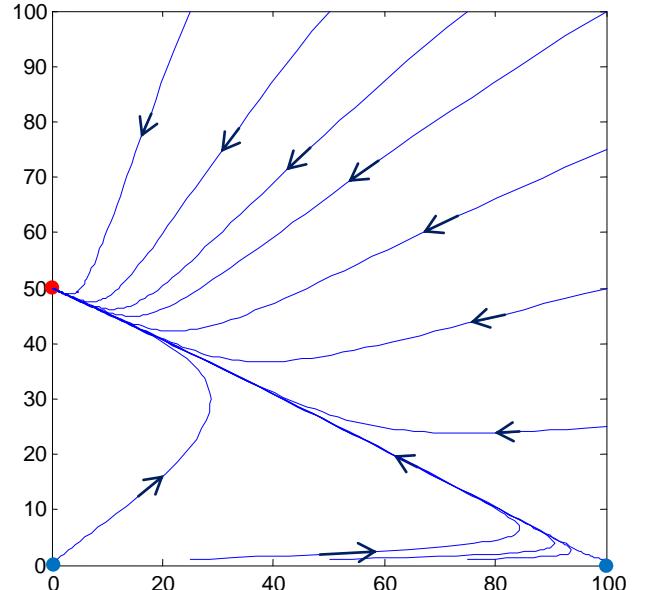


Figura 39b : Traiettorie del sistema per $r_1 = 0,8, r_2 = 0,7, N_1 = 100, N_2 = 50, \alpha_{12} = 1,2, \alpha_{21} = 0,7$. Il punto (x^*, y^*) è nel IV quadrante per cui si è nella situazione della Figura 35 a sinistra: la prima popolazione si estingue sul lungo periodo.

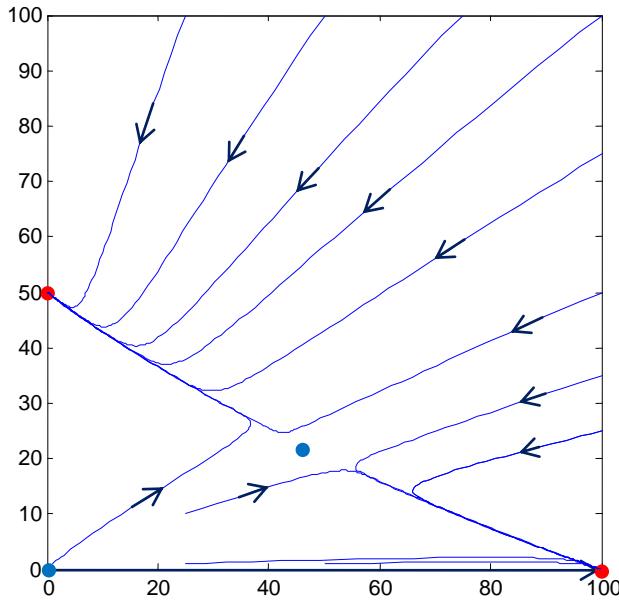


Figura 39c : Traiettorie del sistema per $r_1 = 0,8$, $r_2 = 0,7$, $N_1 = 100$, $N_2 = 50$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 1,2$. Il punto $(x^*, y^*) \cong (45, 23)$ è nel I quadrante. Una delle due popolazioni, a seconda delle condizioni iniziali, si estingue sul lungo periodo come nella situazione della Figura 36 a destra.

STUDIO DI UN CASO: ANCORA SUGLI ESPERIMENTI DI GAUSE

La crescita delle popolazioni di *Paramecium aurelia* e di *Paramecium caudatum* è stata osservata da Gause anche nel caso di popolazioni coesistenti in un volume costante di nutriente. I dati relativi agli esperimenti di Gause, così come riportati nell'appendice del suo libro (Tavola 3, pagine 144-145) sono riportati nella Tabella 4. Si noti che ogni valore della tabella deve essere moltiplicato per 10 per ottenere il numero totale $d(k)$ di parameci presenti nei 5 cc di soluzione e che ogni popolazione è inizialmente composta da 20 individui. La crescita delle popolazioni è descritta dalle due equazioni differenziali

$$\begin{aligned}\dot{n}_1(t) &= r_1 n_1(t) \left(1 - \frac{n_1(t)}{N_1} - \alpha_{12} \frac{n_2(t)}{N_2} \right) \\ \dot{n}_2(t) &= r_2 n_2(t) \left(1 - \frac{n_2(t)}{N_2} - \alpha_{21} \frac{n_1(t)}{N_1} \right)\end{aligned}$$

dove si indica con n_1 la numerosità della popolazione di *Paramecium aurelia* e con n_2 quella di *Paramecium caudatum*. I parametri $r_1 = 0,8687$ e $N_1 = 5910$ sono quindi i valori di r e N precedentemente stimati per la crescita logistica della popolazione del *Paramecium aurelia*, mentre $r_2 = 0,7395$ e $N_2 = 2258$ sono i valori stimati per la crescita logistica della popolazione di *Paramecium caudatum*. Rimangono quindi da determinare i valori (positivi) dei parametri α_{12} e α_{21} che misurano l'effetto che ogni popolazione ha sul tasso di crescita dell'altra.

AGE IN DAYS	Number of individuals per 0,5 cc in the culture	
	P. Aurelia	P. Caudatum
0	2	2
1	-	-
2	10	10
3	21	11
4	58	29
5	92	50
6	202	88
7	163	102
8	221	124
9	293	93
10	236	80
11	303	66
12	302	83
13	340	55
14	387	67
15	335	52
16	363	55
17	323	40
18	358	48
19	308	47
20	350	50
21	330	40
22	350	20
23	350	20
24	330	35
25	350	20

Tabella 4:
Risultati degli esperimenti di Gause sulle popolazioni di *Paramecium aurelia* e *caudatum* che competono per la stessa risorsa (cibo).

Tenendo conto che le due specie prese in considerazione sono molto simili è possibile ipotizzare che l'effetto che la numerosità di una specie ha sul tasso crescita dell'altra sia molto simile a quello che ha sul proprio tasso di crescita. In altre parole, è possibile supporre che i parametri α_{12} e α_{21} siano tali per cui

$$\alpha_{12} \frac{r_1}{N_2} = \frac{r_2}{N_2} \quad \text{e} \quad \alpha_{21} \frac{r_2}{N_1} = \frac{r_1}{N_1}$$

da cui si ricava immediatamente $\alpha_{12} = 1/\alpha_{21} = r_2/r_1$. Di conseguenza, per sottrazione si ha

$$\frac{\dot{n}_1(t)}{n_1(t)} - \frac{\dot{n}_2(t)}{n_2(t)} = r_1 - r_2$$

da cui, integrando rispetto al tempo, si ottiene

$$\frac{n_1(t)}{n_2(t)} = \frac{n_1(0)}{n_2(0)} e^{(r_1 - r_2)t}$$

Se le ipotesi fatte sono corrette, allora ne segue che:

1. Poiché $r_1 > r_2$, allora sul lungo periodo la popolazione di *Paramecium caudatum* dovrebbe estinguersi, cioè $\lim_{t \rightarrow \infty} n_2(t) = 0$;
2. I valori di $\ln(n_1(t)/n_2(t))$ in funzione di t dovrebbero disporsi su di una retta passante per l'origine (poiché $n_1(0) = n_2(0)$) e con coefficiente angolare pari a $r_1 - r_2$.

I dati osservati da Gause mostrano effettivamente che la popolazione di *Paramecium caudatum* sembra estinguersi al passare dei giorni. Inoltre la retta passante per l'origine che minimizza l'errore quadratico medio (metodo dei minimi quadrati, vedi Figura 40) rispetto ai valori di $\ln(n_1(t)/n_2(t))$ ha un coefficiente angolare pari a 0,1132, valore molto vicino alla differenza $r_1 - r_2 = 0,1292$ ottenuta dai valori di r_1 e r_2 stimati dalla crescita logistica delle popolazioni isolate.

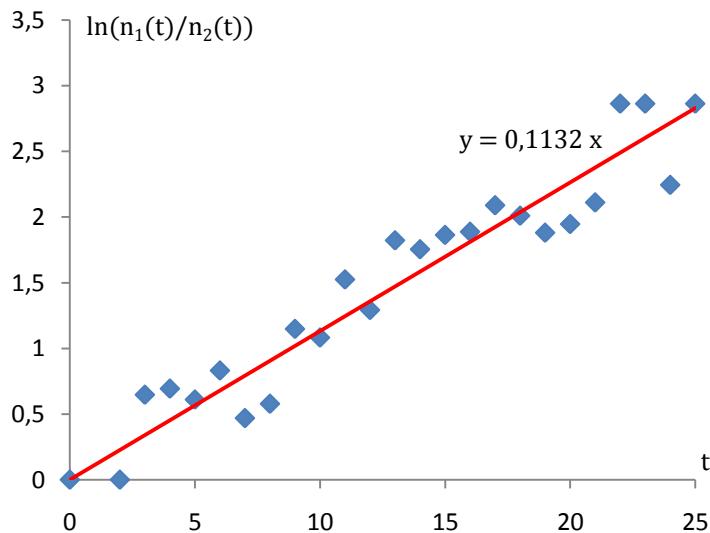


Figura 40 :
Retta a distanza minima dai dati sperimentali delle due popolazioni di parameci.

