

ISSN 2281-4299



DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INFORMATICA
AUTOMATICA E GESTIONALE ANTONIO RUBERTI



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

**Modelli di option pricing: l'equazione di
Black & Scholes**

Giovanni Mattei
Francesco Liberati

Technical Report n. 11, 2013

Modelli di option pricing: l'equazione di Black & Scholes

Giovanni Mattei e Francesco Liberati *

Abstract

In questo lavoro¹ sono investigate le principali problematiche di modellistica matematica ed analisi del prezzamento di quegli strumenti finanziari detti derivati. In particolare, si fa riferimento alle opzioni europee e all'equazione di Black and Scholes per la determinazione del loro prezzo. L'equazione viene ricavata seguendo le assunzioni più classiche e sono in seguito presentate alcune delle tecniche più rilevanti per la sua risoluzione. Infine, una serie di simulazioni mette in mostra le potenzialità descrittive dello strumento introdotto.

Keywords. Prezzamento di opzioni, Equazione di Black e Scholes.

*Dottorandi in Ingegneria dei Sistemi presso il Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale *Antonio Ruberti*, Università di Roma La Sapienza, Via Ariosto 25, 00185 Roma, Italia. Email: mattei@dis.uniroma1.it, liberati@dis.uniroma1.it

¹Questa rassegna è stata elaborata nel contesto delle attività di formazione e approfondimento proposte dal Dottorato in Automatica e Ricerca Operativa. Il nostro sentito ringraziamento è rivolto al Prof. Giorgio Koch, che con la sua immensa passione e infinita energia spese nelle lezioni di Sistemi Stocastici è riuscito a suscitare in noi l'interesse per una materia tanto affascinante quanto ostica. Le sue note introduttive ai sistemi stocastici [1] rappresentano un riferimento fondamentale per il lavoro svolto.

Indice

1	Introduzione	3
2	Derivati e arbitraggi	4
2.1	Opzioni	4
2.1.1	Utilizzo	5
2.1.2	Problematiche	5
2.1.3	Leggi di capitalizzazione	6
2.1.4	Arbitraggi e formula di Put-Call Parity	6
3	Derivazione dell'equazione di Black-Scholes	9
3.1	Assunzioni	9
3.2	Derivazione dell'equazione: <i>hedging portfolios</i>	10
4	Soluzione dell'equazione di Black-Scholes	12
4.1	Trasformazione nell'equazione del calore	12
4.2	Metodi di soluzione probabilistici	16
4.2.1	Teorema fondamentale dell' <i>asset pricing</i>	16
4.2.2	Teorema di Feynman-Kac	18
5	Simulazioni esemplificative	19
	Glossario	25
	Lista dei simboli principali	26

1 Introduzione

L'equazione di Black e Scholes (BS) è nel settore della finanza quantitativa una delle applicazioni fondamentali del *calcolo di Itô*, nonché uno dei primi tentativi di successo nel determinare razionalmente il valore di semplici prodotti derivati (per trattazioni ulteriori si veda ad esempio [2]).

Nel lavoro del 1973 apparso sul *Journal of Politic Economics* [3], Fischer Black e Myron Scholes ricavarono per primi una formula per determinare il prezzo di semplici *opzioni Europee*. Un'opzione Europea è un contratto che dà al possessore la possibilità, ma non l'obbligo, di scambiare un asset finanziario (detto *sottostante*) ad un dato prezzo (detto *strike price*) in corrispondenza di una certa data nel futuro (detta *maturity date*). Il sottostante può essere un prodotto della più svariata natura. Per quanto segue possiamo pensare che il sottostante sia costituito da azioni. È detta *Call option* un'opzione che dà al possessore il diritto di comprare una unità del prodotto sottostante; è detta *Put option* l'opzione che dà analogo diritto di vendita. Il problema del prezzamento dei prodotti derivati si pone poiché, proprio come accade per il sottostante, anche i prodotti derivati vengono scambiati sul mercato (ed è logico che il prezzo di tali prodotti debba essere aggiornato in funzione, ad esempio, dell'andamento del prezzo del sottostante). Nel seguito dunque tratteremo l'approccio delineato da Black e Scholes per il prezzamento di *opzioni Europee*.

Il lavoro è organizzato come segue:

- Nella Sezione 2 si introduce il concetto di prodotto derivato, illustrando alcune possibili applicazioni e le problematiche che ne derivano;
- Nella Sezione 3 si ricava la formula facendo riferimento al procedimento illustrato in [3] e in [4];
- Nella Sezione 4 sono illustrate alcune delle tecniche più rilevanti per la derivazione delle soluzioni dell'equazione;
- La Sezione 5 conclude il lavoro con uno studio simulativo.

2 Derivati e arbitraggi

Un derivato finanziario è un contratto il cui valore dipende da uno o più titoli o beni, detti *sottostanti*. Solitamente il sottostante è costituito da un'azione, un tasso di interesse, un tasso di cambio di valute, la quotazione di un bene come oro, petrolio o grano, ecc.

2.1 Opzioni

L'opzione è l'esempio basilare di strumento derivato. Un'opzione è un contratto che dà il diritto (ma non l'obbligo) a chi lo detiene di comprare o vendere una certa quantità di un titolo sottostante, ad una data futura e ad un prezzo fissato. In un contratto di opzione sono quindi specificati:

- il sottostante;
- il prezzo di esercizio K , detto *strike price*;
- la data T , la *scadenza*.

Un'opzione è di tipo *Call* se dà il diritto di acquistare, ed è di tipo *Put* se dà il diritto di vendere. Un'opzione è di tipo *Europeo* se il diritto può essere esercitato solo *alla scadenza*, ed è di tipo *Americano* se il diritto può essere esercitato in un qualsiasi momento *entro la scadenza*.

Consideriamo una *Call* Europea con *strike* K , scadenza T e indichiamo con S_T il prezzo del sottostante alla scadenza. Al tempo T si hanno due eventualità: se $S_T > K$, il valore finale (*payoff*) dell'opzione è pari a $S_T - K$, corrispondente al ricavo che si ottiene esercitando l'opzione (ovvero acquistando il sottostante al prezzo K e rivendendolo al prezzo di mercato S_T). Se $S_T < K$ non è conveniente esercitare l'opzione e il *payoff* è nullo. In definitiva il *payoff* di una *Call* Europea è pari a

$$(S_T - K)^+ = \max \{S_T - K, 0\} \quad (1)$$

È chiaro che il *payoff* aumenta con S_T e offre un guadagno potenzialmente illimitato, modulo ovviamente il prezzo di acquisto iniziale dell'opzione e il fatto che il sottostante ha un valore molto variabile e difficilmente predicibile. Con un ragionamento analogo, si osserva che il *payoff* di una *Put* Europea è pari a

$$(K - S_T)^+ = \max \{K - S_T, 0\} \quad (2)$$

Le opzioni *Call* e *Put* sono gli esempi più semplici di strumenti derivati e per questo motivo sono anche chiamate opzioni *plain vanilla*. Costruire nuovi derivati componendo questa tipologia di opzioni è molto semplice: per esempio, acquistando una *Call* e una *Put* con medesimo sottostante, *strike* e scadenza, si ottiene un derivato, detto *Straddle*, che ha un *payoff* tanto maggiore quanto S_T è lontano dallo *strike*. Si può essere interessati a questo tipo di strumento quando si confida in un ampio movimento del prezzo del sottostante, non potendone tuttavia prevedere la direzione. La valutazione di questa opzione è facilmente riconducibile alla valutazione di opzioni di tipo *plain vanilla*. Nei mercati reali esiste tuttavia una grande varietà di derivati (detti *esotici*) che possono avere strutture molto complesse: il mercato di tali derivati è in continuo sviluppo ed espansione.

