SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione,
Informatica e Statistica

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
e Automatica

anno accademico 2020-2021

Esercizi svolti di

Ricerca Operativa

6 CFU

Massimo Roma

Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale
"A. Ruberti"

Pagina web del corso:
http://www.diag.uniroma1.it/roma/didattica/ro20-21.htm

1
Introduzione

Non sono previsti esercizi riguardanti il Capitolo 1.

2

La Programmazione Matematica

2.1 PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE MATEMATICA

Esercizio 2.1.1 *Si consideri una funzione obiettivo* $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 7x_1 + 5x_2 + x_3$ *da massimizzare con i vincoli* $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 8$, $-2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$. *Si scriva il problema di Programmazione Matematica corrispondente nella forma*

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \ge b_i \quad i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

e dire di che tipo di problema di Programmazione Matematica si tratta.

Soluzione.
Dopo aver riscritto i vincoli nella forma $-x_1 - 2x_2 - 3x_3 \ge -8$, $2x_1 - 3x_2 - x_3 \ge -6$ il problema si può formulare nel seguente modo:

$$\begin{cases} \min -(2x_1^2 + 7x_1 + 5x_2 + x_3) \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \ge -8 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 \ge -6 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

che è un problema di Programmazione Non Lineare. □

Esercizio 2.1.2 *Classificare i seguenti problemi di Programmazione Matematica:*

$$(A) \qquad \begin{cases} \max(x_1 + x_2 + 7x_3) \\ x_1 + 3x_2 + x_1x_3 \le 9 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 \le 10 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$(B) \qquad \begin{cases} \min(2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4) \\ 5x_1 + x_2 + x_3 \ge 11 \\ x_1 + x_2 + 5x_4 \le 9 \\ 8x_1 - 23x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 72 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_3 \ge 0 \\ x_4 \ge 0 \\ \end{cases}$$

$$(C) \qquad \begin{cases} \max(x_1 + x_2) \\ -x_1 - x_2 + 14x_3 - x_4 = 10 \\ x_1 + 7x_2 - x_4 = 21 \\ -33x_1 - x_2 + 25x_4 = 89 \\ -x_2 - x_4 = 21 \end{cases}$$

Soluzione.
Il problema *(A)* è un Problema di Programmazione Non Lineare
Il problema *(B)* è un Problema di Programmazione Lineare
Il problema *(C)* è un Problema di Programmazione Lineare

3

Modelli di Programmazione Lineare

3.1 MODELLI DI ALLOCAZIONE OTTIMA DI RISORSE

Esercizio 3.1.1 *Un'industria manifatturiera può fabbricare 5 tipi di prodotti che indichiamo genericamente con* **P1**, **P2**, **P3**, **P4**, **P5** *usando 2 processi di produzione che avvengono mediante l'uso di due macchine che indichiamo con* **M1** *e* **M2**. *Dopo aver dedotto il costo del materiale grezzo, ciascuna unità di prodotto dà i seguenti profitti (in migliaia di lire)*

P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**
250	*300*	*500*	*450*	*180*

Ciascuna unità di prodotto richiede un certo tempo di ciascuno dei 2 processi; la tabella che segue riporta i tempi (in ore) di lavorazione di ciascuna macchina per ottenere una unità di ciascuno dei prodotti finiti

	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**
M1	*10*	*15*	*7*	*18*	–
M2	*9*	*13*	–	–	*20*

Inoltre, l'assemblaggio finale per ciascuna unità di ciascun prodotto richiede 18 ore di lavoro di un operaio. La fabbrica possiede 4 macchine **M1** *e 3 macchine* **M2** *che sono in funzione 5 giorni alla settimana per 2 turni di 8 ore al giorno. Gli operai impiegati nell'assemblaggio sono 10 e ciascuno di essi lavora 5 giorni alla settimana per un turno di 8 ore al giorno. Trovare la quantità che conviene produrre di ciascun prodotto per massimizzare il profitto totale.*

Formulazione.

Costruiamo un modello di Programmazione Matematica rappresentante il problema in analisi supponendo di voler pianificare la produzione settimanale. È immediato verificare che anche in questo caso le ipotesi fondamentali della Programmazione Lineare sono soddisfatte.