In Figura 41 vengono confrontati gli andamenti delle popolazioni di parameci stimati con i valori dei parametri pari a $r_1 = 0,8687$, $N_1 = 5910$, $r_2 = 0,7395$, $N_2 = 2258$, $\alpha_{12} = 1/\alpha_{21} = r_2/r_1$ e l'andamento dei dati osservati da Gause. E' evidente che, mentre la stima dell'andamento della popolazione di *Paramecium caudatum* è molto simile all'andamento sperimentale, la stima dell'andamento della popolazione di *Paramecium aurelia* è conforme alle osservazioni solamente fino al sedicesimo giorno. A partire da quel giorno, la stima diverge sensibilmente dai valori osservati da Gause. La differenza tra i due andamenti rientra comunque nelle media dei valori dell'errore $\bar{\sigma}_d$ che si possono calcolare dai diversi esperimenti fatti da Gause. Infatti, anche in questo caso, i valori riportati in Tabella 4 sono la media dei valori ottenuti per diversi esperimenti. E' comunque importante notare come dal valore dei parametri stimati dagli esperimenti in cui le popolazioni vivono isolate l'una dall'altra sia possibile prevedere che la popolazione di *Paramecium caudatum* tenda ad estinguersi e stimare gli andamenti delle due popolazioni nel tempo.

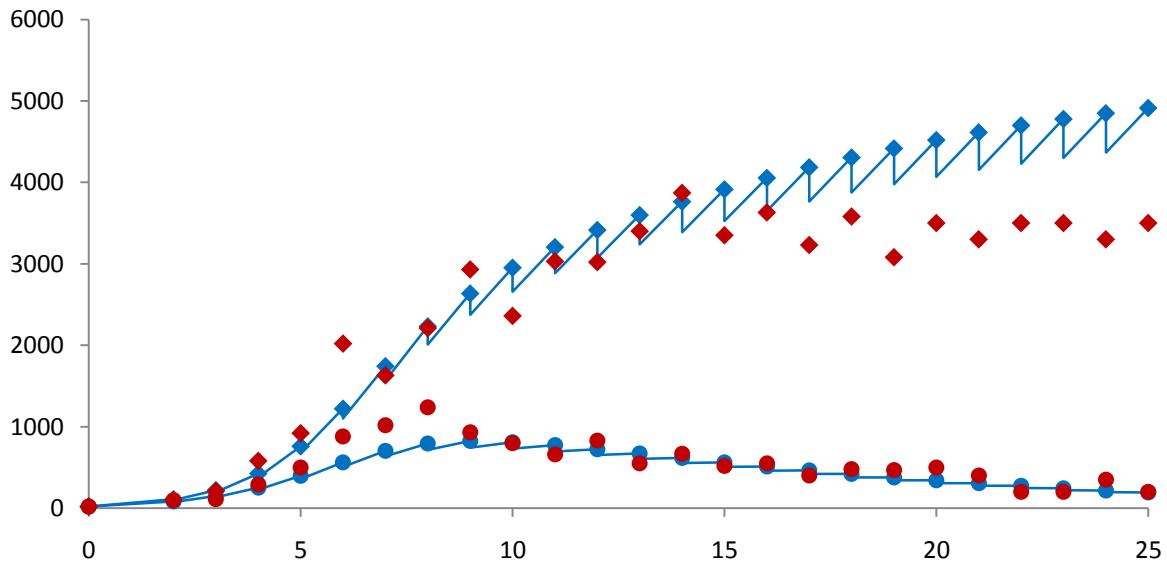


Figura 41 : Dati misurati (♦) ed andamento stimato (—) nel caso del Paramecium aurelia e dati misurati (●) ed andamento stimato (—) nel caso del Paramecium caudatum.

I MODELLI EPIDEMIOLOGICI

La modellizzazione della propagazione di malattie infettive ha un importante precedente nel lavoro di Daniel Bernoulli ma il prototipo da cui è seguito ogni altro modello matematico di epidemia viene impostato ai primi del novecento da Kermack e McKendrick, contemporaneamente ai modelli di popolazione di Lotka e Volterra.

Nei modelli epidemiologici di base, l'intera popolazione viene usualmente divisa in tre classi di individui:

1. I *suscettibili*, cioè gli individui sani passibili di contagio;
2. Gli *infettivi*, cioè gli individui malati in grado di trasmettere la malattia per contagio diretto;
3. I *rimossi*, cioè gli individui che avendo contratto la malattia ed essendo guariti sono diventati immuni, ammesso che la malattia è immunizzante.

Per descrivere l'evolversi nel tempo della malattia bisogna quindi descrivere come variano nel tempo il numero $S(t)$ di suscettibili, il numero $I(t)$ di infettivi ed il numero $R(t)$ di rimossi, cioè le variabili di stato del sistema. Per fare questo bisogna formulare ipotesi semplificative riguardo il meccanismo di contagio e di progressione della malattia. Una prima distinzione riguarda le malattie che si concludono con l'immunizzazione del malato (malattie da virus quali ad esempio le malattie esantematiche infantili, il vaiolo o l'influenza) e quelle che invece non sono immunizzanti (come ad esempio le malattie da batteri). Il primo tipo porta al cosiddetto modello SIR, il secondo al modello SIS. I nomi dei modelli derivano dalla loro rappresentazione schematica (grafo di trasferimento) in cui ogni classe della popolazione equivale ad un compartimento ed il processo di contagio e di guarigione corrispondono a flussi tra i compartimenti. Il contagio è un flusso che trasferisce i suscettibili contagiati nel compartimento degli infettivi. La guarigione è invece un flusso che trasferisce gli infettivi guariti nel compartimento dei rimossi, se la malattia è immunizzante, o nel compartimento dei suscettibili nel caso in cui la malattia non lo sia. Nel caso quindi di malattie che

si concludono con l'immunizzazione, lo schema del modello è quello mostrato in Figura 42 mentre, nel caso in cui la malattia non sia immunizzante, lo schema è quello mostrato in Figura 43.

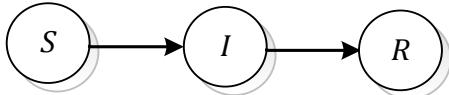


Figura 42 : Grafo di trasferimento per il modello SIR.

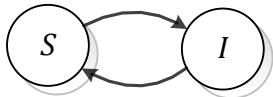


Figura 43 : Grafo di trasferimento per il modello SIS.

Il modo più semplice di descrivere il processo di contagio è quello di definire il tasso $\lambda(t)$ al quale i suscettibili vengono contagiati. Tale parametro, detto anche forza di infezione, dipende dalle modalità con cui gli individui vengono a contatto e, comunemente, viene posto pari a

$$\lambda(t) = \frac{c\chi}{N(t)} I(t) \stackrel{\text{def}}{=} \beta \frac{I(t)}{N(t)}$$

dove c è il numero di contatti che un individuo ha nell'unità di tempo, χ è l'infettività di un contatto con un infettivo, cioè la probabilità di essere contagiato in un tale contatto ed $N(t)$ è la popolazione totale. Nell'espressione di $\lambda(t)$ il termine $I(t)/N(t)$ può essere interpretato come la probabilità che l'individuo con cui il suscettibile entra in contatto sia infettivo. Infatti il processo di infezione di un suscettibile può essere descritto come la probabilità composta risultante dalla probabilità c che un suscettibile ha di avere un generico contatto, la probabilità $I(t)/N(t)$ che il contatto avvenga con un infettivo e la probabilità χ che tale contatto trasmetta l'infezione.

Il modo più semplice di descrivere il processo di guarigione è quello di definire il tasso $\gamma(t)$ al quale gli infettivi guariscono. Tale tasso viene considerato costante

$$\gamma(t) = \gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\tau}$$

dove τ è il tempo medio speso come infettivo, cioè la durata media dell'infezione.

Ai fini della trattazione è importante definire anche un parametro che nella nomenclatura epidemiologica viene chiamato numero di contatto

$$\sigma = \beta\tau = \frac{\beta}{\gamma}$$

e che corrisponde al numero medio di contatti potenzialmente efficaci alla trasmissione del virus (cioè contatti non solo con persone suscettibili) che un infettivo ha durante l'intero arco di tempo in cui è contagioso.

