1.8 RETI DI CODE

1.8.1 Generalità

La trattazione della teoria delle code effettuata fino ad ora ha sempre considerato singoli sistemi a coda. Tuttavia, molto spesso i sistemi reali si possono presentare sotto forma di più sistemi a coda connessi fra di loro e si parla quindi di *reti di code*.

Le reti di code cono state utilizzate con successo nella modellizzazione di molti sistemi reali: reti di telecomunicazioni, sistemi di calcolo, sistemi manufatturieri e molti altri.

Una rete di code può essere descritta come un grafo orientato composto da un certo numero di nodi (m) ciascuno dei quali rappresenta un sistema a coda e gli archi rappresentano le rotte seguite dagli utenti da un sistema all'altro. In generale, si può pensare che ad una rete di code arrivino utenti dall'esterno in ciascun nodo della rete, così come da ciascun nodo un utente può lasciare la rete. Ovvero, un utente entra nella rete in un certo nodo, attraversa alcuni nodi della rete e poi presso un nodo lascia la rete. Può anche accadere che gli utenti possano ritornare presso nodi già visitati.

È facile immaginare che lo studio di una rete è in generale è molto più complicato dello studio di un singolo sistema a coda perché ovviamente si deve tenere conto di ogni sistema a coda componente la rete per analizzare il flusso totale degli utenti.

Le reti di code si dividono in

- *reti aperte* in cui sono possibili ingressi di utenti alla rete dall'esterno e uscite degli utenti dalla rete verso l'esterno;
- *reti chiuse* in cui il numero degli utenti all'interno della rete è fissato e gli utenti circolano all'interno della rete senza che ci sia possibilità di ingressi dall'esterno o uscite verso l'esterno.

Per caratterizzare completamente una rete di code devono essere assegnati:

- la topologia della rete
- le distribuzioni di probabilità dei tempi di interarrivo degli utenti presso i nodi che prevedono ingresso di utenti
- le distribuzioni di probabilità dei tempi di servizio presso ciascun nodo costituente la rete
- le regole di istradamento.

Lo stato n della rete è definito dal vettore $n = (n_1, \ldots, n_m)$, dove le n_i, $i = 1, \ldots, m$ rappresentano il numero di utenti del sistema $i-$esimo.

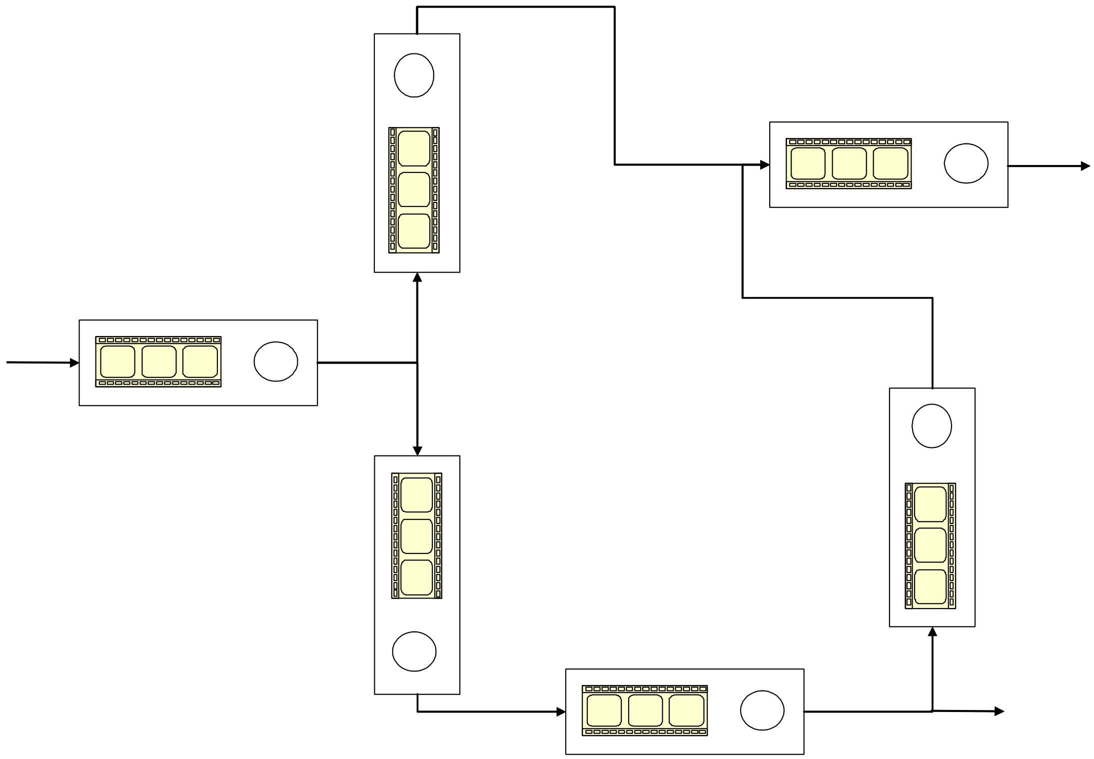

Fig. 1.8.1 Esempio di rete aperta

1.8.2 Il processo delle partenze per i sistemi M/M/s

Preliminare allo studio delle reti di code c'è l'analisi del processo delle partenze (uscite) dal sistema degli utenti che hanno usufruito del servizio. È molto importante conoscere le caratteristiche di questo processo per studiare le reti di code in quanto il processo delle partenze da un sistema coincide con il processo degli arrivi nel sistema successivo. Riportiamo un risultato che vale per sistemi M/M/s noto come *Teorema di Burke*.

Teorema di Burke

Teorema 1.8.1 *Si consideri un sistema M/M/s con* $s \geq 1$ *(incluso* $s = \infty$*) con frequenza media di arrivo pari a* λ *in condizioni di stazionarietà. Allora*

i) il processo della partenze dal sistema è un processo di Poisson di parametro λ*;*

ii) ad ogni istante di tempo t*, il numero di utenti presenti nel sistema è indipendente dalla sequenza dei tempi di partenza prima di* t*.*