– *Variabili di decisione.* È naturale introdurre le variabili reali x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 rappresentanti rispettivamente le quantità di prodotto **P1**, **P2**, **P3**, **P4**, **P5** che conviene fabbricare in una settimana.

– *Funzione Obiettivo.* Ciascuna unità di prodotto finito contribuisce al profitto totale secondo la tabella data. Quindi il profitto totale sarà

$$250x_1 + 300x_2 + 500x_3 + 450x_4 + 180x_5. \tag{3.1.1}$$

L'obiettivo della fabbrica sarà quello di scegliere le variabili x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 in modo che l'espressione (3.1.1) del profitto sia massimizzata. La (3.1.1) rappresenta la funzione obiettivo.

– *Vincoli.* Ovviamente la capacità produttiva della fabbrica sia dal punto di vista delle macchine, sia dal punto di vista degli operai, limita i valori che possono assumere le variabili x_j, $j = 1, \ldots, 5$. Si hanno solo 4 macchine **M1** che lavorano per un totale di 320 ore settimanali e poiché ciascuna unità di prodotto **P1** usa per 10 ore la macchina **M1**, ciascuna unità di prodotto **P2** la usa per 15 ore e così via per gli altri prodotti, si dovrà avere

$$10x_1 + 15x_2 + 7x_3 + 18x_4 \leq 320. \tag{3.1.2}$$

Ragionando in modo analogo per la macchina **M2** si ottiene

$$9x_1 + 13x_2 + 20x_5 \leq 240. \tag{3.1.3}$$

Inoltre si hanno solo 10 uomini per l'assemblaggio, ciascuno dei quali lavora 40 ore a settimana e quindi si ha una capacità lavorativa settimanale di 400 ore. Poiché ciascuna unità di prodotto prevede 18 ore di lavoro di assemblaggio si dovrà avere

$$18x_1 + 18x_2 + 18x_3 + 18x_4 + 18x_5 \leq 400. \tag{3.1.4}$$

Le espressioni (3.1.2), (3.1.3) e (3.1.4) costituiscono i vincoli del modello. Ci sono inoltre vincoli impliciti dovuti al fatto che le variabili x_j, $j = 1, \ldots 5$ rappresentando quantità di prodotto non possono essere negative. Questa limitazione va esplicitata e quindi vanno aggiunti i vincoli

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

La formulazione finale sarà quindi

$$\begin{cases} \max\,(250x_1 + 300x_2 + 500x_3 + 450x_4 + 180x_5) \\ 10x_1 + 15x_2 + 7x_3 + 18x_4 \leq 320 \\ 9x_1 + 13x_2 + 20x_5 \leq 240 \\ 18x_1 + 18x_2 + 18x_3 + 18x_4 + 18x_5 \leq 400 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Questa formulazione è un problema matematico ben definito e costituisce il modello di Programmazione Matematica rappresentante il problema di pianificazione della produzione industriale in analisi. □

Esercizio 3.1.2 *Un'industria produce 4 tipi di elettrodomestici* **E1***,* **E2***,* **E3***,* **E4** *ed è divisa in 3 reparti. Ciascun reparto può fabbricare ciascuno tipo di elettrodomestico. Questa industria dispone di 100 operai cosí ripartiti: 40 nel reparto 1, 35 nel reparto 2 e 25 nel reparto 3. Ciascun operaio lavora 5 giorni la settimana, per 8 ore al giorno. La tabella che segue riporta, per ciascun tipo di elettrodomestico e per ciascun reparto, il tempo di lavorazione (in ore) necessario per ottenere un elettrodomestico pronto per la vendita, insieme al prezzo di vendita unitario in migliaia di lire.*

	E1	**E2**	**E3**	**E4**
Reparto 1	*1*	*1.5*	*0.5*	*1.6*
Reparto 2	*1.2*	*1.3*	*0.6*	*1*
Reparto 3	*0.8*	*1.7*	*0.7*	*1.3*
prezzo di vendita	*800*	*1200*	*950*	*1100*

Questa industria deve pianificare la sua produzione settimanale, deve cioè determinare il numero di ciascuno degli elettrodomestici che deve essere fabbricato da ciascun reparto in modo da soddisfare un ordine di almeno 1000, 600, 300, 200 elettrodomestici rispettivamente del tipo **E1***,* **E2***,* **E3***,* **E4** *e in modo da massimizzare il profitto complessivo ricavato dalla vendita.*

Formulazione.
È un problema di pianificazione in cui ciascun reparto è in grado di ottenere un prodotto finito.