Nel seguito assumeremo che la popolazione rimanga costante durante il periodo di studio della malattia, cioè $N(t) = N$, e che la sua numerosità sia abbastanza grande da poter considerare ogni classe come una variabile continua anziché discreta. Inoltre, trascureremo i processi di nascita e di morte

IL MODELLO SIR

Se l'infezione si conclude con l'immunizzazione, allora le equazioni che descrivono come variano le numerosità dei suscettibili, degli infettivi e dei rimossi sono le seguenti

$$\dot{S}(t) = -\beta \frac{S(t)I(t)}{N}$$

$$\dot{I}(t) = \beta \frac{S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t)$$

$$\dot{R}(t) = \gamma I(t)$$

Sommando le tre equazioni si ottiene

$$\dot{S}(t) + \dot{I}(t) + \dot{R}(t) = 0$$

per cui si ha

$$S(t) + I(t) + R(t) = \text{cost} = N$$

Come detto, la numerosità della popolazione totale non varia nel tempo e di conseguenza la numerosità dei rimossi è data da $R(t) = N - S(t) - I(t)$. Dunque, è possibile ridursi a studiare le soluzioni delle sole due prime equazioni differenziali nell'insieme \mathcal{J} descritto da

$$0 \leq S(0) + I(0) \leq N$$

Di tale sistema è immediato trovare alcune soluzioni:

1. $S(t) = 0$ e $I(t) = I(0)e^{-\gamma t}$, per $0 < I(0) \leq N$;
2. $I(t) = 0$ e $S(t) = S(0)$, per $0 \leq S(0) \leq N$.

La prima soluzione corrisponde al caso in cui non ci siano suscettibili. In questo caso, la traiettoria giace sull'asse positivo delle ordinate e mostra come gli infettivi tendano tutti a guarire, cioè il loro numero tende a zero, con andamento esponenziale. La seconda soluzione corrisponde invece al caso in cui non siano presenti infettivi. In questo caso, le soluzioni, al variare di $S(0)$, corrispondono ad infiniti punti di equilibrio. Le due soluzioni formano, al variare di $S(0)$ e $I(0)$, parte del bordo dell'insieme \mathcal{J} che risulta essere ovviamente un insieme invariante per il sistema.

Per capire come siano fatte le traiettorie del sistema, si studi il segno di \dot{S} e \dot{I} in \mathcal{J} . Poiché

$$\dot{S}(t) = -\beta \frac{S(t)I(t)}{N} < 0 \quad \text{per } S(t), I(t) > 0$$

si ha che il numero di suscettibili, per $S(t) > 0$, decresce fino a raggiungere, sul lungo periodo, un valore costante S_∞ quando il numero di infettivi è zero. Inoltre, poiché

$$\dot{I}(t) = \left(\beta \frac{S(t)}{N} - \gamma \right) I(t) = \frac{\gamma}{N} (\sigma S(t) - N) I(t)$$

il numero di infettivi, per $I(t) > 0$, cresce se $\sigma S(t) > N$ e decresce se $\sigma S(t) \leq N$. Se quindi $\sigma S(0) \leq N$, allora poiché $\sigma S(t) \leq \sigma S(0) \leq N$, il numero di infettivi decresce fino a tendere zero sul lungo periodo. Se invece $\sigma S(0) > N$, il numero di infettivi cresce fino ad un valore massimo I_{max} che si ha quando $\sigma S(t) = N$ e poi decresce sul lungo periodo fino a zero.

La Figura 44 illustra i due casi possibili che si hanno a seconda che σ sia maggiore o minore di 1. Nel primo caso la regione \mathcal{J} è divisa in due regioni I e II. Le traiettorie del sistema passano dalla I alla II

regione raggiungendo il valore massimo in corrispondenza di $S = N/\sigma$. Le traiettorie tendono poi all'asse delle ascisse. Nel secondo caso, le traiettorie tendono direttamente all'asse ascisse.

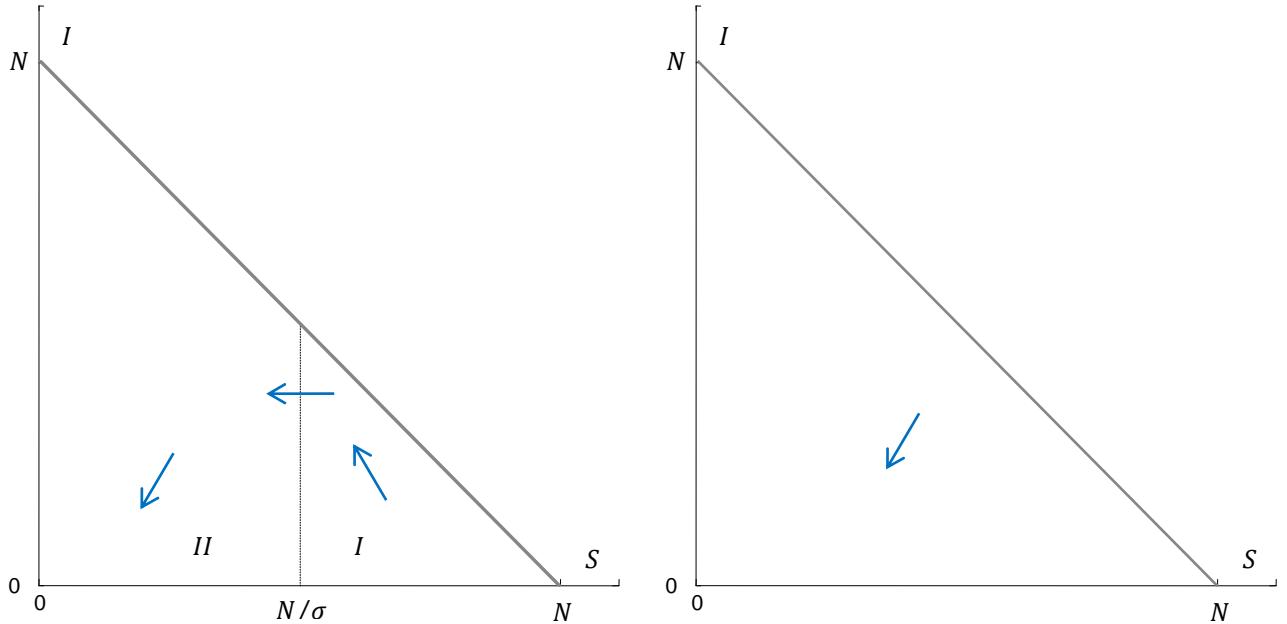


Figura 44 : Studio qualitativo delle traiettorie del modello SIR nel caso in cui $\sigma > 1$ (a sinistra) e $\sigma \leq 1$ (a destra).

Per calcolare un integrale primo del sistema si scriva il rapporto \dot{I}/\dot{S} . Si ottiene

$$\frac{\dot{I}(t)}{\dot{S}(t)} = \frac{dI(t)}{dS(t)} = \frac{\beta \frac{S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t)}{-\beta \frac{S(t)I(t)}{N}} = -1 + \frac{N-1}{\sigma S(t)}$$

da cui si ricava

$$dI(t) = -dS(t) + \frac{N}{\sigma} \frac{dS(t)}{S(t)}$$

Integrando entrambi i membri si ha infine

$$I(t) + S(t) - \frac{N}{\sigma} \ln(S(t)) = I(0) + S(0) - \frac{N}{\sigma} \ln(S(0)) = \text{cost}$$

La funzione

$$V(S, I) \stackrel{\text{def}}{=} I + S - \frac{N}{\sigma} \ln(S)$$

rimane costante, e pari al suo valore iniziale, lungo le traiettorie del sistema. Tale funzione è dunque un integrale primo del sistema e le sue curve di livello corrispondono alle traiettorie del sistema. Alcune traiettorie sono mostrate in Figura 45 mentre in Figura 46 sono riportati l'andamento del numero dei suscettibili e del numero degli infettivi nel caso in cui σ sia maggiore di 1.