2.1.1 Utilizzo

Gli strumenti derivati sono essenzialmente funzionali all'ottenimento di due obiettivi diversi:

- l'immunizzazione o gestione del rischio;
- la speculazione.

Per esempio, consideriamo un investitore che possiede un titolo azionario S : comprando un'opzione *Put* su S , egli si assicura il diritto di vendere, in futuro, S al prezzo *strike*. In questo modo l'investitore si protegge dal rischio di crollo della quotazione di S . Analogamente, un'industria che utilizza come materia prima il petrolio, può comprare un'opzione *Call* per assicurarsi il diritto di acquistare in futuro tale bene al prezzo di *strike* prefissato: in questo modo l'industria si immunizza dal rischio di crescita del prezzo del petrolio.

Da alcuni anni i derivati stanno assumendo un ruolo sempre più pervasivo: se fino a pochi anni fa, un mutuo per la casa era disponibile solo nella versione tasso fisso o tasso variabile, ora l'offerta è molto più vasta. Per esempio, non è difficile trovare mutui protetti a tasso variabile con un tetto massimo: questo tipo di prodotto strutturato contiene chiaramente uno o più strumenti derivati la cui valutazione non è assolutamente banale.

I derivati hanno anche finalità speculative: acquistare opzioni *Put* è il modo più semplice per guadagnare scommettendo sul crollo del mercato. Infatti, supponendo di acquistare del sottostante al prezzo iniziale S_0 , una *Put* altro non è se non una scommessa che il valore di tale sottostante alla scadenza sia inferiore al prezzo di esercizio a cui si potrà venderlo. Notiamo inoltre che, a parità di investimento, le opzioni offrono rendimenti (e perdite) percentuali molto maggiori rispetto al sottostante. Per esempio, indicando con S_0 il prezzo attuale del sottostante e assumendo che €1 sia il prezzo di una *Call* con $K = S_0 = €10$ e scadenza un anno. Supponendo che a scadenza $S_T = €13$: comprando un'unità del sottostante, ossia investendo di fatto €10, si avrà un profitto di €3 (pari al 30 %); comprando una *Call*, ossia investendo solo €1, si avrà un profitto di €2 (pari cioè al 200 %). D'altra parte, volendo esercitare l'opzione dopo un anno ed essendo nell'eventualità in cui $S_T = €10$, si avrebbe profitto nullo e si perderebbe l'euro inizialmente investito nella *Call*. In tale caso l'opzione non viene esercitata e si ha una perdita.

2.1.2 Problematiche

Un'opzione è a tutti gli effetti un contratto di cui è stabilito il valore finale in dipendenza dal prezzo del sottostante a scadenza, il quale è chiaramente incognito. Si pone quindi il problema non banale della *valutazione (pricing)*, ossia della determinazione del prezzo equo dell'opzione: tale prezzo è il premio che chi compra l'opzione deve pagare al tempo iniziale per acquisire il diritto stabilito nei termini del contratto.

Un secondo problema è quello della replicazione: un'opzione *Call* ha un *payoff* potenzialmente illimitato e di conseguenza chi vende una *Call* si espone al rischio di una perdita illimitata. Una banca che vende un derivato ha quindi il problema di determinare una strategia di investimento che, utilizzando il premio (i soldi ricevuti vendendo il derivato), riesca a replicare a scadenza il *payoff*, qualsiasi sia il valore finale del sottostante. I problemi di valutazione e replicazione, come anche suggerisce l'intuito, sono intimamente connessi.

2.1.3 Leggi di capitalizzazione

Prima di proseguire, è bene ricordare alcune semplici leggi che regolano il valore temporale del denaro in finanza: ricevere €1 oggi è diverso dal riceverlo fra un mese. Si sottolinea, innanzitutto, che è pratica comune considerare l'anno come unità di misura temporale, per cui la scrittura $T = 0.5$ corrisponde a un intervallo temporale di sei mesi.

Le leggi di capitalizzazione esprimono la dinamica di un investimento con tasso di interesse fisso e privo di rischio, come ad esempio quello corrispondente a lasciare i soldi sul conto corrente bancario. In tutti i modelli finanziari si assume l'esistenza di un titolo localmente privo di rischio, detto *bond*. Se B_t è il valore del bond al tempo $t \in [0, T]$, la seguente regola di capitalizzazione semplice con tasso di interesse annuale r

$$B_T = B_0 (1 + rT) \quad (3)$$

esprime il fatto che il valore finale B_T è uguale al valore iniziale B_0 rivalutato degli interessi $B_0 r T$ pari alla percentuale rT (corrispondente al tasso di interesse calcolato su tutto il periodo $[0, T]$) del capitale iniziale. Questa legge è detta di *capitalizzazione semplice*, perché l'interesse è pagato una volta per tutte sul capitale iniziale.

Una regola più complessa è quella della *capitalizzazione composta*, secondo cui l'interesse viene pagato sul capitale rivalutato di continuo. Molto semplicemente si suddivide il periodo T in N intervalli di uguale lunghezza $[t_{k-1}, t_k]$ con $k = 1, \dots, N-1$, pari a $\frac{T}{N}$, e si calcolano interessi semplici alla fine di ogni intervallo, ottenendo

$$B_T = B_{t_{N-1}} \left(1 + r \frac{T}{N}\right) = B_{t_{N-2}} \left(1 + r \frac{T}{N}\right)^2 = \dots = B_0 \left(1 + r \frac{T}{N}\right)^N \quad (4)$$

Passando al limite per $N \rightarrow \infty$, ovvero pensando di pagare interessi semplici sempre più di frequente, si ottiene la legge di capitalizzazione continuamente composta con tasso di interesse r

$$B_T = B_0 e^{rT} \quad (5)$$

La (5) esprime il capitale finale in termini di quello iniziale. Di conseguenza, per ottenere un capitale finale pari a B , è necessario investire al tempo iniziale la somma $B e^{-rT}$: tale somma è detta *valore scontato* o *attualizzato* di B .

Mentre nella pratica si utilizza la legge di capitalizzazione semplice (3), in ambito teorico e soprattutto nei modelli a tempo continuo è più usuale l'utilizzo della capitalizzazione composta.

2.1.4 Arbitraggi e formula di Put-Call Parity

Un arbitraggio rappresenta un'opportunità di compiere operazioni finanziarie a costo zero che producono un profitto privo di rischio. Nei mercati reali gli arbitraggi esistono ma hanno generalmente vita breve, in quanto sono sfruttati per ristabilire in tempi rapidissimi l'equilibrio del mercato. Dal punto di vista della modellistica matematica di un mercato finanziario, è chiaro che tali forme di profitto devono

essere escluse. Di fatto, il principio di assenza di arbitraggi è diventato il criterio principale per la valutazione dei derivati finanziari.