– *Variabili.* Si devono distinguere il numero di elettrodomestici prodotti in ciascun reparto e quindi una naturale associazione delle variabili di decisione è la seguente: si indica con x_{ij}, $i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3, 4$, il numero di elettrodomestici del tipo **E**j da produrre settimanalmente nel reparto i-esimo.

– *Funzione obiettivo.* Sarà data dal profitto complessivo ricavato dalla vendita e quindi è

$$800(x_{11}+x_{21}+x_{31})+1200(x_{12}+x_{22}+x_{32})+950(x_{13}+x_{23}+x_{33})+1100(x_{14}+x_{24}+x_{34})$$

– *Vincoli.* Si devono considerare i vincoli dovuti alla limitata disponibilità settimanale di ore lavorative; in particolare, vista la distribuzione degli operai nei reparti si hanno al piú le seguenti disponibilità orarie: 1600 ore nel reparto 1, 1400 ore nel reparto 2 e 1000 ore nel reparto 3. Pertanto in base ai tempi di lavorazione riportati nella tabella i vincoli da considerare sono:

$$\begin{array}{rcl} x_{11} + 1.5x_{12} + 0.5x_{13} + 1.6x_{14} & \leq & 1600 \\ 1.2x_{21} + 1.3x_{22} + 0.6x_{23} + x_{24} & \leq & 1400 \\ 0.8x_{31} + 1.7x_{32} + 0.7x_{33} + 1.3x_{34} & \leq & 1000. \end{array}$$

Inoltre si devono considerare dovuti all'ordine da soddisfare che possono essere scritti nella forma

$$\begin{array}{rcl} x_{11} + x_{21} + x_{31} & \geq & 1000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} & \geq & 600 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} & \geq & 300 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} & \geq & 200. \end{array}$$

Infine devono essere esplicitati i vincoli di

- non negatività delle variabili $x_{ij} \geq 0,\ i = 1,2,3,\ j = 1,2,3,4$
- interezza delle variabili $x_{ij} \in \mathbf{Z},\ i = 1,2,3,\ j = 1,2,3,4.$

Quindi la formulazione completa è:

$$\begin{cases} \max\,(800(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 1200(x_{12} + x_{22} + x_{32}) \\ \quad +950(x_{13} + x_{23} + x_{33}) + 1100(x_{14} + x_{24} + x_{34})) \\ x_{11} + 1.5x_{12} + 0.5x_{13} + 1.6x_{14} \leq 1600 \\ 1.2x_{21} + 1.3x_{22} + 0.6x_{23} + x_{24} \leq 1400 \\ 0.8x_{31} + 1.7x_{32} + 0.7x_{33} + 1.3x_{34} \leq 1000 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 1000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 600 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 300 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 200 \\ x_{ij} \geq 0, \quad x_{ij} \in \mathbf{Z}, \quad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

□

Esercizio 3.1.3 *Una azienda agricola si è specializzata nella coltivazione di granoturco e nell'allevamento di vitelli. Questi due beni vengono prodotti con tre sistemi diversi: con un primo sistema vengono allevati 1000 vitelli utilizzando 30 mesi/uomo di lavoro, 20 ettari di terreno e 200 tonnellate di granoturco. Con il secondo sistema vengono prodotte 100 tonnellate di granoturco usando 20 mesi/uomo e 40 ettari di terreno. Con il terzo sistema si producono 200 tonnellate di granoturco e si allevano 500 vitelli usando 40 mesi/uomo di lavoro e 50 ettari di terreno. Il granoturco viene venduto a £100000 a tonnellata ed i vitelli a £30000 ciascuno.*
L'azienda possiede 70 ettari di terreno e può disporre di 50 mesi/uomo di lavoro. Si vuole individuare quanto produrre con ciascuno dei tre sistemi in modo da massimizzare i profitti.