A questo punto è possibile calcolare sia il valore di S_∞ che di I_{max} . Il valore di S_∞ corrisponde al valore di lungo periodo di $S(t)$ e si ha quando $I(t)$ tende a zero. Tale valore, inoltre è sicuramente

minore di N/σ . Dall'espressione di $V(S, I)$ si ha quindi che S_∞ è la radice in $(0, N/\sigma)$ dell'equazione

$$I(0) + S(0) - S_\infty + \frac{N}{\sigma} \ln \left(\frac{S_\infty}{S(0)} \right) = 0$$

Il valore di I_{max} si ha, nel caso in cui $\sigma S(0) > N$, quando $\sigma S(t) = N$. Dall'espressione di $V(S, I)$ si ha quindi che

$$I_{max} = I(0) + S(0) - \frac{N}{\sigma} - \frac{N}{\sigma} \ln \left(\frac{\sigma S(0)}{N} \right)$$

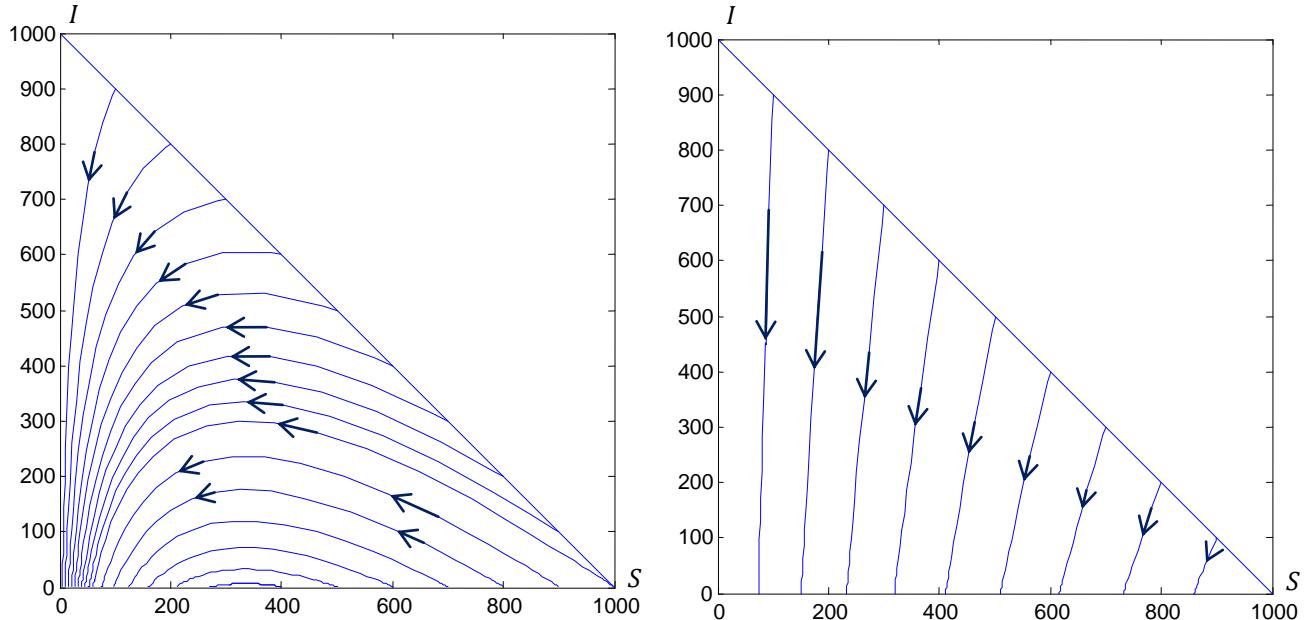


Figura 45 : Traiettorie del modello SIR per $N = 1000$ e $\beta = 0,6, \gamma = 0,2$ (a sinistra), $\beta = 0,2, \gamma = 0,6$ (a destra).

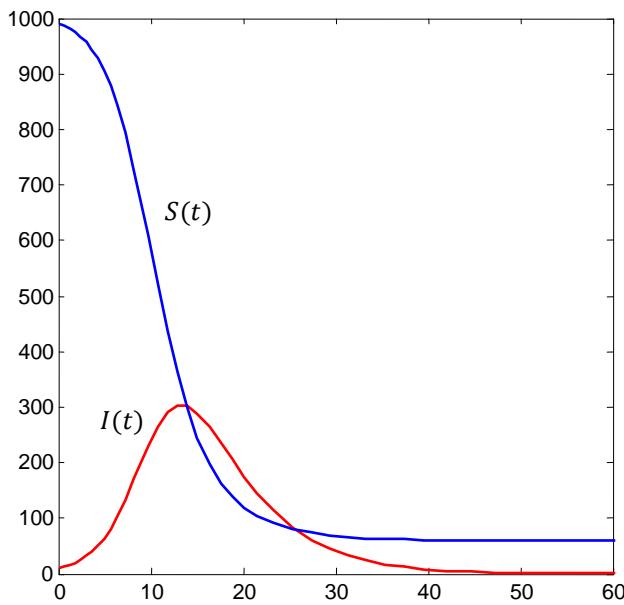


Figura 46 : Andamento del numero dei suscettibili e degli infettivi per il modello SIR quando $N = 1000$, $S(0) = 990$, $I(0) = 10$, $\beta = 0,6$ e $\gamma = 0,2$.

In conclusione, il modello SIR rappresenta una malattia che esplode a causa di pochi individui infettivi iniziali per poi esaurirsi al passare del tempo. Tali malattie vengono denominate epidemiche.

IL MODELLO SIS

Se l'infezione non si conclude con l'immunizzazione, allora le equazioni che descrivono come variano le numerosità dei suscettibili e degli infettivi sono le seguenti

$$\dot{S}(t) = -\beta \frac{S(t)I(t)}{N} + \gamma I(t)$$

$$\dot{I}(t) = \beta \frac{S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t)$$

Anche in questo caso, sommando le due equazioni si vede che la numerosità della popolazione totale non varia nel tempo. Di conseguenza la numerosità dei rimossi dei suscettibili è data da $S(t) = N - I(t)$ ed è possibile ridursi a studiare le soluzioni della sola seconda equazione differenziale

$$\dot{I}(t) = \beta \frac{(N - I(t))I(t)}{N} - \gamma I(t) = (\beta - \gamma)I(t) - \frac{\gamma}{N}I^2(t)$$

per $0 \leq I(0) \leq N$.

Nel caso in cui $\beta = \gamma$, allora l'equazione si riduce a

$$\dot{I}(t) = -\frac{\gamma}{N}I^2(t)$$

Si ha quindi

$$\frac{dI(t)}{I^2(t)} = -\frac{\gamma}{N}dt$$

ed integrando ambo i membri si ottiene

$$I(t) = \frac{NI(0)}{\gamma I(0)t + N}$$

Nel caso invece in cui $\beta \neq \gamma$, allora si ha che la soluzione è

$$I(t) = \frac{NI(0)(\beta - \gamma)e^{(\beta - \gamma)t}}{\beta I(0)e^{(\beta - \gamma)t} + N(\beta - \gamma)}$$

Dalle precedenti espressioni, segue immediatamente che nel caso in cui il numero di contatto σ sia maggiore di 1, il numero degli infettivi tende sul lungo periodo al valore $N(1 - 1/\sigma)$. Nel caso invece in cui il numero di contatto σ sia minore o uguale ad 1, il numero degli infettivi tende a zero sul lungo periodo. In Figura 48 viene riportato l'andamento del numero degli infettivi nel caso in cui σ sia maggiore di 1. Come la figura mette in evidenza, sul lungo periodo è presente costantemente un numero non nullo di infettivi. Una malattia con tale caratteristica viene detta endemica.

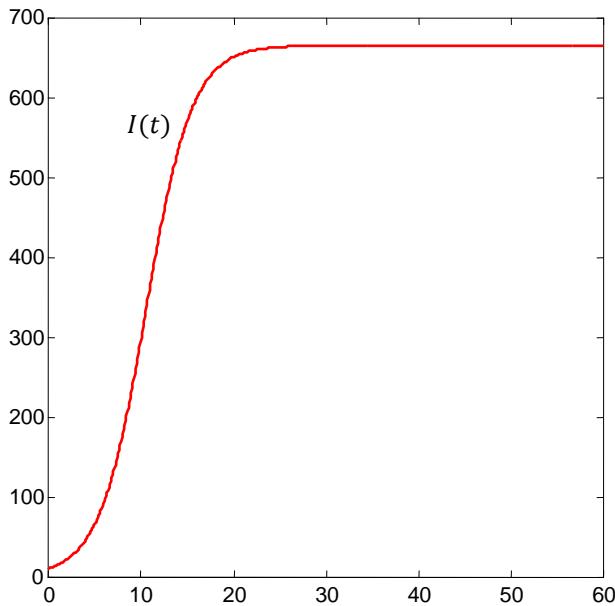


Figura 48 : Andamento del numero degli infettivi per il modello SIS quando $N = 1000$, $I(0) = 10$, $\beta = 0,6$ e $\gamma = 0,2$.

I modelli epidemiologici sono stati usati anche in economia per descrivere la compravendita di azioni in borsa. Più nel dettaglio si è cercato di descrivere come una parte delle compravendite effettuate da ogni singolo investitore dipendano dai suoi rapporti sociali. In effetti gli investitori dedicano una parte sostanziale del loro tempo libero a discutere dei loro investimenti ed informarsi sull'andamento delle azioni in possesso di altri investitori di loro conoscenza. E' quindi possibile ipotizzare che gli investitori in possesso di azioni che essi reputano promettenti/deludenti tendano ad influenzare altri investitori fino a spingerli a comprare/vendere le stesse azioni. Questo tipo di influenza può essere modellata mediante un modello SIR in cui la popolazione di suscettibili corrisponde agli investitori in borsa che non possiedono determinate azioni mentre la popolazione di infettivi è la popolazione di investitori in possesso di almeno una azione. Come nel modello SIR, il tasso di acquisto/vendita delle azioni, cioè il tasso di crescita dell'infezione, è proporzionale al prodotto tra il numero di investitori "infettivi" e il numero di investitori "suscettibili", diviso per il numero totale di investitori attivi. Il coefficiente di proporzionalità rappresenta quindi una misura della sensibilità delle compravendite del singolo investitore all'influenza dei suoi rapporti sociali.