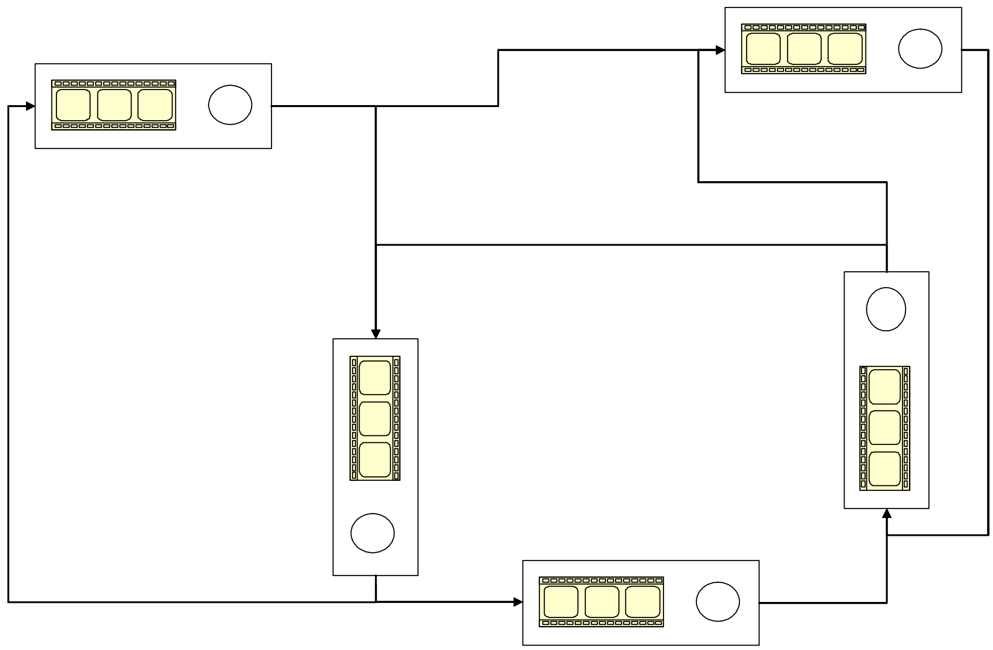

Fig. 1.8.2 Esempio di rete chiusa

Quindi in un sistema a coda con arrivi poissoniani e tempi di servizio distribuiti esponenzialmente, anche il processo delle partenze dal sistema è un processo di Poisson, ovvero il processo delle partenze ha le stesse caratteristiche del processo degli arrivi, nonostante il servizio che è avenuto e il relativo tempo. Si osservi inoltre che questo risultato è indipendente anche dalla disciplina della coda.
L'utilità di questo risultato all'interno della teoria delle code è evidente: se gli utenti che escono dal un sistema M/M/s entrano in un altro sistema a coda, gli arrivi a questo secondo sistema saranno ancora poissoniani. Quindi, assumendo che i tempi di servizio del secondo sistema siano distribuiti esponenzialmente, il sistema a coda del secondo nodo si comporta come un sistema M/M/s e può essere studiato indipendentemente dal primo nodo. Quindi in virtù del teorema di Burke, possiamo collegare in una rete sistemi a coda M/M/s e, purchè non ci siano cicli, ovvero purché gli utenti non possano rivisitare nodi già precedentemente visitati (*reti feedforward*), si può analizzare la rete decomponendola nodo a nodo.

reti feed-forward

L'assenza di cicli è necessaria altrimenti si potrebbe perdere la natura poissoniana dei flussi in ingresso ai nodi. La dimostrazione di questo teorema si basa su una proprietà detta *reversibilità* dei processi di nascita e morte che permette di vedere i processi delle partenze corrispondenti agli arrivi del processo invertito.
Senza entrare nel dettaglio, notiamo solamente che oltre le equazioni di bilancio *globale* date dalle (1.4.6) e (1.4.7), nei processi di nascita e morte, si possono anche

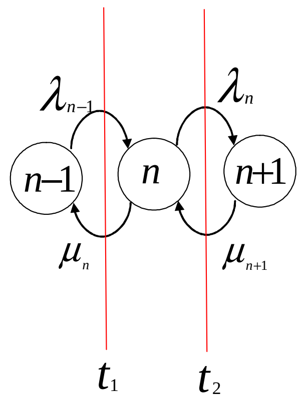

Fig. 1.8.3 Diagramma degli stati

considerare le seguenti equazioni di bilancio del flusso tra due stati adiacenti (dette equazioni di bilancio *dettagliato*). Si considerino i due tagli t_1 e t_2 in Figura 1.8.3. Relativamente al flusso che attraversa il taglio t_1 si ha

$$\lambda_{n-1}p_{n-1} = \mu_n p_n, \tag{1.8.1}$$

mentre relativamente al taglio t_2 si deve avere

$$\lambda_n p_n = \mu_{n+1}p_{n+1}.$$

Ovviamente, sottraendo membro a membro queste due equazioni si ottengono le equazioni di bilancio globale (1.4.6). Queste due equazioni di bilancio del flusso ora ottenute tra stati adiacenti mettono in evidenza la proprietà dei processi di nascita e morte che va sotto in nome di *reversibilità* che è alla base del Teorema di Burke.

1.8.3 Serie di code

La più semplice rete di code che si può costruire consiste nell'avere un numero fissato (m) di sistemi a coda *in serie*, in cui non ci siano limiti sulla capacità della coda di ogni singolo sistema componente la rete.
Questa situazione si verifica nella pratica, ad esempio, nei sistemi manufatturieri (linee di assemblaggio in cui i prodotti devono passare attraverso una serie di stazioni di lavoro); nei sistemi ospedalieri dove un paziente può essere sottoposto, in sequenza, ad un certo numero di accertamenti; nelle procedure di tipo amministrativo che prevedono più fasi successive (registrazione, pagamento, ritiro documenti, ...). Assumiamo che al primo sistema arrivino utenti secondo un processo di Poisson di parametro λ e che in ciascun sistema componente ci siano s_i serventi, $i = 1, \dots, m$, ciascuno operante con tempi di servizio distribuiti esponenzialmente con parametro μ_i con $\lambda < s_i\mu_i$ per ogni $i = 1, \dots, m$. Si assume

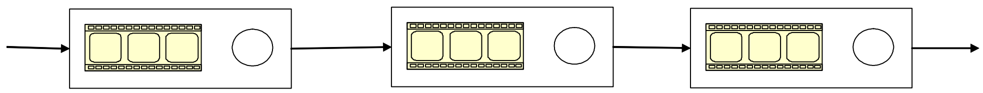

Fig. 1.8.4 Esempio di serie di code

inoltre che tali tempi di servizio siano indipendenti. In condizioni stazionarie, per il Teorema di Burke, ciascuno dei sistemi ha arrivi poissoniani con parametro λ e quindi i sistemi possono essere analizzati come tanti sistemi M/M/s_i isolati. Il caso più semplice corrisponde ad avere due sistemi in serie (sistema tandem) con singolo servente. In questo caso è molto semplice dimostrare che la probabilità congiunta che n_1 utenti sono nel primo sistema e n_2 utenti nel secondo sistema è data dal prodotto delle singole probabilità, ovvero

$$P(n_1, n_2) = p_{n_1} p_{n_2} = \rho_1^{n_1}(1-\rho_1) \ \ \rho_2^{n_2}(1-\rho_2),$$

con $\rho_1 = \lambda/\mu_1 < 1$ e $\rho_2 = \lambda/\mu_2 < 1$.
Infatti, per la prima parte del Teorema di Burke il processo delle partenze dal secondo sistema è di Poisson e per l'indipendenza dei tempi di servizio il secondo sistema può essere visto come un singolo sistema M/M/1, e quindi si ha

$$p_{n_1} = \rho_1^{n_1}(1-\rho_1), \qquad\qquad p_{n_2} = \rho_2^{n_2}(1-\rho_2).$$

Per la seconda parte del Teorema di Burke, in un qualsiasi istante t il numero degli utenti presenti nel primo sistema è indipendente dalla sequenza degli arrivi al secondo sistema prima di t e quindi anche dal numero degli utenti nel secondo sistema. Quindi si ha

$$P(n_1, n_2) = \rho_1^{n_1}(1-\rho_1) \ \ \rho_2^{n_2}(1-\rho_2).$$

Questo si estende ad una serie di un numero finito di sistemi a coda in serie. Quindi la probabilità congiunta che una rete costituita da m sistemi a coda in serie sia allo stato $n = (n_1, \ldots, n_m)$ si può scrivere nella forma

$$P(n) = P(n_1, n_2, \ldots, n_m) = p_{n_1} p_{n_2} \cdots p_{n_m} = \rho_1^{n_1}(1-\rho_1)\rho_2^{n_2}(1-\rho_2) \cdots \rho_m^{n_m}(1-\rho_m),$$

dove $\rho_j = \lambda/\mu_j < 1$, $j = 1, \ldots, m$. Questa rappresenta la cosiddetta *soluzione in forma prodotto*.
Il tempo medio totale di permanenza nell'intero sistema, ovvero nella rete, e il numero medio di utenti presenti nella rete si possono calcolare semplicemente sommando le corrispondenti quantità calcolate in riferimento ai singoli sistemi. Si osservi che le considerazioni fino ad ora riportate non valgono se la capacità dei singoli sistemi a coda componenti la rete fosse finita.