Alla base della valutazione in assenza di arbitraggio c'è l'idea che se due strumenti finanziari hanno *con certezza* lo stesso valore² in una data futura, allora anche attualmente devono avere lo stesso prezzo. Se così non fosse, si creerebbe un'ovvia possibilità di arbitraggio. Infatti, vendendo lo strumento più costoso e comprando quello meno costoso si avrebbe un profitto immediato e privo di rischio poiché la posizione di vendita (posizione *short*) sul titolo più costoso è destinata ad annullarsi con quella di acquisto (posizione *long*) sul titolo meno costo. In formule, il principio di assenza di arbitraggi è il seguente

$$X_T \leq Y_T \Rightarrow X_t \leq Y_t, \forall t \leq T \quad (6)$$

X_t e Y_t indicano rispettivamente il valore dei due generici strumenti finanziari. Una particolareggiata della (6) è la seguente

$$X_T = Y_T \Rightarrow X_t = Y_t, \forall t \leq T \quad (7)$$

Si consideri ora un modello di mercato finanziario libero da arbitraggi, composto da un'azione S che costituisca il sottostante di un'opzione *Call* c e di una *Put* p Europee entrambe con scadenza T e strike K :

$$c_T = (S_T - K)^+, \quad p_T = (K - S_T)^+ \quad (8)$$

Si indichi con r il tasso di interesse composto annuale, privo di rischio, e assumiamo la dinamica (5) per l'investimento localmente non rischioso. Sulla base di argomenti di arbitraggio, ricaviamo la classica *formula di Put-Call parity* che lega i prezzi c e p , e alcune stime inferiori e superiori per tali prezzi. È significativo il fatto che le seguenti formule siano "universali", ossia indipendenti dal modello considerato e basate unicamente sul principio generale di assenza di arbitraggi.

Corollario 2.1 (Put-Call Parity). *Nelle ipotesi precedenti (assenza di arbitraggio), vale*

$$c_t = p_t + S_t - Ke^{-r(T-t)}, \quad t \in [0, T] \quad (9)$$

Dimostrazione. Si osserva che gli investimenti

$$X_t = c_t + \frac{K}{B_T} B_t \quad \text{e} \quad Y_t = p_t + S_t$$

hanno lo stesso valore finale

$$X_T = Y_T = \max\{K, S_T\}$$

La tesi è conseguenza della (7). ◁

Nel caso in cui il sottostante paghi un dividendo D in una data compresa fra t e T , la formula di *Put-Call parity* diventa

$$c_t = p_t + S_t - D - Ke^{-r(T-t)}$$

²Si noti che non è richiesto conoscere i valori futuri dei due strumenti finanziari, ma solo che siano uguali con certezza.

Corollario 2.2 (Stime inferiori e superiori per opzioni europee). *Per ogni $t \in [0, T]$ vale*

$$\begin{aligned} \left(S_t - Ke^{-r(T-t)}\right)^+ &< c_t < S_t \\ \left(Ke^{-r(T-t)} - S_t\right)^+ &< p_t < Ke^{-r(T-t)} \end{aligned} \tag{10}$$

Dimostrazione. Per la (6) si ha

$$c_t, p_t > 0 \tag{11}$$

Di conseguenza, dalla (9) si ha

$$c_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Inoltre, essendo $c_t > 0$, si ottiene la prima stima dal basso. Infine $c_T < S_T$ e quindi per la (6) si ha la prima stima dall'alto. La seconda stima si prova facilmente in maniera analoga. \triangleleft

3 Derivazione dell'equazione di Black-Scholes

Per la derivazione della celebre formula facciamo riferimento a [3] e [4]. L'idea di base è la seguente: se un'opzione è correttamente prezzata sul mercato, dovrebbe allora risultare impossibile ottenere sicuri guadagni operando su *portfoli* costituiti di opzioni e relativo sottostante. Ciò significa che l'applicazione delle strategie di *hedging* (strategie di riduzione o, in condizioni ideali, *eliminazione* del rischio) può garantire, al più, rendimenti pari al tasso di sconto del mercato. La formulazione proposta assume valide alcune considerazioni semplificative discusse nel seguito.

3.1 Assunzioni

Si assume siano valide le seguenti condizioni di *mercato ideale*:

1. Il tasso di sconto a breve termine è noto e costante;
2. Non vi è alcun costo di transazione nel comprare o vendere unità del sottostante e opzioni (*frictionless market*);
3. È consentito lo *short selling*³, senza alcuna penalità o costo;
4. Il sottostante non distribuisce dividendi;
5. Il prezzo del sottostante segue un moto Browniano geometrico;
6. È possibile scambiare ogni frazione del sottostante;
7. Le operazioni di compravendita non sono soggette ad alcun vincolo temporale (possono aver luogo in qualunque istante, entro ovviamente la data di scadenza dell'opzione).

Nel prossima sezione mostreremo che, sotto queste assunzioni, il valore dell'opzione dipende solo dal prezzo del sottostante e dalla variabile tempo (oltre che da quantità assunte note e costanti).

Segnaliamo infine che in un lavoro apparso su *The Bell Journal of Economics and Management Science* [5], Robert C. Merton analizza una ad una, dalle più deboli alle più stringenti, le assunzioni che possono essere fatte per un prezzamento razionale delle opzioni, e in che modo esse determinino la struttura matematica risultante.

³Lo *short selling* è una pratica di vendita che consente di separare temporalmente l'atto della cessione del bene venduto dall'atto di riscossione del corrispettivo. Il corrispettivo pattuito viene percepito nell'immediato, lo scambio del bene avviene in una data futura concordata. Ciò consente al venditore di cedere beni non ancora in suo possesso (in tal caso il venditore dovrà comprare sul mercato l'asset in questione prima della data di cessione al compratore). Si ha quindi che il corrispettivo ricevuto dal venditore è fisso e deterministico (non indicato nella (15)), mentre il costo per l'acquisto futuro del bene (termine col segno meno nella (15)) è aleatorio.

3.2 Derivazione dell'equazione: *hedging portfolios*

Sia S il prezzo⁴ del sottostante al tempo t . Si assume che detto prezzo segua un moto Browniano geometrico⁵

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \quad (12)$$

dove μ (*fattore di drift*) e σ (*volatilità*) sono costanti e W è un processo di Wiener [7]. Sia inoltre $V(S, t)$ il valore dell'opzione al tempo t , con V definita nel dominio $D_V = \{(S, t) : S \geq 0, 0 \leq t \leq T\}$. Si assume che la derivata seconda di V rispetto a S e la derivata prima di V rispetto a t siano continue. Dal *lemma di Itô* [7] si ha⁶

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt \quad (13)$$

Sostituendo la (12) nella (13) si ottiene

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S dW \quad (14)$$

Poiché sia il sottostante che il valore dell'opzione sono mossi dallo stesso processo di Wiener W , il termine stocastico $\frac{\partial V}{\partial S} \sigma S dW$ nella (14) può essere cancellato costruendo un *portfolio* in opzioni e sottostante [3], [4]. In particolare, sia P il valore di un *portfolio long*⁷ in Δ titoli del sottostante e *short*⁸ su un'opzione

$$P = -V + \Delta S \quad (15)$$

Il differenziale di P è

$$dP = - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right] \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \left(-\frac{\partial V}{\partial S} + \Delta \right) \sigma S dW \quad (16)$$

da cui si vede che scegliendo $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ si ottiene un valore di dP puramente deterministico, in cui scompare anche il fattore di drift μ

$$dP = - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt \quad (17)$$

⁴Qui e nel seguito, in alcuni casi, per alleggerire la notazione, si omette la variabile temporale (in questo caso scriviamo S in luogo di S_t).