Il modello è stato validato sui dati delle compravendite giornaliere in Finlandia dal 1995 al 2003 mostrando che l'influenza dei rapporti sociali permette di migliorare significativamente la previsione delle compravendite dei singoli investitori per ognuna delle 20 azioni con maggior movimenti azionari (Nokia, Sonera, Elektrobit,...).

STUDIO DI UN CASO: LE STAGIONI INFLUENZALI IN ITALIA

L'influenza è una malattia respiratoria acuta dovuta alla infezione da virus. È una malattia stagionale che, nell'emisfero occidentale, si verifica durante il periodo invernale. Il primo isolamento di virus influenzale nell'uomo risale al 1933 in Inghilterra anche se, in precedenza, erano stati isolati virus influenzali sia da polli che da suini. Da allora, sono stati identificati tre tipi differenti di virus influenzali, costituenti il genere Orthomixovirus: i virus di tipo A e di tipo B,

responsabili della sintomatologia influenzale classica, e il virus di tipo C, di scarsa rilevanza clinica poiché generalmente asintomatico.

I virus di tipo A possono infettare sia l'uomo che varie specie animali: suini, equini, uccelli selvatici e domestici (anatre, polli, tacchini) e mammiferi marini (balene, delfini, foche). Tali virus sono ulteriormente suddivisi in sottotipi, distinti in base alle differenze tra le proteine di superficie: emagglutinina (H) e neuramminidasi (N), verso le quali si indirizza la risposta immunitaria dei soggetti infettati o vaccinati. Ad oggi sono stati identificati 15 sottotipi di emagglutinina e 9 di neuramminidasi. I virus di tipo B sono presenti solo nell'uomo e non esistono sottotipi distinti nell'ambito delle loro proteine di superficie. I virus di tipo C, come già detto, danno una infezione generalmente asintomatica o simile al raffreddore comune.

Nella Tabella 5 vengono riportati i risultati nazionali della sorveglianza epidemiologica della sindrome influenzale dalla stagione 2003–2004 fino alla stagione 2009–2010. Tali risultati sono espressi come incidenze, cioè numero di casi osservati ogni 1000 assistiti per settimana e si riferiscono sempre ai nuovi casi insorti durante la settimana di riferimento. Per sapere quanti casi $d(k)$ di sindrome influenzale si sono verificati in Italia nella k -esima settimana è necessario moltiplicare il numero di casi osservati in quella settimana (rilevabile dalla tabella nella colonna incidenza) per 60000. Il calcolo è una semplice proporzione in cui la popolazione italiana N è stimata attorno ai 60 milioni di individui. Ad esempio se l'incidenza fosse di 7 per 1000, in Italia ci sarebbero circa 420000 sindromi influenzali (cioè 7×60000).

Stagione 2003-2004	Stagione 2004-2005	Stagione 2005-2006	Stagione 2006-2007	Stagione 2007-2008	Stagione 2008-2009	Stagione 2009-2010							
incidenza													
2003-42	0,36	2004-42	0,25	2005-42	0,26	2006-42	0,26	2007-42	0,19	2008-42	0,28	2009-33	0,17
2003-43	0,47	2004-43	0,37	2005-43	0,28	2006-43	0,27	2007-43	0,32	2008-43	0,27	2009-34	0,17
2003-44	0,52	2004-44	0,29	2005-44	0,31	2006-44	0,26	2007-44	0,26	2008-44	0,32	2009-35	0,25
2003-45	0,6	2004-45	0,37	2005-45	0,37	2006-45	0,43	2007-45	0,41	2008-45	0,43	2009-36	0,29
2003-46	0,59	2004-46	0,46	2005-46	0,48	2006-46	0,51	2007-46	0,51	2008-46	0,48	2009-37	0,37
2003-47	0,7	2004-47	0,64	2005-47	0,65	2006-47	0,53	2007-47	0,61	2008-47	0,62	2009-38	0,47
2003-48	0,64	2004-48	0,65	2005-48	0,73	2006-48	0,59	2007-48	0,79	2008-48	0,76	2009-39	0,74
2003-49	0,8	2004-49	0,78	2005-49	0,72	2006-49	0,65	2007-49	0,89	2008-49	0,89	2009-40	1,05
2003-50	0,99	2004-50	0,84	2005-50	0,91	2006-50	0,9	2007-50	1,2	2008-50	1,15	2009-41	1,48
2003-51	1,3	2004-51	1,24	2005-51	1,03	2006-51	1,11	2007-51	1,89	2008-51	1,56	2009-42	1,76
2003-52	1,32	2004-52	1,78	2005-52	1,19	2006-52	1,62	2007-52	2,92	2008-52	2	2009-43	4,5
2004-01	1,71	2004-53	2,9	2006-01	1,28	2007-01	1,81	2008-01	4,56	2009-01	3,18	2009-44	9,31
2004-02	2,17	2005-01	3,49	2006-02	1,56	2007-02	2,23	2008-02	5,98	2009-02	4,4	2009-45	12,65
2004-03	2,82	2005-02	5,07	2006-03	1,83	2007-03	3,11	2008-03	6,54	2009-03	6,28	2009-46	12,92
2004-04	3,67	2005-03	7,89	2006-04	2,05	2007-04	4,67	2008-04	6,95	2009-04	8,23	2009-47	11,03
2004-05	4,4	2005-04	11,34	2006-05	2,3	2007-05	6,21	2008-05	7,21	2009-05	7,64	2009-48	6,72
2004-06	4,83	2005-05	13,73	2006-06	2,45	2007-06	7,57	2008-06	6,95	2009-06	6,64	2009-49	3,76
2004-07	4,75	2005-06	14,59	2006-07	2,51	2007-07	7,69	2008-07	6,61	2009-07	5,13	2009-50	2,25
2004-08	4,62	2005-07	12,72	2006-08	2,58	2007-08	6,48	2008-08	6,32	2009-08	4,17	2009-51	1,84
2004-09	4	2005-08	9,51	2006-09	2,6	2007-09	4,63	2008-09	5,62	2009-09	3,74	2009-52	1,32
2004-10	3,56	2005-09	6,9	2006-10	2,52	2007-10	3,11	2008-10	4,13	2009-10	2,91	2009-53	1,29
2004-11	3,29	2005-10	4,95	2006-11	2,68	2007-11	2,24	2008-11	2,75	2009-11	2,15		
2004-12	2,74	2005-11	3,42	2006-12	2,7	2007-12	1,78	2008-12	1,92	2009-12	1,73		
2004-13	2,15	2005-12	2,05	2006-13	2,25	2007-13	1,36	2008-13	1,34	2009-13	1,44		
2004-14	1,68	2005-13	1,19	2006-14	1,74	2007-14	0,92	2008-14	0,97	2009-14	1,16		
2004-15	1,2	2005-14	0,9	2006-15	1,14	2007-15	0,71	2008-15	0,68	2009-15	0,76		
2004-16	0,77	2005-15	0,65	2006-16	0,74	2007-16	0,55	2008-16	0,48	2009-16	0,58		
2004-17	0,6	2005-16	0,48	2006-17	0,48	2007-17	0,31	2008-17	0,31	2009-17	0,49		

Tabella 5 : Incidenza dell'influenza in Italia dal 2003 al 2010.

E' importante notare che i dati non corrispondono al numero di infettivi settimanali ma solo al numero di nuovi casi verificatesi durante la settimana. Per determinare quali siano le caratteristiche

di ogni stagione influenzale è possibile utilizzare il modello SIR precedentemente illustrato ed in particolare ricordare che vale la seguente espressione

$$I(0) + S(0) - S_\infty + \frac{N}{\sigma} \ln \left(\frac{S_\infty}{S(0)} \right) = 0$$

dove S_∞ è il numero di suscettibili rimasti alla fine della stagione influenzale. Assumendo che inizialmente non siano presenti rimossi, allora $I(0) + S(0) = N$ e $S(0) \cong N$; inoltre il numero S_∞ di suscettibili rimasti a fine stagione può essere approssimato (per eccesso) sottraendo alla popolazione inizialmente suscettibile, pari ad N , il numero di tutti gli individui che hanno contratto il virus, cioè:

$$S_\infty \cong N - \sum_k d(k)$$

Di conseguenza, si ottiene

$$\sigma \cong \frac{N}{\sum_k d(k)} \ln \left(\frac{N}{N - \sum_k d(k)} \right)$$

Applicando la precedente formula alle stagioni influenzali in Italia si ottengono i risultati riportati in Tabella 6.