Esempio 1.8.1 Supponiamo di avere un sistema formato da due stazioni di lavoro monoserventi in serie: la prima è una stazione di lavorazione, la seconda una stazione di collaudo. I pezzi arrivano alla prima stazione secondo un processo di Poisson di parametro $\lambda = 10$. I tempi di servizio dei serventi sono distribuiti esponenzialmente con $\mu_1 = 12$ e $\mu_2 = 15$.
Per quanto esposto, gli arrivi alla seconda stazione sono poissoniani di parametro $\lambda = 10$ e l'analisi può essere condotta studiando singolarmente i due sistemi M/M/1. Poiché risulta

$$\rho_1 = \frac{5}{6} < 1 \qquad \rho_2 = \frac{2}{3} < 1$$

esiste una distribuzione stazionaria della rete. Analizzando i due sistemi singolarmente si ha

$$T_1 = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} = \frac{1}{2} \quad \text{ora}, \qquad T_2 = \frac{1}{\mu_2 - \lambda} = \frac{1}{5} \quad \text{ora}$$

e

$$N_1 = \lambda T_1 = 5 \text{ pezzi}, \qquad N_2 = \lambda T_2 = 2 \text{ pezzi}.$$

Per quanto riguarda la rete si ha $N = N_1 + N_2 = 7$ pezzi e $T = T_1 + T_2 = 7/10$ ora, ovvero 42 minuti.

1.8.4 Reti di Jackson aperte

Una tipologia di reti di code molto studiate e che continua a prevedere l'utilizzo del modello M/M/s sono le cosiddette *reti di Jackson aperte*. A differenza dei sistemi a coda in serie, gli utenti visitano i nodi in un ordine qualsiasi e in ogni nodo ci possono essere utenti che arrivano sia dall'esterno sia da altri nodi. Formalmente si ha la seguente definizione.

Rete di Jackson

Definizione 1.8.2 *Una rete di code aperta si dice* rete di Jackson aperta *se*

i) *gli arrivi dall'esterno della rete ad un nodo i della rete $(i = 1, \dots, m)$ sono poissoniani di parametro γ_i, con $\gamma_i > 0$ per almeno un i;*

ii) *i tempi di servizio di ciascun servente degli s_i serventi presenti ad ogni nodo i sono indipendenti e distribuiti esponenzialmente di parametro μ_i;*

iii) *le probabilità che un utente che ha completato il servizio al nodo i si rechi presso il successivo nodo j $(i, j = 1, \dots, n)$ (probabilità di routing) è pari a p_{ij} ed è indipendente dallo stato del sistema.*

Assumeremo, inoltre, che i sistemi a coda componenti la rete siano a capacità illimitata (ovvero coda infinita). Naturalmente può accadere che $\gamma_i = 0$ per qualche i, ovvero che non ci siano arrivi dall'esterno al nodo $i-$esimo, ma si richiede che $\gamma_i > 0$ per almeno un i.
Dopo che un utente viene servito presso il nodo i, esso può procedere verso un nodo j con probabilità p_{ij} o può uscire dalla rete con probabilità $1 - \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$. Le probabilità p_{ij} possono essere schematizzate in una matrice quadrata di ordine m

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

che viene chiamata *matrice di routing*.

È chiaro che la frequenza media effettiva degli arrivi degli utenti presso un nodo si ottiene sommando gli arrivi dall'esterno del sistema (che sono poissoniani di parametro γ_i) e gli arrivi dai nodi interni alle rete (che non sono necessariamente poissoniani). Ovvero, se indichiamo con λ_j la frequenza media effettiva degli arrivi al nodo j si ha che essa è data da

$$\lambda_j = \gamma_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_{ij} \qquad\qquad j = 1, \dots, m. \tag{1.8.2}$$

Questo perché $\lambda_i p_{ij}$ rappresenta il contributo agli arrivi nel nodo j da parte del nodo i. Poiché le γ_i sono assegnate, come anche le p_{ij}, la (1.8.2) rappresenta un sistema lineare di m equazioni in m incognite (le λ_j) che quindi ammette soluzione (unica) se la matrice dei coefficienti è non singolare. Definendo i vettori $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$ e $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)^T$, la (1.8.2) può essere scritta in forma vettoriale

$$\Lambda = \Gamma + P^T \Lambda,$$

ovvero, nell'ipotesi che la matrice $(I - P^T)$ sia invertibile, $\Lambda = (I - P^T)^{-1}\Gamma$, dove P è la matrice di routing e I è l'identità $m \times m$.

Si osservi che l'espressione (1.8.2) per la determinazione della frequenza effettiva vale per una generica rete di code aperta, non solamente per reti di Jackson.

Anche per le reti di Jackson aperte è stato dimostrato che, analogamente al caso delle reti in serie, la probabilità congiunta dello stato n è data dalla produttoria delle probabilità di stato dei singoli sistemi (probabilità marginali). Questo significa che si continua ad avere la soluzione in forma prodotto anche per reti che non sono feedforward come invece era richiesto per l'applicazione del Teorema di Burke. Riportiamo ora in dettaglio questo risultato che va sotto il nome di *Teorema di Jackson*.

Caso monoserevente

Supporremo inizialmente che i singoli sistemi a coda componenti la rete siano monoserventi ($s_i = 1$, $i = 1, \dots, m$) e che il fattore di utilizzazione del servente sia dato da $\rho_j = \lambda_j/\mu_j$ dove λ_j è la soluzione del sistema (1.8.2), supponendo che $\rho_j < 1$, $j = 1, \dots, m$.

Teorema di Jackson

Teorema 1.8.2 – Teorema di Jackson. *Sia data una rete aperta di Jackson composta da m nodi ciascuno dei quali è a singolo servente. Allora la distribuzione di probabilità congiunta che la rete di trovi allo stato $n = (n_1, \dots, n_m)$ si fattorizza nel prodotto delle distribuzioni di probabulità marginali, ovvero*

$$P(n) = P(n_1, \dots, n_m) = p_{n_1} p_{n_2} \cdots p_{n_m} \tag{1.8.3}$$

dove

$$p_{n_j} = \rho_j^{n_j}(1 - \rho_j).$$

Dimostrazione: Consideriamo inizialmente il solo nodo $j-$esimo della rete, supponendo che negli altri nodi non avvenga alcuna transizione di stato. Relativamente a questo nodo l'equazione di bilancio (1.8.1) nel passaggio dallo stato $n_j - 1$ allo stato n_j oppure dallo stato n_j allo stato n_{j-1}, si può riscrivere

$$\lambda_{n_j} p_{n_j - 1} = \mu_{n_j} p_{n_j}. \tag{1.8.4}$$

Ma sia λ_{n_j}, sia μ_{n_j} sono costanti e non dipendono dallo stato n_j, pertanto la (1.8.4) si può riscrivere

$$\lambda_j p_{n_j - 1} = \mu_j p_{n_j}. \tag{1.8.5}$$

Avendo assunto che negli altri nodi diversi dal $j-$esimo non ci sono transizioni di stato, la (1.8.5) si può riscrivere

$$\lambda_j P(n_1, \ldots, n_j - 1, \ldots, n_m) = \mu_j P(n_1, \ldots, n_j, \ldots, n_m).$$

ovvero

$$P(n_1, \ldots, n_j, \ldots, n_m) = \rho_j P(n_1, \ldots, n_j - 1, \ldots, n_m).$$

Applicando n_j volte questa relazione si ottiene

$$P(n_1, \ldots, n_j, \ldots, n_m) = \rho_j^{n_j} P(n_1, \ldots, n_{j-1}, 0, n_{j+1}, \ldots, n_m).$$

Ripetendo il procedimento per ogni $j = 1, \ldots, m$ si ha

$$P(n_1, \ldots, n_m) = \prod_{j=1}^{m} \rho_j^{n_j} P(0, \ldots, 0). \tag{1.8.6}$$