⁵Più precisamente è detto moto Browniano geometrico una soluzione della Stochastic Differential Equation (SDE) (12). Qui e altrove si usa per brevità la notazione differenziale in luogo della rappresentazione integrale. In particolare, scriviamo $dS = \mu S dt + \sigma S dW$ in luogo di $S = \int_{t_0}^t \mu S_s ds + \int_{t_0}^t \sigma S_s dW_s$, dove si opera un'integrazione stocastica alla *Itô* [6].

⁶Lemma di *Itô*: $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2$. Si usano quindi i formalismi $dt dt = 0$, $dt dW = 0$ e $dW dW = dt$ [8].

⁷Si intende un normale acquisto dell'asset (anche in questo caso non si riporta nella formula il costo dell'acquisto, che è dato). Nel gergo, si parla di *posizione lunga* poiché il compratore compra con l'intenzione di mantenere a lungo la posizione (perché persuaso che il valore dell'asset sia destinato a salire).

⁸Si veda Nota 1. Lo short selling è in genere una pratica attuata da chi è persuaso che nel breve l'asset perderà di valore.

Essendo giunti ad una quantità deterministica, allora, per il principio di non arbitraggio, la variazione infinitesima dP in (17) deve eguagliare la variazione infinitesima di P che si otterrebbe investendo in un mercato libero dal rischio e caratterizzato da tasso di sconto fisso r

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt = rPdt = r\left(-V + \frac{\partial V}{\partial S}S\right)dt \quad (18)$$

Ordinando la (18) segue l'equazione di BS

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (19)$$

4 Soluzione dell'equazione di Black-Scholes

Facciamo sin da subito notare che alcune relazioni del tutto generali sul prezzo dei prodotti derivati possono essere ricavate senza introdurre alcuna assunzione sul modello del mercato, ma facendo riferimento esclusivamente al principio di non arbitraggio precedentemente espresso mediante la formula di *Put-Call Parity* (9). In particolare, definendo P e C i valori⁹ a t , rispettivamente, di una opzione *Put* e di una opzione *Call* con *strike price* K e maturità T , la (9) si riscrive

$$C = P + S - Ke^{-rT-t} \quad \forall t \leq T \quad (20)$$

La (20) consente dunque, ad esempio, di ricavare il valore di una opzione *Put* una volta determinato il valore di una corrispondente opzione *Call* (i.e. su stesso sottostante e con stessa *maturity date*).

Nelle sezioni che seguono illustriamo alcune tecniche di diversa complessità per la derivazione delle soluzioni della (19) (in tali sezioni si assumono valide le assunzioni fatte nella Sezione 3.1). Ricaveremo quindi il valore, secondo Black e Scholes, di una semplice opzione *Call* Europea.

4.1 Trasformazione nell'equazione del calore

In questa sezione si mostra come mediante opportuni cambiamenti di coordinate [4] sia possibile trasformare la (19) - l'equazione di BS - nell'equazione del calore

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = c \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \quad (21)$$

dove $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $u(t, x)$ è la temperatura al tempo t e nel punto x , e le cui soluzioni sono conosciute in forma chiusa.

Si consideri per cominciare il seguente cambiamento di coordinate

$$S = Ke^x, \quad t = T - \frac{\tau}{\sigma^2/2} \quad (22)$$

dove (S, t) sono le variabili indipendenti nella (19), e (x, τ) delle nuove coordinate.

La trasformazione è ben posta, in quanto le funzioni in (22) sono strettamente monotone. Considerando che $S \geq 0$ e $0 \leq t \leq T$, il dominio di interesse per le nuove variabili è

$$D = \{(x, \tau) : -\infty \leq x \leq \infty, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{\sigma^2}{2} T\} \quad (23)$$

Applicando le regole per la derivazione di funzioni di più variabili, è possibile riscrivere facilmente i termini $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial S}$ e $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ in funzione delle nuove variabili (x, τ) , per cui la (19) si può riscrivere come

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{r}{\sigma^2/2} - 1 \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{r}{\sigma^2/2} v \quad (24)$$

dove si è posto $Kv(x, \tau) = V(S, t)$. Si noti come la trasformazione esponenziale nella (22) ha consentito di pervenire ad una PDE a coefficienti costanti (mentre nella (19) gli operatori di derivazione sono moltiplicati per le quantità variabili S ed S^2).

⁹Useremo C in luogo di V solo in questa occasione.

Ponendo per semplicità

$$k = \frac{r}{\sigma^2/2} \quad (25)$$

e considerando quindi l'ulteriore trasformazione della variabile dipendente $v(x, \tau)$ nella nuova variabile $u(x, \tau)$, data da

$$v(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x, \tau) \quad (26)$$

si può verificare che la (24) si trasforma nella seguente equazione del calore adimensionale

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \quad (27)$$

ottenuta dapprima calcolando dalla (26) i valori di $\frac{\partial v}{\partial \tau}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, e quindi sostituendoli nella (24).

La soluzione fondamentale della (27) è data da

$$G(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} \quad (28)$$

che è la funzione di densità di probabilità della distribuzione normale con media nulla e varianza 2τ .

La (28) soddisfa la (27) per ogni τ e per $0 \leq x \leq \infty$, come si può verificare per sostituzione diretta. Nota una condizione iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$, la soluzione della (27) si può anche scrivere come l'integrale di convoluzione

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, \tau) u_0(\xi) d\xi \quad (29)$$

il che si può verificare ancora una volta per sostituzione diretta.

Dalla (29) si vede che per scrivere la soluzione in forma chiusa dell'equazione di BS occorre individuare la funzione $u_0(x)$, sviluppare i calcoli in (29) ed esprimere il risultato nelle originali variabili (S, t) . Notando che a $\tau = 0$ corrisponde $t = T$, si comprende che la $u_0(x)$ deve essere in qualche modo legata al valore dell'opzione alla *maturity date* T (*payoff*). Stanti le assunzioni fatte, il *payoff* per un'opzione *Call* Europea è dato da

$$V(S, T) = \max\{S - K, 0\} \quad (30)$$

Operando sulla (30) le stesse trasformazioni precedentemente introdotte, si perviene alla seguente condizione iniziale $u_0(x)$ per la (29)

$$u(x, 0) = \max\{e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\} \quad (31)$$

Sostituendo la (31) nella (29) si ha

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, \tau) \max\{e^{(\gamma+1)\xi} - e^{\gamma\xi}, 0\} d\xi = \\ &= \int_0^{\infty} G(x - \xi, \tau) \left[e^{(\gamma+1)\xi} - e^{\gamma\xi} \right] d\xi = \\ &= \int_0^{\infty} G(x - \xi, \tau) e^{(\gamma+1)\xi} d\xi - \int_0^{\infty} G(x - \xi, \tau) e^{\gamma\xi} d\xi \end{aligned} \quad (32)$$

avendo posto $\gamma = \frac{1}{2}(k-1)$. Mediante opportune manipolazioni è possibile mostrare che il generico integrale del tipo

$$I_a = \int_0^\infty G(x-\xi, \tau) e^{a\xi} d\xi \quad (33)$$

con a costante può essere riscritto come

$$I_a = e^{(ax+a^2\tau)} \Phi\left(\frac{x+2\tau a}{\sqrt{2\pi}}\right) \quad (34)$$

dove con Φ si è indicata la funzione di ripartizione della distribuzione normale con media nulla e varianza unitaria