Analisi del problema e costruzione del modello
La situazione proposta può essere riassunta nella seguente tabella:

		Risorse		
Sistema di produzione	Produzione annua	Terreno (ettari)	granoturco (ton.)	mesi/uomo
1	1000 vitelli	20	200	30
2	100 t. granoturco	40	-	20
3	200 t. granot. 500 vitelli	50	-	40

Si suppone che i livelli di attività siano variabili continue e quindi si tratta di formulare un problema di PL continuo. Si suppone inoltre che l'azienda sia autosufficiente, cioè non acquisti nessun bene da terzi.

Formulazione.

– *Variabili.* Si considerano come variabili di decisione i livelli di attività di ciascuno dei tre sistemi di produzione; indichiamo quindi con x_i il livello di attività dell'i-esimo sistema di produzione.

– *Vincoli.* Per quanto riguarda i vincoli si hanno:

- *vincoli di capacità produttiva.* Sono i vincoli sulla risorsa mesi/uomo e vincoli sulla risorsa terreno:

$$30x_1 + 20x_2 + 40x_3 \leq 50$$

$$20x_1 + 40x_2 + 50x_3 \leq 70$$

- *vincoli di disponibilità di materie prime.* Il granoturco prodotto deve essere almeno pari alla quantità consumata con il sistema di produzione 1 (per l'ipotesi di autosufficienza):

$$100x_2 + 200x_3 - 200x_1 \geq 0.$$

- *vincoli di non negatività.* Si tratta di livelli di produzione e quindi deve essere
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0.$$

– *Funzione obiettivo.* Per quanto riguarda la funzione obiettivo si tratta di massimizzare i profitti, cioè la differenza tra ricavo e costi. Il ricavo è dato dalla vendita del granoturco e dei vitelli; si deve tenere conto del fatto che parte del granoturco prodotto non è venduto ma viene utilizzato come risorsa nel primo sistema di produzione, quindi la funzione obiettivo da massimizzare sarà

$$30000(1000x_1 + 500x_3) + 100000(100x_2 + 200x_3 - 200x_1),$$

cioè:
$$10^6(10x_1 + 10x_2 + 35x_3).$$

Complessivamente possiamo scrivere il problema come:

$$\begin{cases} \max 10^6(10x_1 + 10x_2 + 35x_3) \\ 30x_1 + 20x_2 + 40x_3 \leq 50 \\ 20x_1 + 40x_2 + 50x_3 \leq 70 \\ 100x_2 + 200x_3 - 200x_1 \geq 0 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Esercizio 3.1.4 *Un'impresa può usare tre procedimenti differenti (***P1***,* **P2***,* **P3***) per la produzione di un bene. Per la produzione di un'unità di bene è necessario l'impiego di tre macchine per tempi che dipendono dal procedimento usato e che sono riportati nella seguente tabella (in ore):*

	P1	**P2**	**P3**
Macchina A	*2*	*1*	*3*
Macchina B	*4*	*2*	*3*
Macchina C	*3*	*4*	*2*

Ogni macchina è disponibile per 50 ore. Il profitto per la vendita di un'unità di prodotto dipende dal procedimento usato ed è riportato nella seguente tabella (in migliaia di lire):

	P1	**P2**	**P3**
Profitto	*15*	*18*	*10*

Formulare i problemi di Programmazione Lineare che permettono

a) *di massimizzare il profitto;*

b) *di minimizzare il numero di ore di impiego della macchina B, con il vincolo che il profitto sia almeno 200.*

Analisi del problema e costruzione del modello
Si suppone che si tratti di produrre un bene frazionabile, quindi si vuole formulare un problema di (PL) continuo. La formulazione è diversa se si intende che un'unità di bene deve essere processata in sequenza sulle macchine A, B e C oppure se un'unità di bene può essere prodotta indifferentemente sulla macchina A, B o C con tre procedimenti diversi su ciascuna macchina (in totale con 9 procedimenti diversi). Riportiamo entrambe le formulazioni.
Formulazione 1.
Ogni unità di bene, prodotta con un qualunque procedimento $i = 1, 2, 3$, deve essere lavorata su tutte le macchine A, B e C. In questo caso si può costruire il seguente modello.