Rimane da calcolare il valore di $P(0, \ldots, 0)$ che è la probabilità che tutti i nodi siano allo stato zero, ovvero senza alcun utente presente. Per ottenere tale valore è sufficiente sommare tutte le probablità di stato $P(n_1, \ldots, n_m)$ date dalla (1.8.6) e imporre che si ottenga 1, ovvero

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} \rho_j^{n_j} P(0, \ldots, 0) = 1$$

da cui, nell'ipotesi che le serie presenti convergano ($\rho_j < 1$, $j = 1, \ldots m$), si ha

$$\begin{aligned} P(0, \ldots, 0) &= \frac{1}{\displaystyle\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} \rho_j^{n_j}} \\ &= \frac{1}{\displaystyle\sum_{n_1=0}^{\infty} \rho_1^{n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} \rho_2^{n_2} \cdots \sum_{n_m=0}^{\infty} \rho_m^{n_m}} \\ &= \frac{1}{\dfrac{1}{1-\rho_1} \dfrac{1}{1-\rho_2} \cdots \dfrac{1}{1-\rho_m}} \\ &= (1-\rho_1)(1-\rho_2) \cdots (1-\rho_m). \end{aligned}$$

□

Il Teorema di Jackson fornisce la soluzione in forma prodotto in quanto la probabilità che la rete si trovi allo stato $n = (n_1, \ldots, n_m)$ risulta pari al prodotto delle proabilità che i singoli nodi si trovino rispettivamente negli stati n_j indipendentemente dagli altri nodi.
In virtù di questo teorema la rete può essere analizzata scomponendola in m sistemi a coda M/M/1 indipendenti, ovvero la rete si comporta come se ciascun nodo fosse un nodo isolato indipendente M/M/1 con frequenza media di arrivo λ_j e tempi medi di servizio pari a μ_j, in quanto le p_{n_j} nella (1.8.3) sono proprio le probabilità che n_j utenti sono presenti nel nodo $j-$esimo considerato come sistema M/M/1. Si ribadisce che questo risultato è vero nonstante il fatto che il flusso entrante ad un generico nodo $j-$esimo non è necessariamente poissoninano di paramero λ_j.
La condizione sotto la quale una rete di code ammette distribuzione stazionaria è che la "capacità del servizio" di ogni singolo nodo sia strettamente maggiore della frequenza media effettiva degli arrivi, ovvero $\rho_j = \lambda_j/\mu_j < 1$, $j = 1, \ldots, m$.

Quindi, in virtù del Teorema di Jackson, per studiare una rete di code aperta di Jackson nel caso monoservente è sufficiente determinare le frequenze medie effettive degli arrivi a ciascun nodo j date da λ_j e analizzare indipendente ogni singolo nodo. Quindi si verifica che risulti $\rho_j = \lambda_j/\mu_j < 1$ e si determinano le misure di prestazione ad ogni singolo nodo. Queste verranno poi aggregate opportunamente per avere indicazioni sulla rete. Quindi per ottenere il numero medio di utenti nella rete N, si sommano tutti i valori N_j di ogni singolo nodo, ovvero

$$N = \sum_{j=1}^{m} N_j,$$

dove $N_j = \lambda_j/(\mu_j - \lambda_j)$ è il numero medio di utenti nel nodo $j-$esimo. Per determinare il tempo medio di permanenza nella rete si usa il Teorema di Little e quindi

$$T = \frac{N}{\lambda}, \qquad \text{dove} \qquad \lambda = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i.$$

Se inoltre volessimo determinare il tempo medio di permanenza in un nodo j, si deve porre attenzione al fatto che esso, in generale, non è pari a $T_j = 1/(\mu_j - \lambda_j)$, Questo perché le T_j rappresentano il tempo medio di permanenza nel nodo j ogni volta che l'utente viene processato nel nodo $j-$esimo e quindi coincide con il valore che stiamo cercando solo se l'utente visita il nodo j una sola volta, altrimenti andrà moltiplicato per il valore atteso del numero delle visite di un utente al nodo j (visit count) che indichiamo con ν_j. Il calcolo di tale numero è molto semplice: si consideri, infatti, il rapporto $\gamma_j/\sum_{i=1}^{m}\gamma_i = \gamma_j/\lambda$ che è la frazione di utenti che, provenendo dall'esterno, visitano come primo nodo il nodo

Visit count

$j-$esimo e quindi rappresenta la probabilità che la prima visita di un utente sia al nodo $j-$esimo. Inoltre una frazione p_{ij} di utenti visitano il nodo $j-$esimo proveniendo dal nodo $i-$esimo. Quindi si ha

$$\nu_j = \frac{\gamma_j}{\lambda} + \sum_{i=1}^{m} p_{ij}\nu_i$$

che ammette come soluzione (confrontare la (1.8.2))

$$\nu_j = \frac{\lambda_j}{\lambda}. \tag{1.8.7}$$

Note le μ_j, $j = 1, \ldots, m$, alternativamente si può calcolare T nella forma[7]

$$T = \sum_{j=1}^{m} \nu_j T_j.$$

Esempio 1.8.3 Si consideri una semplice rete di code formata da due nodi: il primo nodo è una stazione di lavorazione, il secondo è una stazione di ispezione–collaudo. I pezzi arrivano dall'esterno alla stazione 1 secondo un processo di Poisson con media 10 pezzi l'ora e successivamente alla lavorazione nella stazione 1 procedono nella stazione 2 per il controllo. Dalla stazione 2 si ha che il 10% dei pezzi collaudati risultano difettosi e tornano alla stazione 1 per essere lavorati di nuovo. Le due stazioni sono monoserventi con tempi di servizio distributi esponenzialmente rispettivamente con media 12 pezzi l'ora e 15 pezzi l'ora. Determinare il numero medio di utenti presenti nella rete e il tempo medio di permanenza.

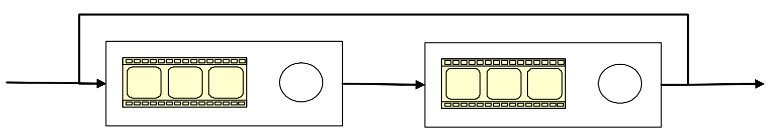

Fig. 1.8.5 Rete dell'Esempio 1.8.3

Calcoliamo innanzitutto le frequenze medie effettive (λ_1 e λ_2). Dalla (1.8.2) si ha il seguente sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 = 10 + 0.1\lambda_2 \\ \lambda_2 = \lambda_1 \end{cases}$$

dal quale si ricava

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 11.111.$$

Le condizioni per l'esistenza della distribuzione stazionaria sono ovviamente verificate in quanto risulta $\rho_1 = \lambda_1/\mu_1 < 1$ e $\rho_2 = \lambda_2/\mu_2 < 1$. Si ricavano

$$N_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = 12.5, \qquad N_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = 2.85, \qquad N = N_1 + N_2 = 15.35 \qquad \text{pezzi},$$

[7]Nell'ambito dei sistemi manufatturieri i nodi di una rete di code vengono, di solito chiamati "*stazioni*" e T viene chiamato "*throughput time*".

da cui $T = N/\lambda = 1.535$ ore.
Per quanto riguarda il valore atteso del numero delle visite risulta

$$\nu_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda} = 1.111, \qquad \nu_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda} = 1.111.$$

Si ha inoltre

$$T_1 = \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} = 1.125 \quad \text{ore}, \qquad T_2 = \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2} = 0.257 \quad \text{ore},$$

e quidi alternativamente si può calcolare

$$T = 1.111 \cdot 1.125 + 1.111 \cdot 0.257 = 1.535 \quad \text{ore}.$$

Esercizio 1.8.4 Si consideri una rete di Jackson aperta composta da 3 stazioni. Alla stazione 1 arrivano utenti dall'esterno della rete con frequenza media di arrivo pari a 1 utente l'ora (arrivi poissoniani). Dalla stazione 1 gli utenti con probabilità 1/3 si recano alla stazione 2 e con probabilità 2/3 raggiungono la stazione 3. Dalla stazione 2 gli utenti tornano all'ingresso della stessa stazione 2 con probabilità 1/2 oppure escono all'esterno della rete. Dalla stazione 3 gli utenti escono all'esterno dalla rete oppure con probabilità 1/3 tornano alla stazione 1. Le stazioni 2 e 3 sono identiche e sono monoserventi con tempi di servizio distribuiti esponenzialmente con $\mu_2 = \mu_3 = 3/2$ utenti l'ora. La stazione 1 è monoservente con tempi di servizio distribuiti esponenzialmente con $\mu_1 = 2$ utenti l'ora. Verificare se esiste la distribuzione stazionaria e in caso affermativo calcolare il numero medio di utenti presenti nella rete e il tempo medio di permanenza.