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \quad (35)$$

Ponendo $\beta = \frac{1}{2}(k+1) = \gamma+1$ e considerando la (34) e la (35), la (32) si può riscrivere come

$$u(x, \tau) = e^{(\beta x + \beta^2 \tau)} \Phi\left(\frac{x+2\tau\beta}{\sqrt{2\pi}}\right) - e^{(\gamma x + \gamma^2 \tau)} \Phi\left(\frac{x+2\tau\gamma}{\sqrt{2\pi}}\right) \quad (36)$$

La formula di BS (i.e. la soluzione della (19)) può quindi essere ottenuta riscrivendo la (36) in funzione di (S, t) e tornando indietro dalla $u(x, \tau)$ alla $V(S, t)$. Ricordando le trasformazioni operate sulle variabili indipendenti e dipendenti

$$\begin{aligned} S &= Ke^x \\ t &= T - \frac{\tau}{\sigma^2/2} \\ Kv(x, \tau) &= V(S, t) \\ v(x, \tau) &= e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x, \tau) = e^{-\gamma x - \beta^2 \tau} u(x, \tau) \end{aligned} \quad (37)$$

e ricordando che si è posto

$$\begin{aligned} k &= \frac{r}{\sigma^2/2} \\ \gamma &= \frac{1}{2}(k-1) \\ \beta &= \frac{1}{2}(k+1) = \gamma+1 \end{aligned} \quad (38)$$

si ha

$$\begin{aligned} V(x, \tau) &= Kv(x, \tau) = Ke^{-\gamma x - \beta^2 \tau} u(x, \tau) = \\ &= Ke^{-\gamma x - \beta^2 \tau} \left\{ e^{(\beta x + \beta^2 \tau)} \Phi\left(\frac{x+2\tau\beta}{\sqrt{2\pi}}\right) - e^{(\gamma x + \gamma^2 \tau)} \Phi\left(\frac{x+2\tau\gamma}{\sqrt{2\pi}}\right) \right\} = \\ &= Ke^{(\beta-\gamma)x} \Phi\left(\frac{x+2\tau\beta}{\sqrt{2\pi}}\right) - Ke^{(\gamma^2-\beta^2)\tau} \Phi\left(\frac{x+2\tau\gamma}{\sqrt{2\pi}}\right) = \\ &= Ke^x \Phi\left(\frac{x+2\tau\beta}{\sqrt{2\pi}}\right) - Ke^{-k\tau} \Phi\left(\frac{x+2\tau\gamma}{\sqrt{2\pi}}\right) = \\ &= S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \end{aligned} \quad (39)$$

dove

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{\log(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\d_2 &= \frac{\log(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\end{aligned}\tag{40}$$

Infine, la soluzione in forma chiusa nel caso di opzioni *Put* Europee si può ricavare dalla (40) considerando la relazione di *Put-Call parity* precedentemente esposta.

In definitiva, per il valore di un'opzione *Call* Europea su sottostante che non paga dividendo¹⁰ si ha:

$$V(S, t) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)\tag{41}$$

dove

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{\log(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\d_2 &= \frac{\log(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\end{aligned}\tag{42}$$

¹⁰Nel caso di sottostante che paga dividendo continuamente nel tempo ad un tasso q (i.e. del tempo infinitesimo dt viene pagato un dividendo $qS_t dt$), la trattazione può essere ripetuta in maniera sostanzialmente analoga considerando, in luogo della (12), un'equazione del tipo $dS = (\mu - q)Sdt + \sigma SdW$, in cui q modella l'effetto di diminuzione di valore del sottostante per via del pagamento del dividendo.

4.2 Metodi di soluzione probabilistici

In questa sezione si fa accenno a due metodi probabilistici per il calcolo della soluzione dell'equazione di BS. Il primo metodo fa riferimento al cosiddetto teorema fondamentale dell'*asset pricing*, secondo il quale il *fair price* di un'opzione *Call* è dato dal valore atteso, secondo un'opportuna metrica, detta *risk-neutral*, del valore del *payoff* scontato al presente (secondo il tasso di sconto *riskless* r). Il secondo metodo fa ricorso al teorema di Feynman-Kac, che consente di sostituire al calcolo del valore atteso appena menzionato, il calcolo delle soluzioni di una PDE. Un terzo approccio utile, non trattato nel seguito, è basato sul teorema di Girsanov, che nella pratica consente di semplificare il calcolo del valore atteso. Per un approfondimento di quest'ultimo punto si rimanda il lettore ai riferimenti [6], [8].

4.2.1 Teorema fondamentale dell'*asset pricing*

La soluzione dell'equazione di BS viene nel seguito derivata applicando il teorema fondamentale dell'*asset pricing*. Si tratta di esprimere il valore dell'opzione come valore atteso, secondo una particolare misura, detta *neutrale al rischio*, del payoff $(S_T - K)^+$ (variabile aleatoria) scontato al presente. Con il termine *asset* si denota un qualunque processo di *Itô* positivo che possa essere scambiato sul mercato.

Teorema 4.2.1 (Teorema fondamentale dell'*asset pricing*). *Un modello di mercato costituito da un asset S e da un investimento a tasso di sconto r , costante e garantito, è libero da arbitraggi se esiste una misura di probabilità P , equivalente alla misura del modello, sotto cui il processo stocastico del valore dell'asset scontato al presente ($\bar{S}_t = e^{-rt}S_t$) è una martingala locale¹¹.*

Assumendo dunque che il modello di mercato sia libero da arbitraggi, si ha, sotto una opportuna misura P

$$d\bar{S}_t = \sigma(\omega, t)dW_t \quad (43)$$

con $\sigma(\omega, t)$ coefficiente di diffusione (funzione del tempo e dello spazio di probabilità). Poiché $S_t = e^{rt}\bar{S}_t$, dal calcolo dei differenziali si ha quindi

$$dS_t = \bar{S}_t de^{rt} + e^{rt}d\bar{S}_t = rS_t dt + e^{rt}\sigma(\omega, t)dW_t \quad (44)$$

Confrontando la precedente equazione con la (12) si nota che ora il coefficiente di *drift* è dato proprio dal tasso di sconto del mercato (il che non sorprende, dato che l'asset considerato nel precedente teorema è scontato proprio al tasso di mercato). La misura P è detta *neutrale al rischio*, poiché lascia indifferente un investitore neutrale al rischio rispetto alla scelta di un investimento in *bond* a tasso r garantito, o un prodotto derivato dallo stesso ritorno atteso.

Il teorema può essere applicato anche al calcolo del valore di un'opzione (considerando un'opzione come un tipo particolare di asset). Quindi, in assenza di arbitraggio, e sotto un'opportuna misura neutrale al rischio, $e^{-rt}V$ è una martingala locale. Assumendo inoltre che $e^{-rt}V$ sia una martingala, si ottiene la formula per il prezzamento

$$e^{-rt}V_t = E^P[e^{-rT}V_T | F_t] \quad (45)$$

¹¹Una martingala locale è un processo stocastico in cui il termine di *drift* è pari a zero.

Il prezzo dell'opzione è quindi dato da un valor medio calcolato secondo una misura sotto la quale il coefficiente di *drift* del sottostante coincide con il tasso di interesse del mercato (si veda la (44)). La particolare misura è detta neutrale al rischio poiché il prezzo determinato è “giusto” sia per il compratore che per il venditore.