Stagione	2003-2004	2004-2005	2005-2006	2006-2007	2007-2008	2008-2009	2009-2010
σ	1,0296	1,0589	1,0206	1,0325	1,0418	1,0362	1,0390

Tabella 6: Numero di contatto delle stagioni influenzali in Italia dal 2003 al 2010.

STUDIO DI UN CASO: UNA EPIDEMIA IN UN COLLEGIO

Si consideri il caso dell'epidemia influenzale verificatasi in un collegio maschile nel nord dell'Inghilterra durante la quale sono stati contati, ogni giorno, il numero di ragazzi costretti a letto dalla malattia. Il numero totale di ragazzi nel collegio era di 763 ed inizialmente era presente un solo caso di infezione. Assumendo che i ragazzi allettati coincidano con i ragazzi infettivi, la Tabella 7 riassume il numero giornaliero $d(k)$ di infettivi così come ricavati dal grafico a pagina 587 del British Medical Journal del 4 Marzo 1978.

Giorno	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Numero infettivi	1	3	7	25	72	222	282	256	233	189	123	70	25	11	4

Tabella 7: Numero giornaliero di infettivi.

Per determinare quali siano le caratteristiche dell'influenza è possibile utilizzare il modello SIR precedentemente illustrato e scegliere il valore dei parametri β e γ in modo tale che il numero di infettivi $I(t)$ determinato dal modello approssimi “al meglio” i dati riportati nella Tabella 5. Questo può essere fatto mediante il metodo dei minimi quadrati una volta noto, in funzione dei parametri β e γ , l'andamento di $I(t)$. Tale andamento non è però esprimibile in forma analitica per cui è

necessario calcolarlo in modo numerico. Per fare ciò si approssimino le derivate $\dot{S}(t)$ e $\dot{I}(t)$ con la differenza in avanti (metodo di Eulero)

$$\dot{S}(t) \cong \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} \quad \dot{I}(t) \cong \frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t}$$

per Δt sufficientemente “piccolo”. Si ha quindi che le soluzioni $S(t)$ e $I(t)$ delle equazioni differenziali che descrivono l’andamento del numero di suscettibili ed infettivi sono approssimate, agli istanti di tempo $t = k \cdot \Delta t$, dalle sequenze $S(k)$ e $I(k)$ ottenute iterativamente utilizzando il seguente sistema di equazioni alle differenze

$$\begin{aligned} S(k + 1) &= S(k) - \beta \Delta t \frac{S(k)I(k)}{N} \\ I(k + 1) &= I(k) + \beta \Delta t \frac{S(k)I(k)}{N} - \gamma \Delta t I(k) \end{aligned}$$

Nota la numerosità totale della popolazione studentesca, $N = 763$, e le condizioni iniziali $S(0) = 762$ e $I(0) = 1$ è quindi possibile calcolare il numero di suscettibili e infettivi agli istanti di tempo $t = k \cdot \Delta t$ in funzione dei soli valori di β , γ . E’ dunque possibile confrontare i valori del numero di infettivi $I(k)$, per diversi valori dei parametri β e γ , con i valori $d(k)$ e scegliere di conseguenza i valori “migliori” di β e γ . Per fare questo bisogna tenere conto che i dati $d(k)$ sono su base giornaliera mentre la sequenza $I(k)$ è calcolata sulla base dell’intervallo di tempo $\Delta t < 1$ giorno. Bisogna quindi scegliere i valori di β e γ che rendono minima la seguente somma dei quadrati degli errori (metodo dei minimi quadrati con distanza verticale)

$$\min_{\beta, \gamma} \sum_{k=0}^{15} (I(k) - d(k))^2$$

dove $h \cdot \Delta t = k$. Questo può essere facilmente fatto mediante un calcolatore; si veda ad esempio in Figura 49 il programma Matlab® per il calcolo dei parametri ottimi nel quale si è scelto un intervallo di tempo Δt pari a 15 minuti, cioè pari a $1/96$ di giorno.

Il valore ottimo dei parametri ottenuto mediante l’esecuzione del programma risulta essere $\beta = 1,671 \text{ giorni}^{-1}$ e $\gamma = 0,454 \text{ giorni}^{-1}$ da cui si ricava immediatamente che il numero di contatto dell’influenza è $\sigma = 3,68$ e che la durata media della malattia è pari a $\tau = 1/\gamma = 2,2$ giorni. Questi risultati sono in linea con le caratteristiche generali di una sindrome influenzale che, usualmente ha un numero di contatto compreso tra 2 e 4 ed una durata compresa tra 2 e 3 giorni. In Figura 50 viene confrontato l’andamento del numero di infettivi $I(t)$ ottenuto mediante il modello SIR, una volta determinati i parametri ottimi, e il numero giornaliero di ragazzi allettati.

```

d = [1 3 7 25 72 222 282 256 233 189 123 70 25 11 4];
min_err = 10^6;
N = 763;
S(1) = 762;
I(1) = 1;
dt = 1/96;
h = 1:96:96*(length(d)-1)+1;
for gamma = 0.43:0.001:0.46;
    for beta = 1.66:0.001:1.68;
        for k = 1:96*(length(d)-1)
            S(k+1) = S(k) - beta*dt*S(k)*I(k)/N;
            I(k+1) = I(k) + beta*dt*S(k)*I(k)/N - gamma*dt*I(k);
        end
        err = [I(h)-d]*[I(h)-d]';
        if err < min_err
            gamma_opt = gamma;
            beta_opt = beta;
            min_err = err;
        end
    end
end

```

Figura 49 : Programma Matlab® per la stima dei parametri β e γ nel caso della epidemia influenzale considerata.

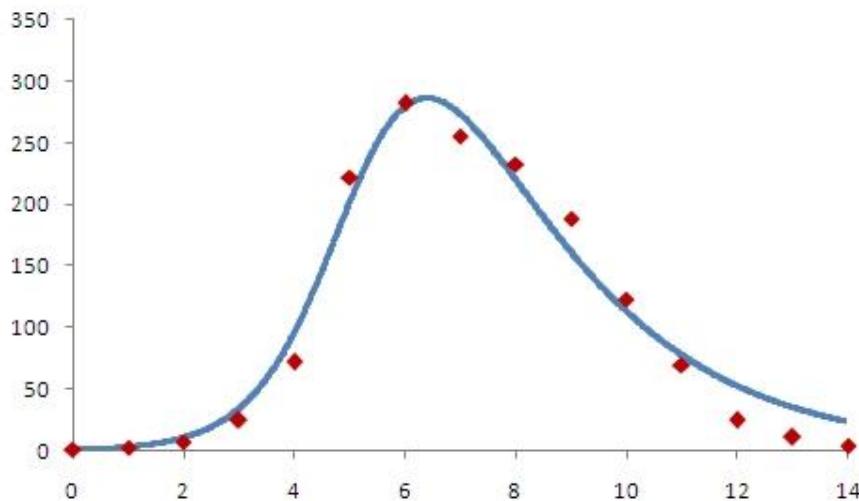


Figura 50 : Andamento del numero degli infettivi stimato mediante il modello SIR (—) e dati rilevati (◆).

STUDIO DI UN CASO: LA PESTE DI EYAM

Il villaggio di Eyam vicino Sheffield, in Inghilterra, fu colpito nel 1665-1666 da una epidemia di peste bubbonica il cui virus arrivò da Londra tramite alcuni vestiti nella casa del sarto del villaggio George Vicars. I vestiti erano umidi e quindi furono stesi ad asciugare all'aperto rilasciando nel villaggio le pulci portatrici del virus. Il sarto fu la prima vittima della peste e morì il 7

settembre 1665. Quando la malattia iniziò a decimare la popolazione, il parroco convinse la popolazione ad autoconfinarsi nel villaggio in modo da evitare il diffondersi della malattia nei villaggi vicini. La peste durò 14 mesi e sopravvissero solamente 77 persone delle 350 inizialmente presenti nel villaggio (altre fonti riportano invece che sopravvissero 83 persone). Nei registri parrocchiali del paese è disponibile la lista accurata delle date di morte degli abitanti. Da tale lista si deduce che la malattia ebbe due esplosioni la prima delle quali fu più leggera. Probabilmente, nella prima fase, la trasmissione del virus avvenne unicamente tramite le pulci infette mentre, nella seconda fase, la trasmissione divenne diretta e la peste si trasformò nella più mortale peste polmonare. Nella Tabella 8 sono riportati i dati relativi a questa seconda fase relativa al periodo che va da metà Giugno a fine di Ottobre del 1666. Nel dettaglio, nella tabella viene riportato, ogni 15 giorni, il numero cumulativo $d(k)$ di decessi avvenuti a partire dal 19 Giugno 1666.