Caso multiservente

Il Teorema di Jackson enunciato per reti di code costituite da sistemi con singolo servente si estende anche al caso in cui ogni nodo della rete può avere più di un servente. Supponiamo, quindi, che $s_j \geq 1$ sia il numero dei serventi per ciascun nodo $j = 1, \ldots, m$, ed inoltre assumiamo che $\rho_j = \lambda_j/(s_j \mu_j) < 1$. Allora vale il seguente risultato.

Teorema 1.8.3 – Tereoma di Jackson. *La distribuzione di probabilità congiunta che la rete si trovi allo stato $n = (n_1, \ldots, n_m)$ si fattorizza nel prodotto di tutte le distribuzioni marginali, ovvero*

$$P(n) = P(n_1, \ldots, n_m) = p_{n_1} p_{n_2} \cdots p_{n_m},$$

dove

$$p_{n_j} = \begin{cases} \dfrac{1}{n_j!} \left(\dfrac{\lambda_j}{\mu_j} \right)^{n_j} p_{0_j}, & \text{per} \quad n_j < s_j \\[2ex] \dfrac{1}{s! s^{n_j - s_j}} \left(\dfrac{\lambda_j}{\mu_j} \right)^{n_j} p_{0_j}, & \text{per} \quad n_j \geq s_j \end{cases}$$

Di questo teorema non forniamo per brevità la dimostrazione.

Questo teorema afferma che, in maniera del tutto analoga al caso monoservente, la probabilità congiunta si fattorizza nelle probabilità di avere n_j utenti nel nodo $j-$esimo considerato singolarmente come sistema M/M/s_j con frequenza media degli arrivi pari alla frequenza effettiva λ_j e tempo medio di servizio μ_j e questo indipendentemente dagli altri nodi della rete.
Come nel caso monoservente, le misure di prestazione di interesse possono essere calcolate aggregando i valori ottenuti nei singoli nodi.

Esempio 1.8.5 [Gross, Harris, 1998] Si consideri un call center al quale arrivano chiamate secondo la distribuzione di Poisson con media 35 l'ora. Alle chiamate che arrivano il gestore fornisce due opzioni: digitare il tasto 1 per il servizio reclami, oppure digitare 2 per il servizio informazioni. Si stima che il tempo di ascolto del messsaggio e della pressione del tasto sia esponenziale con media 30 secondi. Le chiamate che trovassero occupato vengono poste in attesa con l'assunzione che nessun utente si scoraggia per l'attesa e quindi aspetta comunque di usufruire del servizio. Il 55% delle chiamate chiedono di accedere al servizio reclami e le rimanenti chiedono di accedere al servizio informazioni. Il nodo del processo dei reclami ha 3 serventi (operanti in parallelo) che operano con tempi di servizio distribuiti esponenzialmente con media 6 minuti. Il nodo del processo delle informazioni ha 7 serventi (operanti in parallelo) che operano con tempi di servizio distribuiti esponenzialmente con media 20 minuti. I buffer di attesa si assumono illimitati. Inoltre circa il 2% dei clienti che hanno usufruito del servizio reclami decidono di usufruire anche del servizio informazioni e l'1% dei clienti che hanno usufruito del servizio informazioni chiedono anche di usufruire del servizio reclami. Si vuole determinare la lunghezza media della coda in ciascun nodo e il tempo medio totale che un cliente passa nella in linea con il call center.

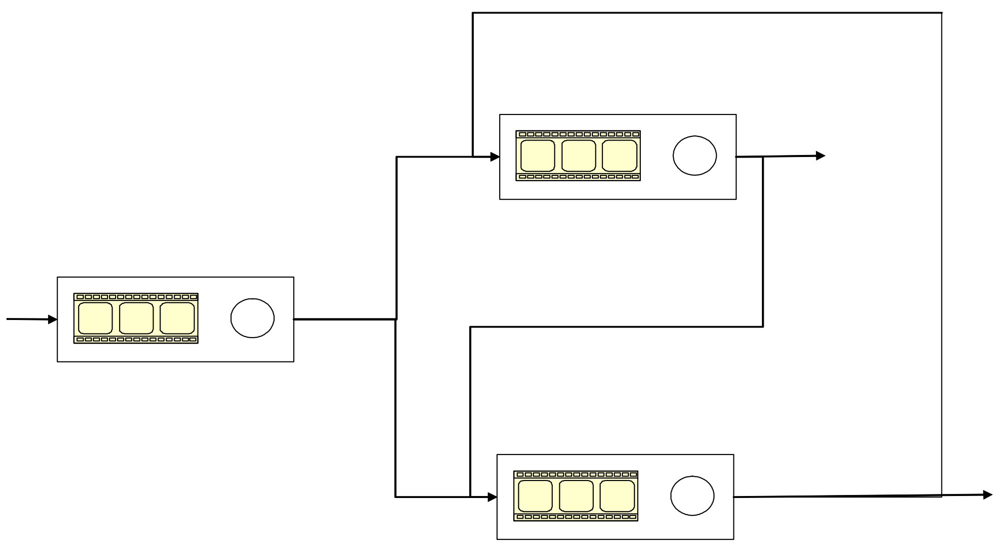

Fig. 1.8.6 Rete dell'Esempio 1.8.5

Risulta $s_1 = 1$, $s_2 = 3$, $s_3 = 7$ e $\mu_1 = 120$, $\mu_2 = 10$, $\mu_3 = 3$. Inoltre si ha $\gamma_1 = 35$ e $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$.
La matrice di routing è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.55 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.01 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la frequenza effettiva utilizzando il sistema (1.8.2):

$$\begin{cases} \lambda_1 = 35 \\ \lambda 2 = 35 \cdot 0.55 + \lambda_3 \cdot 0.01 \\ \lambda_3 = 35 \cdot 0.45 + \lambda_2 \cdot 0.02 \end{cases}$$

dal quale si ricavano

$$\lambda_1 = 35, \qquad \lambda_2 = 19,411, \qquad \lambda_3 = 16.138.$$

Si verifica immediatamente che risulta $\rho_j = \lambda_j/(s_j\mu_j) < 1$ per $j = 1, 2, 3$ e quindi esiste una distribuzione stazionaria per la rete in esame. A questo punto è sufficiente ricavare

- per il primo sistema, dal modello M/M/1 con $\lambda_1 = 35$ e $\mu_1 = 120$, $N_1^q = 0.120$ e $N_1 = 0.412$;
- per il secondo sistema, dal modello M/M/3 con $\lambda_2 = 19,411$ e $\mu_2 = 10$, $N_2^q = 0.765$ e $N_2 = 2.706$;
- per il terzo sistema, dal modello M/M/7 con $\lambda_3 = 16.138$ e $\mu_3 = 3$, $N_3^q = 1.402$ e $N_3 = 6.781$.