La (45) può essere direttamente applicata per il calcolo della soluzione dell'equazione di BS, riscrivendo opportunamente il termine di *payoff*. Si introduce a tal proposito il processo $f_t^T = e^{(T-t)r} S_t$, detto *forward* della scadenza. Per il teorema precedente, il *forward* può essere riscritto, sotto un'opportuna misura, come una martingala locale (scritta come un moto Browniano geometrico a volatilità costante)

$$df_t^T = \sigma f_t^T dW_t \quad (46)$$

La soluzione della SDE è data da (come si può verificare dalla regola di *Itô*)

$$f_t^T = f_0^T e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t} \quad (47)$$

Notando che $S_T = f_T^T$, la (45), scritta per $t = 0$, diventa

$$V(0, S_0) = e^{-rT} E^P[(f_T^T - K)^+] \quad (48)$$

Sostituendo la (47) nella (48), e sviluppando i calcoli, si può verificare infine che $V(0, S_0)$ coincide proprio con la soluzione precedentemente ricavata per l'equazione di BS (i.e. la (41)).

4.2.2 Teorema di Feynman-Kac

La soluzione dell'equazione di BS può essere trovata anche dall'applicazione del Teorema di Feynman-Kac, per cui si rimanda a [6], [8]. Il Teorema di Feynman-Kac, applicato al problema del prezzamento di un'opzione *Call* Europea, consente di sostituire al calcolo del valore medio (45), il calcolo delle soluzioni di un'equazione PDE associata. Ricordando l'espressione del forward ($f_t^T = e^{r(T-t)}S_t$), e ricordando l'assunzione che il forward, che è una martingala locale, si possa scrivere come processo di diffusione a volatilità costante (i.e. $df_t^T = \sigma f_t^T dW_t$), la PDE associata da risolvere è data da

$$-\frac{\partial}{\partial t}V(f, t) = \frac{1}{2}\sigma^2 f^2 \frac{\partial^2}{\partial f^2}V(f, t) - rV(f, t) \quad (49)$$

con la condizione terminale $V(f, T) = (S_T - K)^+$. Per la soluzione della (49) si rimanda a [8].

5 Simulazioni esemplificative

La presente sezione riporta alcune esemplificative simulazioni a supporto e chiarimento di quanto esposto in precedenza. Il software utilizzato per le simulazioni è basato sul software SDETools.

Iniziamo col presentare delle realizzazioni di moto Browniano geometrico (equazione (12)). La figura 1 presenta tracciate 100 realizzazioni, su un intervallo di 10 secondi, di un moto *Browniano* geometrico caratterizzato da *drift* nullo e volatilità pari a 0.01 ($\mu = 0$, $\sigma = 0.01$ nell'equazione (12)). In blu sono riportate le 100 realizzazioni del processo. La linea rossa tratteggiata rappresenta l'evoluzione di S considerando nella (12) il solo fattore di drift (i.e. andamento della media). Nella

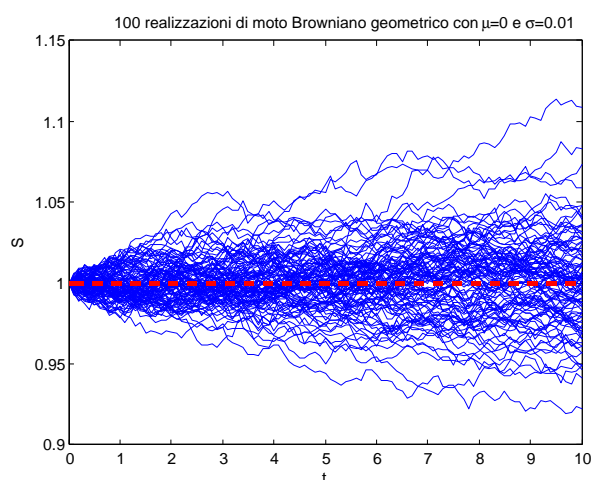


Figura 1 – Moto Browniano geometrico con $\mu = 0$ e $\sigma = 0.01$.

figura seguente (figura 2) la volatilità è aumentata a 0.1. Come atteso, aumentando la volatilità si ottengono delle realizzazioni che si allontanano maggiormente dal valore medio (che rimane nullo come nella simulazione precedente, essendo $\mu = 0$). La figura 3 riporta simulazioni in cui viene considerato un fattore di drift positivo pari a 0.05. Impostando un fattore di drift positivo si ottengono realizzazioni in media crescenti su lunghi orizzonti temporali (non considerando l'apporto del processo di *Wiener* infatti, la soluzione della (12) - la media - è un esponenziale crescente, tracciato in rosso nella figura).

Nelle simulazioni in figura 4, a parità del valore di volatilità, il valore di *drift* è aumentato di un fattore 10. Come atteso, la crescita delle realizzazioni è maggiormente accentuata.

Avendo dato delle simulazioni dell'andamento nel tempo del processo descritto dalla (12), che nella trattazione di BS è assunto a modellare l'evoluzione del prezzo del sottostante di un'opzione, passiamo ora a valutare qualitativamente, tramite semplici simulazioni, l'effetto che hanno sul prezzo delle opzioni *Put* e *Call* le variazioni dei singoli parametri che entrano nella formula per il calcolo delle quotazioni delle opzioni (lo ricordiamo, il prezzo S del sottostante, il *risk-free* interest rate r , lo *strike price* K , la scadenza T , e la volatilità σ).

I seguenti valori di $S(t_0)$, r , K , T e σ verranno considerati come valori di base per le simulazioni a seguire: $S(t_0) = 100$, $r = 10\%$, $K = 95$, $T = 0.25$ (i.e. tre

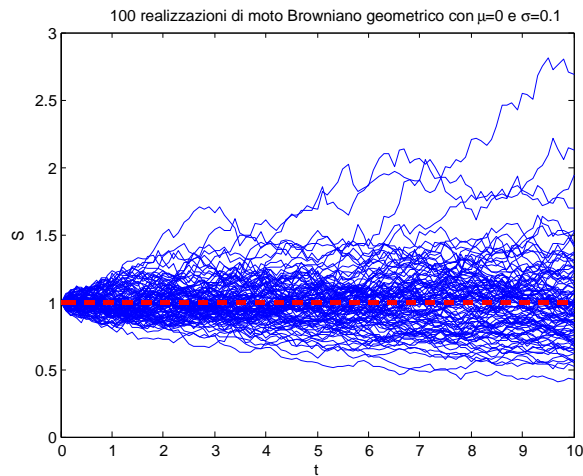


Figura 2 – Moto Browniano geometrico con $\mu = 0$ e $\sigma = 0.01$.

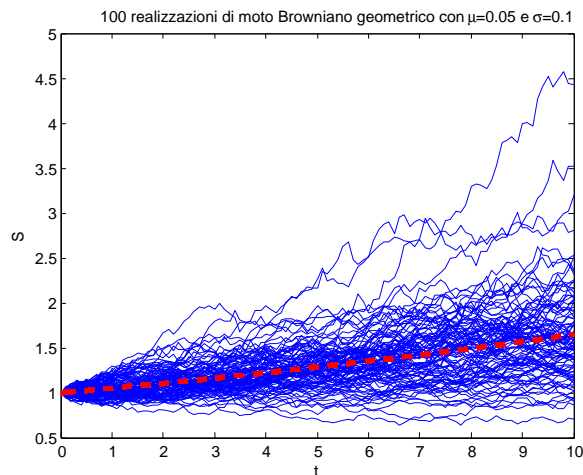


Figura 3 – Moto Browniano geometrico con $\mu = 0.05$ e $\sigma = 0.01$.

mesi) e $\sigma = 0.5$ (i.e. 50% per anno).