Data	Totale decessi
4 Luglio	11
19 Luglio	37
3 Agosto	76
18 Agosto	117
2 Settembre	142
17 Settembre	154
2 Ottobre	165
17 Ottobre	—
1 Novembre	183

Tabella 8: Numero di morti per la peste ad Eyam a partire dal 19 Giugno 1666.

Inoltre, assumendo una durata media del contagio di circa 11 giorni, si può dedurre dalla lista, il 19 Giugno la popolazione totale era di $N = 261$ abitanti ed era composta da $S(0) = 261$ suscettibili e $I(0) = 7$ infettivi. Per determinare le caratteristiche del contagio è possibile utilizzare il modello SIR precedentemente illustrato ed in particolare ricordare che vale la seguente espressione

$$I(0) + S(0) - S_\infty + \frac{N}{\sigma} \ln \left(\frac{S_\infty}{S(0)} \right) = 0$$

da cui si ricava immediatamente che

$$\sigma = \frac{N}{I(0) + S(0) - S_\infty} \ln \left(\frac{S(0)}{S_\infty} \right)$$

Ponendo $S_\infty = 77$ si ottiene quindi $\sigma = 1,732$.

E' possibile inoltre determinare i valori dei parametri del modello SIR considerando che, in questo caso, i rimossi coincidono con le persone decedute a causa della peste. E' quindi necessario considerare anche la variabile $R(t)$ proprio perché è quella di cui si hanno a disposizione le misure. Il modello tempo discreto da considerare è descritto dalle seguenti equazioni alle differenze

$$S(k+1) = S(k) - \beta \Delta t \frac{S(k)I(k)}{N}$$

$$I(k+1) = I(k) + \beta \Delta t \frac{S(k)I(k)}{N} - \gamma \Delta t I(k)$$

$$R(k+1) = R(k) + \gamma \Delta t I(k)$$

e i valori ottimi dei parametri β e γ sono quelli che rendono minima la seguente somma dei quadrati degli errori (metodo dei minimi quadrati con distanza verticale)

$$\min_{\beta, \gamma} \sum_{k=0}^{15} (R(h) - d(k))^2$$

dove $h \cdot \Delta t = 15 \cdot k$. Scegliendo un intervallo di tempo Δt pari a 1 ora, cioè pari a $1/24$ di giorno e mediante il programma Matlab® mostrato in Figura 51 si ottengono i seguenti valori ottimi per i parametri: $\beta = 0,1471$ giorni $^{-1}$ e $\gamma = 0,0879$ giorni $^{-1}$. Si ricava immediatamente che il numero di contatto dell'epidemia è $\sigma = 1,674$ e che la durata media della malattia è pari a $\tau = 1/\gamma = 11,4$ giorni. Si noti come il valore del numero di contatto ottenuto è molto simile a quello precedentemente calcolato e la stima della durata media della malattia abbia un valore del tutto in linea con le caratteristiche note del decorso della peste.

```

d = [11 37 76 117 142 154 165 183];
min_err = 1000;
N = 261;
I(1) = 7;
S(1) = 254;
R(1) = 0;
dt=1/24;
h = [361 721 1081 1441 1801 2161 2521 3241];
for gamma = 0.08:0.00001:0.09;
  for beta = 0.14:0.0001:0.15;
    for k = 1:24*15*(length(d)+1)
      S(k+1) = S(k) - dt*beta*S(k)*I(k)/N;
      I(k+1) = I(k) + dt*beta*S(k)*I(k)/N - dt*gamma*I(k);
      R(k+1) = R(k) + dt*gamma*I(k);
    end
    err = [R(h)-d]*[R(h)-d]';
    if err < min_err
      gamma_opt = gamma;
      beta_opt = beta;
      min_err = err;
    end
  end
end

```

Figura 51: Programma Matlab® per la stima dei parametri β e γ nel caso della peste di Eyam.

In Figura 52 viene confrontato l'andamento del numero di rimossi $R(t)$ ottenuto mediante il modello SIR, una volta determinati i parametri ottimi, e il numero cumulativo di decessi $d(k)$ della Tabella 8.

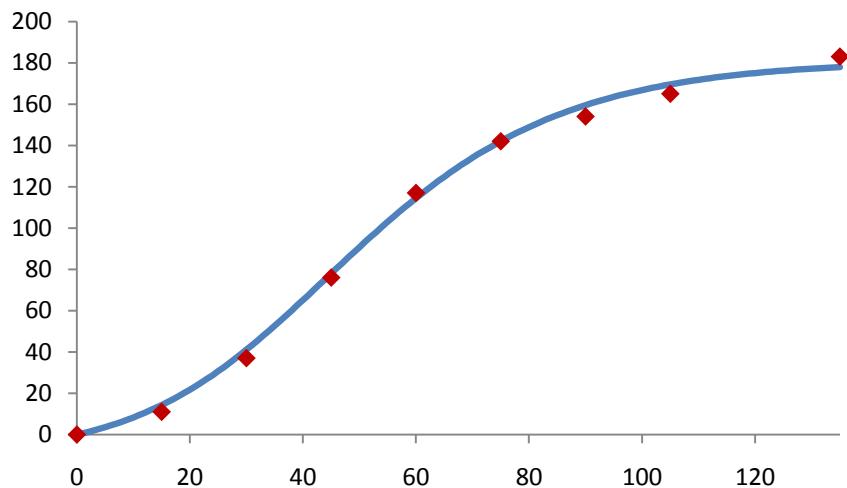


Figura 52 : Andamento del numero dei rimossi stimato mediante il modello SIR (—) e dati rilevati (◆).

BIBLIOGRAFIA

- Gause, G.F. (1934). *The Struggle for Existence*. Baltimore: Williams and Wilkins.
- Rhodes, E.C. (1940). Population mathematics III. *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 103, No. 3, pp. 362-387.
- Leslie, P.H. (1957). An analysis of the data for some experiments carried out by Gause with populations of the protozoa, *Paramecium Aurelia* and *Paramecium Caudatum*. *Biometrika*, Vol. 44, No. 3-4, pp. 314-327.
- Hale, J. and Koçak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. New York: Springer-Verlag.
- Dendrinos D. (1992). *The dynamics of cities: ecological determinism, dualism and chaos*. New York: Routledge.
- Li, T.Y. and Yorke, J. (1975). Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 82, No. 10, pp. 985-992.
- Sharkovskii, A.N. (1964). Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself. *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 16, No. 1, pp. 61-71.
- Hofbauer, J. and Sigmund K. (1988). *The Theory of Evolution and Dynamical Systems*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Aoki M. and Yoshikawa H. (2002). Demand saturation-creation and economic growth. *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol. 48, pp. 127-154.
- Luenberger, D.G. (1979). *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Kermack, W.O. and McKendrick, A.G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society*, A. 115, pp. 700-721.
- Bernoulli, D. (1766). Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et les avantages de l'inoculation pour la prévenir. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Année 1760.
- Iannelli M. (2009) *Introduzione alla teoria matematica delle popolazioni*. Appunti del corso di Biomatematica, Università di Trento.
- Hethcote H.W. (2000) The mathematics of infectious diseases. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, Vol. 42, No. 4, pp 599-653.

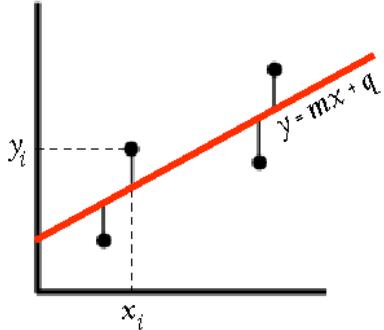
APPENDICE

IL METODO DEI MINIMI QUADRATI con scostamento verticale

Si considerino due variabili x e y legate da una relazione lineare

$$y = mx + q$$

Se si misurano N coppie di valori (x_i, y_i) delle due variabili, ciascun punto di coordinate (x_i, y_i) dovrebbe giacere sulla suddetta retta. Nella realtà, ogni misura è affetta da un errore per cui i punti non saranno allineati. Per calcolare quale sia la relazione lineare fra le variabili a partire dalle N misure (x_i, y_i) è quindi necessario trovare la linea retta che meglio si “adatta” alle misure. Per trovare tale retta si ricorre ad un metodo che prende il nome di metodo dei minimi quadrati. Facciamo inizialmente l’ipotesi semplificativa che le misure x_i siano affette da un errore trascurabile rispetto a quello relativo alle misure y_i . Il metodo prevede che la retta “migliore” sia quella che si discosta il meno possibile da tutti i punti (x_i, y_i) . Poiché l’errore sulle misure x_i è trascurabile, allora lo scostamento che si considera per ogni punto è quello parallelo all’asse delle ordinate, e cioè



$$y_i - mx_i - q$$

come mostrato nella figura a sinistra. Inoltre, per evitare che gli scostamenti negativi si sottraggano a quelli positivi si considera il loro quadrato. La retta che meno si discosta dai punti (x_i, y_i) è quindi quella caratterizzata dai parametri m e q per cui si ha il minimo della somma dei quadrati di tutti gli scostamenti, e cioè

$$\min_{m,q} \sum_{i=1}^N (y_i - mx_i - q)^2 = \min_{m,q} E(y_i, x_i, m, q)$$

Per trovare i valori ottimi di m e q basta porre uguali a zero le derivate della funzione $E(y_i, x_i, m, q)$ rispetto a m e q :

$$\frac{\partial E(y_i, x_i, m, q)}{\partial m} = -2 \sum_{i=1}^N x_i \cdot (y_i - mx_i - q) = 0$$

$$\frac{\partial E(y_i, x_i, m, q)}{\partial q} = -2 \sum_{i=1}^N (y_i - mx_i - q) = 0$$