Si ottiene immediatamente $N = N_1 + N_2 + N_3 = 9.899$ e quindi

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{N}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} = \frac{9.899}{35} = 0.283 \quad \text{ore},$$

ovvero $T = 17$ minuti circa.

Esercizio 1.8.6 Si consideri una rete di Jackson aperta composta da 4 stazioni. Le stazioni 1 e 2 sono monoservetnti. Nella stazione 3 e 4 ci sono 2 serventi. Alla stazione 1 e alla stazione 2 arrivano utenti dall'esterno della rete con frequenza media di arrivo pari a 1 utente l'ora (arrivi poissoniani). Dalla stazione 1 gli utenti si recano alla stazione 3. Dalla stazione 2 gli utenti si recano alla stazione 3 con probabilità 1/3, oppure si recano all'ingresso della stazione 4. Dalla stazione 3 gli utenti escono all'esterno della rete oppure tornano all'ingresso della stazione 1 con probabilità 1/2. Dalla stazione 4 gli utenti escono dalla rete. I tempi di servizio nelle uattro stazioni sone distribuiti esponenzialmente con $\mu_1 = 7$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 4$ e $\mu_4 = 1$ utenti l'ora. Verificare se esiste la distribuzione stazionaria e in caso affermativo calcolare il numero medio di utenti presenti nella rete e il tempo medio di permanenza.

1.8.5 Reti di Jackson chiuse

Si tratta di reti di code in cui non sono consentiti né arrivi, né partenze di utenti dalla rete e quindi il numero totale di utenti presenti nella rete risulta fissato. Quindi in una rete chiusa il valore di N non è più un valore medio da determinare, ma è un dato del problema.
Anche se il modello che si utilizza non prevede arrivi o partenze dalla rete, da un punto di vista pratico esso rappresenta bene quei casi in cui ogniqualvolta ci sia un utente che esce dalla rete, esso viene immediatamente rimpiazzato da un nuovo utente.
Questa tipologia di rete di code è stata introdotta da Gordon e Newell nel 1967 e ha applicazioni significative nei sistemi di calcolo time-sharing e multi-utente.
Ovviamente, in una rete chiusa il numero degli stati possibili è finito ed è uguale al numero dei modi che si hanno di disporre N utenti (indistinguibili tra di loro) negli m nodi, considerando che ogni nodo può avere al più $N+1$ stati possibili (includendo lo stato 0). Tale numero è dato da

$$\binom{m+N-1}{m-1}.$$

Inoltre, poichè in una rete chiusa il numero degli utenti è limitato, una rete chiusa ammette sempre una distribuzione stazionaria.
Nell'analizzare questo tipo di reti di code, c'è un'importante differenza rispetto alle reti aperte, che sta nella determinazione della frequenza media effettiva di arrivo ad ogni singolo nodo. Infatti, poiché risulta $\gamma_j = 0$ per $j = 1, \ldots, m$, il sistema di equazioni (1.8.2) diventa

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_{ij}, \qquad j = 1, \ldots, m \tag{1.8.8}$$

che quindi ora è un *sistema omogeneo* che in forma matriciale si scrive

$$(I - P^T)\Lambda = 0,$$

dove $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T$ e P è la matrice di routing. Ora, poiché nessun utente può lasciare la rete deve risultare

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1,$$

e quindi la matrice $(I-P)$ non è a rango pieno e il sistema ha almeno un'equazione ridondante, ovvero le m equazioni del sistema non sono indipendenti. Supponendo che il rango della matrice $(I-P)$ sia pari a $m-1$, il sistema ammette infinite soluzioni. Quindi usando le $m-1$ equazioni indipendenti del sistema si possono determinare le λ_j, $j = 1, \ldots, m$ a meno di una costante moltiplicativa.

Siano $\{\bar{\lambda}_j \ , \ j = 1, \ldots, m\}$ una soluzione positiva del sistema (1.8.8) e μ_j la velocità media di servizio nel $j-$esimo nodo.
Esaminiamo inizialmente il caso monoservente, supponendo quindi che il sistema presente in ciascun nodo sia monoservente e sia $\rho_j = \bar{\lambda}_j/\mu_j$. Possiamo ora enunciare l'equivalente del Teorema di Jackson per reti chiuse.

Teorema 1.8.4 *Sia data una rete di Jackson chiusa composta da m nodi a singolo sevente. Allora la distribuzione congiunta è data da*

$$P(n) = P(n_1, \ldots, n_m) = \frac{1}{G(N)} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \cdots \rho_m^{n_m},$$

con $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = N$ e dove

$$G(N) = \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_m \\ n_1 + n_2 + \cdots n_m = N}} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \cdots \rho_m^{n_m}.$$

Dimostrazione: La dimostrazione è analoga a quella del Teorema di Jackson per reti aperte e, in questo caso, si ottiene

$$P(n_1, \ldots, n_m) = \prod_{j=1}^{m} \rho_j^{n_j} C,$$

dove C è una costante che possiamo determinare imponendo che

$$\sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_m \\ n_1 + n_2 + \cdots n_m = N}} C \prod_{j=1}^{m} \rho_j^{n_j} = 1$$

dalla quale si ottiene

$$C = \frac{1}{\displaystyle\sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_m \\ n_1 + n_2 + \cdots n_m = N}} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \cdots \rho_m^{n_m}}.$$

□

Il teorema si estende anche al caso multiservente. Supponiamo quindi che in ogni nodo siano presenti s_j serventi e si introduca la quantità

$$X_j = \frac{\nu_j}{\mu_j}$$

che rappresenta il tempo medio che un utente passa in servizio presso il nodo $j-$esimo e dove ν_j è il valore atteso del numero delle visite al nodo $j-$esimo che soddisfa l'equazione

$$\nu_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} \nu_j.$$

Allora vale il seguente teorema.

Teorema 1.8.5 – Teorema di Gordon–Newell. *La distribuzione congiunta che la rete si trova nello stato* $n = (n_1, \ldots, n_m)$ *è data da*

$$P(n) = P(n_1, \ldots, n_m) = \frac{1}{G(N)} \prod_{j=1}^{m} \hat{p}_{n_j},$$

dove

$$\hat{p}_{n_j} = \begin{cases} \dfrac{X_j^{n_j}}{n_j!}, & \textit{per} \;\; n_j < s_j \\ \dfrac{X_j^{n_j}}{s_j! s_j^{n_j - s_j}}, & \textit{per} \;\; n_j \geq s_j, \end{cases}$$

dove

$$G(N) = \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_m \\ n_1 + n_2 + \cdots n_m = N}} \hat{p}_{n_1} \hat{p}_{n_2} \cdots \hat{p}_{n_m}.$$

È evidente l'analogia formale tra il Teorema di Jackson per le reti aperte e il Teorema di Gordon–Newell. Il coefficiente $G(N)$ è solamente un fattore di normalizzazione che garantisce che la somma di tutte le probabilità sia pari a 1. La determinazione di tale fattore di normalizzazione $G(N)$ può essere non banale per il fatto che la somma che lo definisce è estesa a tutti gli stati possibili della rete e tale numero può risultare molto elevato. Per ovviare a tale inconveniente sono stati definiti algoritmi ricorsivi la cui trattazione esula dallo scopo di queste note.