– *Variabili.* Siano x_i con $i = 1, 2, 3$ le unità di bene prodotto con procedimento i.
Quesito a) In questo caso i vincoli e la funzione obiettivo sono:

– *Vincoli.* Si devono considerare i vincoli sulla capacità produttiva, infatti le macchine possono lavorare solo 50 ore e quindi si ha:

$$\begin{array}{rcll} 2x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq & 50 & \qquad \text{macchina A} \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq & 50 & \qquad \text{macchina B} \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \leq & 50 & \qquad \text{macchina C} \end{array}$$

Si hanno, inoltre, i vincoli di non negatività sulle variabili in quanto si tratta di quantità prodotte, quindi

$$x_i \geq 0 \quad \text{con} \quad i = 1, 2, 3.$$

– *Funzione obiettivo.* È data del profitto da massimizzare e quindi può essere scritta

$$15x_1 + 18x_2 + 10x_3.$$

Complessivamente il problema di (PL) relativo al quesito a) si scrive:

$$\begin{cases} \max(15x_1 + 18x_2 + 10x_3) \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 50 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 50 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 50 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Quesito b) Per quanto riguarda il punto b) la *funzione obiettivo* è il numero di ore di impiego della macchina B che si vogliono minimizzare, cioè

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3.$$

I vincoli sono gli stessi del punto a) con in aggiunta un vincolo sul profitto minimo:

$$15x_1 + 18x_2 + 10x_3 \geq 200.$$

Complessivamente il problema di (PL) relativo al quesito b) si scrive:

$$\begin{cases} \min(4x_1 + 2x_2 + 3x_3) \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 50 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 50 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 50 \\ 15x_1 + 18x_2 + 10x_3 \geq 200 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Formulazione 2.
In questo caso si devono distinguere le unità di bene prodotte con procedimento i utilizzando la macchina j, cioè con modalità ij. Quindi in questo caso si può costruire il seguente modello.

– *Variabili.* Si introducono le variabili x_{ij} con $i = 1, 2, 3$ e $j = A, B, C$, che rappresentano le unità di bene prodotto con modalità ij.
Quesito a) In questo caso i vincoli e la funzione obiettivo sono:

– *Vincoli.* Si devono considerare i vincoli di capacità in quanto le macchine possono lavorare solo 50 ore e quindi:

$$\begin{aligned} 2x_{1A} + x_{2A} + 3x_{3A} &\leq 50 \\ 4x_{1B} + 2x_{2B} + 3x_{3B} &\leq 50 \\ 3x_{1C} + 4x_{2C} + 2x_{3C} &\leq 50 \end{aligned}$$

Si devono inoltre esplicitare i vincoli di non negatività in quanto si tratta di quantità prodotte, e quindi

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{con} \quad i = 1, 2, 3 \quad j = A, B, C.$$

– *Funzione obiettivo.* È data dal profitto da massimizzare. Il profitto dipende solo dal procedimento usato, non dalla macchina su cui è stato realizzato, quindi:

$$15 \sum_{j=A,B,C} x_{1j} + 18 \sum_{j=A,B,C} x_{2j} + 10 \sum_{j=A,B,C} x_{3j}.$$

Complessivamente il problema di (PL) relativo al quesito a) si scrive:

$$\begin{cases} \max 15 \sum_{j=A,B,C} x_{1j} + 18 \sum_{j=A,B,C} x_{2j} + 10 \sum_{j=A,B,C} x_{3j} \\ 2x_{1A} + x_{2A} + 3x_{3A} \leq 50 \\ 4x_{1B} + 2x_{2B} + 3x_{3B} \leq 50 \\ 3x_{1C} + 4x_{2C} + 2x_{3C} \leq 50 \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \quad j = A, B, C. \end{cases}$$

Quesito b) Per quanto riguarda il punto b) la *funzione obiettivo* è il numero di ore di impiego della macchina B che si vogliono minimizzare, cioè

$$4x_{1B} + 2x_{2B} + 3x_{3B}.$$

I vincoli sono gli stessi del punto a) con in aggiunta un vincolo sul profitto minimo:

$$15 \sum_{j=A,B,C} x_{1j} + 18 \sum_{j=A,B,C} x_{2j} + 10 \sum_{j=A,B,C} x_{3j} \geq 200.$$