Andamento del prezzo al variare dello *strike price*

La prima simulazione (figura 5) riporta l'andamento del prezzo corrente delle opzioni *Call* e *Put* Europee al variare dello *strike price*.¹² Come naturale attendersi [5], al crescere dello *strike price* cresce il valore dell'opzione *Put*, mentre decresce quello dell'opzione *Call* (intuitivamente, questo è dovuto al fatto che, al crescere dello *strike price*, e, in particolare, per valori di K molto maggiori di $S(t_0)$, è più probabile che venga esercitata alla scadenza l'opzione *Put* che quella *Call*). Naturalmente, il valore dell'opzione *Put* (*Call*) è maggiore di zero anche per $K \leq S(t_0)$ ($K \geq S(t_0)$), per via dell'incertezza sul prezzo futuro del sottostante.

¹²Qui e nel seguito, si considera un sottostante che non paga dividendo.

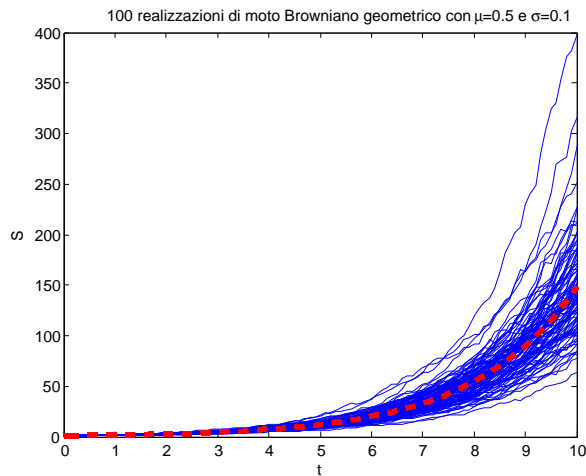


Figura 4 – Moto Browniano geometrico con $\mu = 0.5$ e $\sigma = 0.01$.

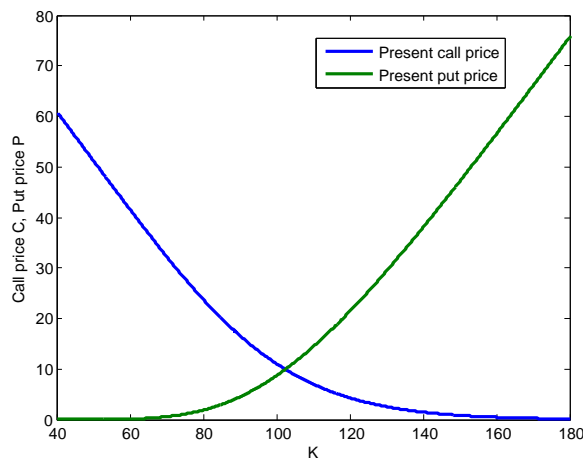


Figura 5 – Put e Call price al variare dello strike price.

Andamento del prezzo al variare della volatilità

La prossima simulazione, riportata in figura 6, mostra invece come i prezzi varino al variare della volatilità. La figura 7 mostra il dettaglio per bassi valori di σ .

Al crescere della volatilità si ha un aumento delle quotazioni di entrambe le tipologie di opzioni. Il valore della opzione *Call* è superiore in questo caso al valore dell'opzione *Put*, anche perché il prezzo corrente del sottostante ($S_0 = 100$) è maggiore dello *strike price* ($K = 95$). Va però anche considerato che il *drift* del sottostante è positivo, e che in questa simulazione la *maturity date* è tenuta costante. È da considerare inoltre, anche per il calcolo del valore delle opzioni secondo la formula di BS, che il valore della volatilità non è conosciuto, ma va stimato. Una stima della volatilità comunemente impiegata, detta *implied volatility*, si può ottenere invertendo l'equazione di BS per calcolare l'unico parametro di volatilità che rende soddisfatta l'equazione quando siano dati i prezzi correnti a cui

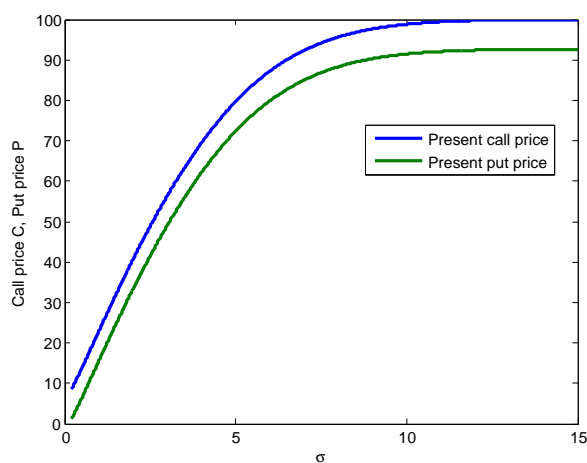


Figura 6 – Put e Call price al variare di σ ($\sigma \in [0, 15]$).

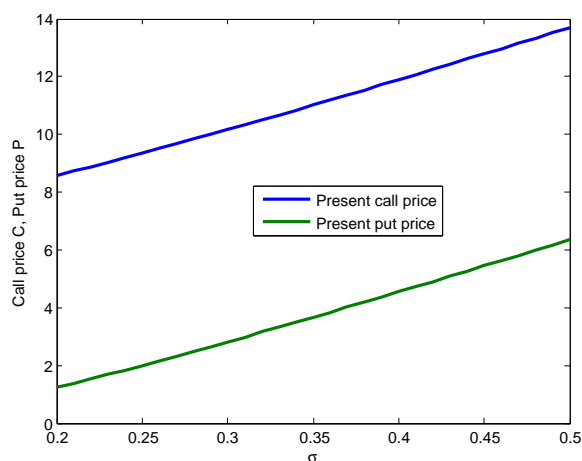


Figura 7 – Put e Call price al variare di σ (dettaglio per $\sigma \in [0.2, 0.5]$).

il sottostante e l'opzione vengono scambiati [9].

Andamento del prezzo al variare della *maturity date*

Mostriamo infine (figura 8 e figura 9) come varino i prezzi delle opzioni *Put* e *Call* al variare della *maturity date* T .

Il valore dell'opzione *Call* ha un andamento crescente, giustificato dal fatto che già a t_0 lo strike price K è minore del prezzo del sottostante, che per giunta è caratterizzato da un *drift* positivo, che fa sì che il valore medio del sottostante sia crescente nel tempo. Il valore dell'opzione *Put* è crescente nel breve periodo, mentre decresce a zero sul lungo periodo (il che è comprensibile, dato che il valore atteso nel futuro del prezzo del sottostante è maggiore dello *strike price*, e dunque è lecito attendersi che l'opzione *Put* non verrà esercitata).

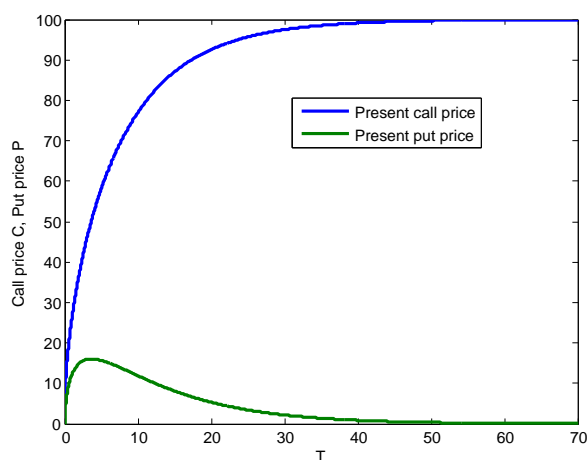


Figura 8 – Put e call price al variare della scadenza T ($T \in [0, 70]$).