1.9 RIFERIMENTI DEL CAPITOLO 1

Esiste un'ampia letteratura e numerosi testi specifici dedicati alla Teoria delle code e alle sue applicazioni. Fra questi citiamo il testo classico in due volumi [Kleinrock, 1975], [Kleinrock, 1976] che riporta una trattazione sia elementare sia avanzata della teoria delle code. Un altro testo specifico sulla Teoria delle code è [Cooper, 1981] disponibile in rete all'indirizzo `http://www.cse.fau.edu/~bob/publications/IntroToQueueingTheory_Cooper.pdf`.
La Teoria delle code è sviluppata in modo sintetico anche in numerosi testi di Ricerca Operativa, fra i quali citiamo [Hillier, Lieberman, 2001] che dedica i capitoli 17 e 18 alla Teoria delle code e alle sue applicazioni.
Esiste, inoltre un sito interamente dedicato alla Teoria delle code che riporta numerosi link molto utili: `http://web2.uwindsor.ca/math/hlynka/queue.html`.
Per i richiami di Probabilità e le proprietà sulle distribuzioni di probabilità si può fare riferimento ad un qualsiasi testo di Calcolo delle Probabilità.

Bhat, U. (2008). *An Intoduction to Queueing Theory.* Birkhauser, Boston.

Bertsekas, D., Gallager, R. (1991). *Data Networks.* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, second edition.

Billingsley, P. (1979). *Probability and mesaure.* Wiley and Sons, New York.

Cooper, R. (1981). *Introduction to queueing theory.* North Holland, New York.

Gross, D., Harris, C. (1998). *Fundamental of queueing theory.* Wiley and Sons, New York, third edition.

Kleinrock, L. (1975). *Queueing systems, vol. I: Theory.* Wiley, New York. Disponibile nella traduzione italiana: *Sistemi a coda, Introduzione alla teoria delle code*, Hoepli, 1992.

Kleinrock, L. (1976). *Queueing systems, vol. II: Computer Applications.* Wiley, New York.

Hillier, F., Lieberman, G. (2001). *Introduction to operations research.* McGraw – Hill, New York.

Ross, S. (2003). *Introduction to probability models.* Academic Press, San Diego.

1.10 ESERCIZI DI RIEPILOGO

Esercizio 1.10.1 Dato un processo di nascita e morte con

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \alpha^k \lambda \qquad && k \geq 0, \qquad 0 \leq \alpha < 1 \\ \mu_k &= \mu && k \geq 1 \end{aligned}$$

Ricavare l'espressione delle probabilità p_k (in funzione di p_0).

Esercizio 1.10.2 Si consideri un sistema M/M/1 con parametri λ e μ assegnati. Si supponga che all'arrivo gli utenti entrano nel sistema con probabilità $e^{-\frac{\alpha k}{\mu}}$, dove k è il numero degli utenti presenti nel sistema e $\alpha \geq 0$.

a) Ricondurre il sistema ad un processo di nascita e morte.

b) Determinare sotto quali condizioni il sistema è stabile.

c) Ricavare l'espressione per le probabilità p_k (in funzione di p_0).

Esercizio 1.10.3 Una banca ha 5 cassieri e ciascuno di essi ha una coda di clienti davanti a sé. I clienti che arrivano scelgono una coda a caso e aspettano di essere serviti. Gli arrivi dei clienti nella banca sono poissoniani con frequenza di 40 l'ora e i tempi di servizio di ciascun cassiere sono esponenziali con media di 5 minuti. La banca sta considerando la possibilità di introdurre un sistema a coda unica, in cui ogni cliente viene servito dal primo cassiere che si libera. Determinare qual è l'effetto di questo cambiamento sul tempo medio di attesa in coda. Inoltre, in riferimento al sistema a coda unica, determinare:

a) i valori delle misure di prestazione, ovvero il numero medio di utenti presenti nella banca, il numero medio di utenti in attesa in coda, il tempo medio di permanenza nella banca e il tempo medio attesa in coda;

b) la probabilità che il tempo medio di attesa in coda sia non nullo;

c) la probabilità che nella banca vi siano più di 7 clienti.

Esercizio 1.10.4 Un addetto al reparto spedizioni di un'industria manufatturiera riceve ordini e li evade; egli è in grado di evadere, in media, 15 ordini al giorno e i tempi necessari per elaborare gli ordini sono esponenziali. In media, ogni giorno, vengono ricevuti in maniera casuale (arrivi poissoniani), 12 ordini da evadere; tali ordini si dividono in 3 categorie di importanza che nell'ordine sono:

1. *riordini*: ordini da evadere non appena l'addetto è libero, ovvero non appena ha terminato le operazioni di spedizioni dell'ordine che sta elaborando;

2. *ordini normali*: ordine di minore importanza rispetto ai riordini che però è bene evadere al più presto;

3. *ordini secondari*: ordini destinati ad un magazzino e che quindi possono attendere anche un tempo lungo per essere evasi.

In media, ogni giorno arrivano 2.5 riordini, 4 ordini normali e 5.5 ordini secondari. Descrivere un sistema di code che permette di costruire un modello di questo reparto spedizioni e determinare, per ciascun tipo di ordine

a) il tempo medio di permanenza nel reparto spedizioni;

b) il tempo medio di attesa che passa tra la ricezione dell'ordine da parte del reparto e l'inizio della sua elaborazione;

c) il numero medio di ordini che sono presso tale reparto spedizioni;

d) il numero medio di ordini che sono presso tale reparto spedizioni in attesa di essere elaborati.

Determinare, inoltre, come cambiano i tempi di permanenza nel reparto spedizioni se si assume che l'arrivo di un'ordine di importanza maggiore implica la sua elaborazione immediata e quindi una eventuale interruzione dell'elaborazione di un altro ordine.

Esercizio 1.10.5 Un piccolo albergo dispone di 5 camere e vuole effettuare un'analisi sul servizio prestato alla clientela. Da un'indagine su dati che si riferiscono ad anni passati si è dedotto che i clienti arrivano casualmente (arrivi poissoniani) in media 3 al giorno e che la loro permanenza media nell'albergo è di un giorno ed è distribuita esponenzialmente. Naturalmente, un cliente che arriva e trova l'albergo pieno, si rivolgerà ad un altro albergo.

1. Descrivere un modello di code che permette di rappresentare il sistema ora descritto.
2. Determinare la probabilità che nell'albergo non vi sia nessun cliente.
3. Determinare la probabilità che un cliente arriva e trova l'albergo pieno.
4. Determinare il numero medio di clienti presenti nell'albergo.

Esercizio 1.10.6 Una società costruisce immobili per l'edilizia residenziale. Gli acquirenti stipulano il contratto di acquisto e poi aspettano che l'immobile che hanno acquistato sia realizzato prima di poterne entrare effettivamente in possesso. Vengono stipulati, in media, 9 contratti l'anno secondo una distribuzione di Poisson.
Tale società adotta la strategia di iniziare a costruire una nuova casa non appena è stata completata la costruzione della casa precedente. Inoltre essa dispone di un numero di operai tale da permettere la costruzione, in media, di 12 case l'anno,

ma non è nota la distribuzione di probabilità secondo la quale esse vengono realizzate. Si dispone tuttavia, dei dati relativi al numero dei giorni impiegati l'anno precedente per costruire le case che sono state realizzate durante l'anno; essi sono pari a 30, 32, 29, 34, 27, 29, 29, 33, 30 e 31 giorni (utilizzando questi dati è possibile calcolare la varianza della distribuzione, assumendo che un anno si compone di 365 giorni).

1. Descrivere un sistema di code che permetta di studiare questo problema.
2. Determinare il tempo medio che trascorre tra la stipula del contratto e l'effettiva entrata in possesso della casa da parte dell'acquirente.
3. Determinare il numero medio di contratti attivi, ovvero stipulati ma senza aver effettuato ancora la consegna della casa all'acquirente.
4. Determinare come cambiano le due misure di prestazione calcolate ai due punti precedenti se si assume che i tempi di costruzione delle case sono distribuiti esponenzialmente.
5. Descrivere come è possibile intervenire sui tempi di costruzione delle case per minimizzare il tempo necessario per la consegna delle case agli acquirenti, determinando come cambiano, in questo caso, le due misure di prestazione già calcolate.