Dalla seconda equazione si ottiene che la retta “ottima” passa per il punto che ha come coordinate le medie delle misure, e cioè

$$q = \bar{y} - m\bar{x}$$

dove

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

La prima equazione può quindi essere risolta e si ottiene

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - N \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^N x_i^2 - N \bar{x}^2}$$

Il metodo dei minimi quadrati, introdotto supponendo una relazione lineare tra le due variabili x e y , può essere applicato in modo più generale anche se si suppone che la relazione tra le due variabili sia una relazione non lineare descritta dalla funzione

$$y = f(x, p_1, \dots, p_n)$$

dipendente da n parametri p_1, \dots, p_n . In questo caso si vogliono determinare i valori dei parametri in corrispondenza dei quali la curva meglio “approssima” i punti. Tali valori sono quelli per cui si ha il minimo della somma dei quadrati di tutti gli scostamenti dei punti (x_i, y_i) dalla funzione $f(x_i, p_1, \dots, p_n)$, e cioè

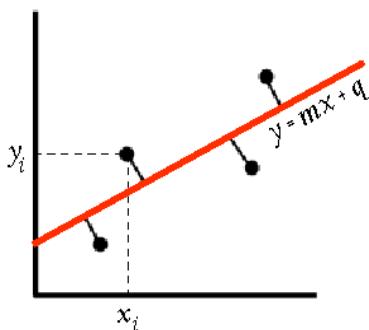
$$\min_{p_1, \dots, p_n} \sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i, p_1, \dots, p_n))^2 = \min_{p_1, \dots, p_n} E(y_i, x_i, p_1, \dots, p_n)$$

I valori dei parametri si ottengono risolvendo il sistema di equazioni:

$$\frac{\partial E(y_i, x_i, p_1, \dots, p_n)}{\partial p_1} = \dots = \frac{\partial E(y_i, x_i, p_1, \dots, p_n)}{\partial p_n} = 0$$

In pratica la soluzione di tale sistema di equazioni può essere assai laboriosa a seconda della particolare forma della funzione. Di solito quindi, non si usano metodi analitici ed il minimo viene determinato numericamente con l'utilizzo di appositi programmi fatti operare al computer.

IL METODO DEI MINIMI QUADRATI con scostamento perpendicolare



Nel caso in cui l'errore delle misure x_i non sia trascurabile rispetto a quello relativo alle misure y_i , allora la retta che meglio si “adatta” alle misure è quella che minimizza la somma dei quadrati delle distanze di ogni punto dalla retta, e cioè

$$\min_{m, q} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - mx_i - q)^2}{1 + m^2} = \min_{m, q} E(y_i, x_i, m, q)$$

come mostrato nella figura a sinistra. Anche in questo caso, per trovare i valori ottimi di m e q basta porre uguali a zero le derivate della funzione $E(y_i, x_i, m, q)$ rispetto a m e q :

$$\frac{\partial E(y_i, x_i, m, q)}{\partial m} = -\frac{2}{1+m^2} \sum_{i=1}^N x_i \cdot (y_i - mx_i - q) - 2m \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - mx_i - q)^2}{(1+m^2)^2} = 0$$

$$\frac{\partial E(y_i, x_i, m, q)}{\partial q} = -\frac{2}{1+m^2} \sum_{i=1}^N (y_i - mx_i - q) = 0$$

Come in precedenza, dalla seconda equazione, si ottiene che la retta “ottima” passa per il punto che ha come coordinate le medie delle misure, è cioè

$$q = \bar{y} - m\bar{x}$$

La prima equazione può quindi essere risolta e si ottiene che il valore “ottimo” del parametro m è soluzione della seguente equazione di secondo grado

$$m^2 + \frac{(\sum_{i=1}^N x_i^2 - N\bar{x}^2) - (\sum_{i=1}^N y_i^2 - N\bar{y}^2)}{\sum_{i=1}^N x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}} \cdot m - 1 = 0$$

FUNZIONI DI LYAPUNOV ed INTEGRALI PRIMI



Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (Yaroslavl, 6 giugno 1857 – Odessa, 3 novembre 1918) è stato un matematico e fisico russo, noto soprattutto per i suoi risultati sulla stabilità dei sistemi meccanici. I suoi lavori nel campo delle equazioni differenziali, della teoria del potenziale e della stabilità dei sistemi costituirono un risultato fondamentale per i successivi sviluppi della fisica matematica. Relativamente alle teorie probabilistiche egli ha generalizzato i risultati conseguiti da Cebyshev e da Markov, oltre a fornire una dimostrazione del teorema del limite centrale ancora oggi adottata.

Si consideri il sistema descritto delle n equazioni differenziali

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

...

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

e si assuma che il punto $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ sia uno stato di equilibrio per il sistema. Una *funzione di Lyapunov* per il sistema e lo stato di equilibrio x^* è una funzione scalare $V(x_1, \dots, x_n)$ definita in una regione Ω dello spazio di stato contenente x^* che soddisfi i seguenti requisiti:

1. Sia continua ed abbia derivate parziali prime continue;
2. Abbia in Ω un unico punto di minimo in x^* ;
3. Sia non crescente lungo le traiettorie del sistema in Ω , cioè

$$\begin{aligned}\frac{dV(x)}{dt} &= \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) + \cdots + \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \dot{x}_n(t) = \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} f_1(x) + \cdots + \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} f_n(x) &\leq 0 \quad \forall x \in \Omega\end{aligned}$$

Se esiste una funzione di Lyapunov $V(x_1, \dots, x_n)$, allora le curve di livello della funzione, ovvero i valori di x per cui la funzione assume valori costanti, costituiscono una famiglia di curve chiuse concentriche che includono e lo stato di equilibrio x^* . Tali curve definiscono degli insiemi invarianti per il sistema. Infatti, lungo le traiettorie del sistema la funzione è non crescente per cui se si considera uno stato iniziale contenuto all'interno di una determinata curva di livello, allora l'intera traiettoria generata a partire da tale condizione iniziale sarà contenuta nella stessa curva di livello. L'insieme dei punti contenuti all'interno di una curva di livello, cioè

$$x: V(x) \leq k$$

definisce quindi un insieme invariante per il sistema. Ne segue immediatamente che lo stato x^* è uno stato di equilibrio stabile. Inoltre, se la funzione di Lyapunov è decrescente lungo traiettorie del sistema, cioè nel caso in cui

$$\frac{dV(x)}{dt} < 0 \quad \forall x \in \Omega$$

allora lo stato x^* è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile. Infatti, in questo caso, le traiettorie del sistema devono intersecare curve di livello sempre più “vicine” allo stato di equilibrio tendendo necessariamente al punto in cui la funzione $V(x)$ assume il valore minimo, cioè allo stato di equilibrio x^* . Tali risultati costituiscono il *criterio di stabilità di Lyapunov*.

Nel caso invece in cui

$$\frac{dV(x)}{dt} = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

allora le curve di livello della funzione, cioè

$$x: V(x) = k$$

sono insiemi invarianti per il sistema e coincidono quindi con le sue traiettorie. In questo caso la funzione di Lyapunov viene anche detta *integrale primo* o *costante di moto* del sistema.

Nella figura sottostante viene mostrata una possibile funzione di Lyapunov ed alcune sue curve di livello. Si noti come alla traiettoria del sistema nel piano, corrispondano valori decrescenti della funzione di Lyapunov. In tale caso, la traiettoria nel piano interseca curve di livello sempre più “vicine” al punto di equilibrio.

Un raffinamento dei risultati di Lyapunov è stato proposto da Krasowskii. Il *criterio di Krasowskii* consente infatti di verificare la stabilità asintotica dell'equilibrio in casi nei quali il criterio di Lyapunov può garantire soltanto la stabilità. Il criterio mostra che se esiste una funzione di

Lyapunov e se le curve di livello della funzione non contengono traiettorie del sistema (a parte il punto di equilibrio x^*) allora lo stato x^* è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile.