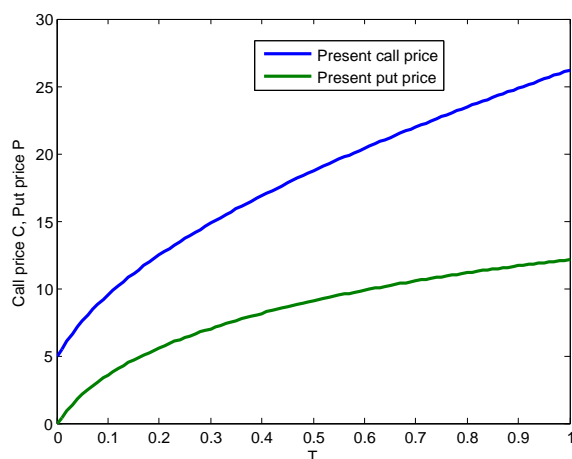


Figura 9 – Put e Call price al variare della scadenza T (dettaglio per $T \in [0, 1]$).

Payoff

Ponendo $t = T$ e variando il prezzo del sottostante è possibile tracciare le curve di *payoff* per le opzioni *Put* e *Call*. Come atteso, i *payoff* sono descritti da due semirette con rottura per $S(T) = K$ (sappiamo infatti che si ha $V_c(S, T) = \max\{S - K, 0\}$ - payoff opzione *Call* - e $V_p(S, T) = \max\{K - S, 0\}$ - payoff opzione *Put*).

Simulazione del prezzo di un'opzione *Call*

In figura 11 è riportato l'andamento del tempo di una realizzazione di moto Browniano geometrico, a rappresentare l'evoluzione nel tempo del prezzo di sottostante. La figura riporta quindi l'andamento nel tempo del valore delle relative opzioni *Call* e *Put*. I valori di simulazione sono $K = 2.3$, $T = 10$, $r = 1\%$, $\mu = -0.07$, $\sigma = 0.2$. Per semplicità il valore della volatilità è considerato costante.

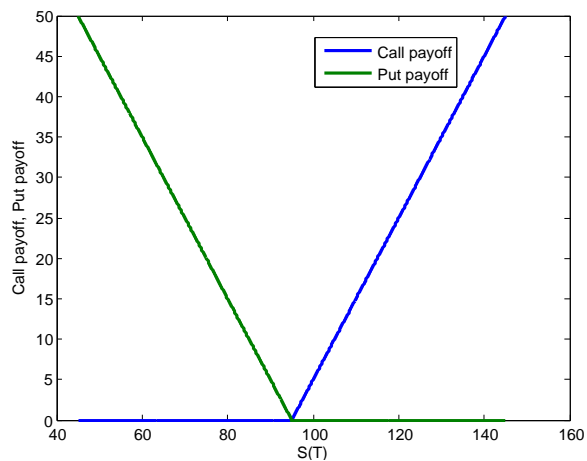


Figura 10 – Curve di payoff.

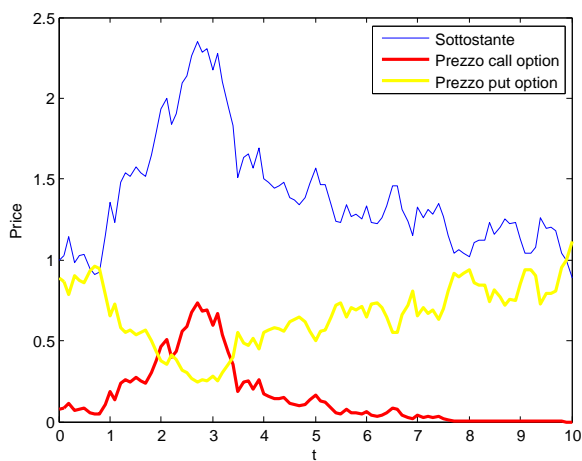


Figura 11 – Andamento nel tempo del prezzo del sottostante, del valore dell'opzione Call associata e del valore dell'opzione Put associata.

Glossario

Hedging	Strategie per la riduzione del rischio associato ad un investimento
<i>Maturity date</i>	Data di scadenza dell'opzione
Opzione	Nel caso più semplice, contratto che dà al possessore il diritto di comprare (<i>Call option</i>) o vendere (<i>Put option</i>) un bene (sottostante) ad un dato prezzo (<i>strike price</i>) entro una certa data (<i>maturity date</i>)
Posizione <i>long</i>	Si apre una posizione long quando si acquista un bene con l'obiettivo di rivenderlo ad un prezzo maggiore
Posizione <i>short</i>	Impegno di vendita di un bene ad un dato prezzo entro una certa data. Usualmente si apre una posizione <i>short</i> quando si è persuasi che nel breve periodo il prezzo del bene diminuirà (consentendo così di comprare il bene ad un prezzo minore di quello pattuito nell'impegno di vendita)
Sottostante	Bene a cui fa riferimento l'opzione o in generale il prodotto derivato
<i>Strike price</i>	Prezzo unitario di acquisto o vendita del sottostante cui si ha diritto in virtù del possesso dell'opzione
<i>Payoff</i>	Valore dell'opzione alla scadenza
<i>Put-Call parity</i>	Relazione matematica che lega il prezzo di un'opzione <i>Put</i> all'analoga opzione <i>Call</i>

Lista dei simboli principali

f_t^T	<i>Forward a T</i> del sottostante S_t (i.e. $f_t^T = e^{r(T-t)}S_t$)
K	<i>Strike price</i>
μ	Fattore di <i>drift</i>
Φ	Funzione di ripartizione della funzione di densità di probabilità Gaussiana
P_t	Valore del <i>portfolio</i> a t
r	Tasso di sconto del mercato
S	Prezzo del sottostante
σ	Volatilità
T	<i>Maturity date</i>
V	Valore dell'opzione
W	Processo di Wiener
$(x)^+$	$\max\{0,x\}$

Riferimenti bibliografici

- [1] G. Koch, “Introduzione ai sistemi stocastici,” Istituto di Automatica, Università di Ancona, Tech. Rep., 1979.
- [2] W. Margrabe, “The value of an option to exchange one asset for another,” *The Journal of Finance*, vol. 23, no. 1, pp. 177–186, 1978.
- [3] F. Black and M. S. Scholes, “The pricing of options and corporate liabilities,” *Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, pp. 637–54, May-June 1973.
- [4] O. Ugur, *An Introduction to Computational Finance*, ser. Series in Quantitative Finance. WORLD SCIENTIFIC Publishing Company, 2009.
- [5] R. C. Merton, “Theory of rational option pricing,” *Bell Journal of Economics*, vol. 4, no. 1, pp. 141–183, Spring 1973.
- [6] A. Pascucci, *PDE and Martingale Methods in Option Pricing*. Springer-Verlag Italia, 2011.
- [7] G. Da Prato, *Calcolo Stocastico*. Università delle Marche, 2005.
- [8] P. Henry-Labordere, *Analysis, geometry, and modeling in finance: advanced methods in option pricing*, ser. Chapman & Hall/CRC financial mathematics series. Boca Raton, London, New York: CRC Press, 2009. [Online]. Available: <http://opac.inria.fr/record=b1131308>
- [9] R. W. Lee, “Implied volatility: Statics, dynamics, and probabilistic interpretation,” in *Recent advances in applied probability*. Springer, 2005, pp. 241–268.