Esercizio 1.10.7 Presso un parrucchiere arriva, in media, un cliente ogni 30 minuti e si assume che tali arrivi siano distribuiti esponenzialmente. Il parrucchiere ha tempi di servizio che possiamo assumere anch'essi distribuiti esponenzialmente e in media impega 20 minuti per servire un cliente. Calcolare:

a) La probabilità che il parrucchiere non sia impegnato a servire un cliente.

b) La probabilità che presso il negozio del parrucchiere siano presenti più di tre clienti (tra quelli in coda e quello che sta usufruendo del servizio).

c) Il numero medio di clienti presenti presso il parrucchiere.

d) Il tempo medio che un cliente passa in attesa prima di essere servito e il tempo medio di permanenza presso il negozio del parruchiere.

e) Il numero medio di clienti che sono in coda in attesa di essere serviti.

Supponiamo, ora che presso il parruchiere possano esserci al più tre clienti: due in attesa e uno che è servito. Per motivi di spazio, gli eventuali ulteriori clienti non possono entrare quando presso il parruchiere è già presente il massimo numero di clienti. Calcolare, in questo caso:

a) La probabilità che il negozio del parrucchiere è pieno (ovvero tre utenti sono presenti nel negozio).

b) La frequenza media effettiva di arrivo.

c) La lunghezza media della fila d'attesa (ovvero il numero medio di clienti che è in attesa) e il tempo medio passato da un utente in coda.

d) Il numero medio di clienti presenti presso il parruchiere (ovvero nel negozio).

Calcolare, infine, come varia la percentuale di utilizzazione del servente dal primo caso in cui non ci sono limiti di capacità al secondo caso in cui tale limitazione è presente.

Esercizio 1.10.8 In un'industria manifatturiera un operaio dispone di un'officina ed è responsabile della manutenzione di 4 macchine utensili. Le macchine lavorano, in media, per 15 minuti e poi richiedono 5 minuti di manutenzione in officina. Sia i tempi di lavoro delle macchine prima dell'effettuazione della manutenzione, sia i tempi richiesti per la manutenzione sono distribuiti esponenzialmente.

a) Descrivere un sistema di code che rappresenta bene la situazione descritta.

b) Calcolare la probabilità che nell'officina non sia presente nessuna macchina.

c) Calcolare il numero medio di macchine presenti nell'officina in attesa di effettuare la manutenzione.

d) Calcolare il tempo medio di attesa in coda nell'officina da parte delle macchine prima della manutenzione

Esercizio 1.10.9 Un impiegato di un ufficio addetto al rilascio di autorizzazioni, deve esaminare, per ciascuna persona che la richiede, alcuni moduli e impiega in media 8 minuti a rilasciare un'autorizzazione. Arrivano, in media, 6 persona l'ora ad effettuare tale richiesta. Il tempo impiegato per esaminare i moduli e rilasciare l'autorizzazione è distribuito esponenzialmente e gli arrivi delle persone sono poissoniani.

a) Descrivere il sistema di code che rappresenta bene la situazione descritta.

b) Calcolare la probabilità che l'impiegato non sia impegnato.

c) Calcolare il numero medio di persone che sono in coda in attesa di essere servite.

d) Calcolare il numero medio di presone presenti presenti nell'ufficio.

e) Calcolare il tempo medio che una persona passa in attesa prima di essere servita.

f) Calcolare il tempo medio di permanenza presso l'ufficio.

g) Calcolare la probabilità che nell'ufficio siano presenti 5 persone.

Supponiamo, ora che per motivi di spazio, il numero delle persone che possano essere contenute nell'ufficio sia limitato e pari a 4. Calcolare, in questo caso:

h) La probabilità che l'impiegato non sia impegnato.

i) La frequenza media effettiva di arrivo.

l) La lunghezza media della fila d'attesa (ovvero il numero medio di persone che è in attesa)

m) Il tempo medio passato da una persona in coda.

Esercizio 1.10.10 Un'industria dispone di un magazzino dove gli operai possono reperire gli attrezzi di cui hanno bisogno. Nel magazzino può entrare un operaio alla volta ed impiega, in media, 12 minuti per trovare quello che gli occorre. Se arriva un altro operaio e trova il magazzino già occupato aspetta che l'operaio che è attualmente nel magazzino esca prima di entrare. Gli operai sono 5 e cercano, in media un attrezzo ogni 15 minuti. Si suppone che gli arrivi degli operai al magazzino siano poissoniani e che i tempi per la ricerca degli attrezzi siano distribuiti esponenzialmente.

a) Descrivere un sistema di code che rappresenta bene la situazione descritta.

b) Calcolare la probabilità che nel magazzino non sia presente nessun operaio.

c) Calcolare la probabilità che tutti i 5 operai siano contemporaneamente presso il magazzino (uno all'interno, gli altri in attesa).

d) Calcolare il numero medio di operai in attesa di entrare nel magazzino.

Esercizio 1.10.11 In una stazione di servizio ci sono quattro postazioni per l'autolavaggio, identiche, indipendenti e che lavorano in parallelo. Le auto arrivano alla stazione di servizio casualmente (arrivi poissoniani) in media 34 l'ora. Il tempo del lavaggio è uguale in ciascuna postazione ed è distribuito esponenzialmente e in media vengono lavate 10 auto l'ora. Un auto che arriva e trova tutte le quattro postazioni occupate aspetta in fila il suo turno (le auto vengono lavate sulla base del primo arrivato, primo servito)

a) Descrivere un sistema di code che rappresenti la situazione descritta;

b) calcolare la probabilità che ci siano piú di 3 auto in attesa del lavaggio;

c) calcolare il numero medio di auto che sono in attesa del lavaggio;

d) spiegare che cosa accadrebbe al sistema di code se tre delle quattro postazioni fossero non funzionanti, ovvero se la stazione di servizio fosse dotata di una sola postazione.

Supponiamo, ora, che un auto che arriva e che trova tutte le quattro postazioni occupate, deve attendere il proprio turno in un parcheggio che ha una capienza massima di tre auto; se anche il parcheggio risultasse pieno, allora l'auto rinuncia definitivamente ad entrare nella stazione di servizio.

e) Descrivere un sistema di code che rappresenti la situazione descritta;

f) calcolare la probabilità che le quattro postazioni siano tutte libere;

g) calcolare la probabilità che un'auto ha di dover rinunciare ad entrare nella stazione di servizio.

Sulla base di quest'ultimo sistema, descritto al punto e), la stazione sta studiando alcune variazioni operative. La prima consiste nell'intervenire solamente sul parcheggio, eliminandolo e quindi non permettendo piú l'attesa delle auto che trovano le quattro postazioni occupate.

h) Descrivere un sistema di code che rappresenti questa prima variazione operativa;

i) calcolare, in questo caso, la probabilità che un'auto ha di dover rinunciare ad entrare nella stazione di servizio.

Un'altra variazione operativa rispetto al sistema descritto al punto *e)* consiste nell'eliminare tre postazioni, lasciandone una solamente e raddoppiando lo spazio del parcheggio per permettere l'attesa.

l) Descrivere un sistema di code che rappresenti questa seconda variazione operativa;

m) calcolare la probabilità che un'auto ha di dover rinunciare ad entrare nella stazione di servizio;

n) calcolare il numero medio di auto che sono in attesa del lavaggio;

o) calcolare il tempo che, in media, un auto trasorre presso la stazione di servizio;

p) dire sotto quali condizioni c'è il raggiungimento delle condizioni stazionarie.