Complessivamente il problema di (PL) relativo al quesito b) si scrive:

$$\begin{cases} \min(4x_{1B} + 2x_{2B} + 3x_{3B}) \\ 2x_{1A} + x_{2A} + 3x_{3A} \leq 50 \\ 4x_{1B} + 2x_{2B} + 3x_{3B} \leq 50 \\ 3x_{1C} + 4x_{2C} + 2x_{3C} \leq 50 \\ 15 \sum_{j=A,B,C} x_{1j} + 18 \sum_{j=A,B,C} x_{2j} + 10 \sum_{j=A,B,C} x_{3j} \geq 200 \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \quad j = A, B, C. \end{cases}$$

$\square$

3.2 MODELLI DI MISCELAZIONE

Esercizio 3.2.1 *Una raffineria produce quattro tipi di benzine grezze (* $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{B_3}$, $\mathbf{B_4}$*) e le miscela allo scopo di ottenere carburanti di due diverse qualità (* $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$*). Le quantità di benzine grezze non utilizzate nella produzione delle miscele possono essere vendute direttamente. La seguente tabella riassume i dati delle benzine grezze, cioè il numero di ottani, la quantità (in ettolitri) che si può produrre al giorno e il costo (in migliaia di lire) di un ettolitro di ciascuna benzina.*

	$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{B_3}$	$\mathbf{B_4}$
n. ottani	*90*	*73*	*79*	*86*
ettolitri	*3500*	*6000*	*4500*	*5200*
costo	*260*	*210*	*190*	*220*

Nella seguente tabella sono riportate le caratteristiche che devono avere le miscele cioè il minimo numero di ottani e il prezzo di vendita di un ettolitro di carburante (in migliaia di lire)

	$\mathbf{C_1}$	$\mathbf{C_2}$
min. n. ottani	*80*	*85*
prezzo	*350*	*520*

Inoltre il mercato è in grado di assorbire non più di 25000 ettolitri al giorno del carburante $\mathbf{C_1}$*, mentre richiede almeno 10000 ettolitri al giorno di carburante* $\mathbf{C_2}$*. Infine, i quantitativi di benzine grezze prodotti ma non utilizzati nella preparazione delle miscele sono rivenduti al prezzo di 280 migliaia di lire per ettolitro se il numero di ottani è non inferiore a 80, e a 250 migliaia di lire per ettolitro altrimenti. Occorre pianificare la produzione giornaliera della raffineria, cioè le quantità e le composizioni delle due miscele, massimizzando il profitto ottenuto dalla vendita dei prodotti. Assumere che il numero di ottani di ciascuna miscela dipenda in modo lineare dalle gradazioni delle benzine componenti.*

Formulazione.

– *Variabili.* È conveniente scegliere come variabili di decisione le quantità (in ettolitri) di benzina grezza $\mathbf{B_i}$ utilizzate nella miscela $\mathbf{C_j}$ che indichiamo con x_{ij}, $i = 1, \dots, 4$, $j = 1, 2$. Inoltre denotiamo con y_i, $\quad i = 1, \dots, 4$ le quantità di benzine grezze prodotte ma non utilizzate nelle miscele.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da massimizzare è data dal ricavo ottenuto dalla vendita dei prodotti sottratto dei costi di produzione. Quindi è data da

$$\begin{aligned} z &= 350(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+520(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42})+\\ &+ 280(y_1+y_4)+250(y_2+y_3)+\\ &- 260(x_{11}+x_{12}+y_1)-210(x_{21}+x_{22}+y_2)+\\ &- 190(x_{31}+x_{32}+y_3)-220(x_{41}+x_{42}+y_4). \end{aligned}$$

– *Vincoli.* I vincoli sulla capacità produttiva sono

$$x_{11}+x_{12}+y_1 \le 3500$$

per quanto riguarda la benzina $\mathbf{B_1}$ e analoghi per le altre benzine. Tuttavia tali vincoli possono essere imposti, senza perdere generalità, come vincoli di uguaglianza considerando che non vi è alcuna convenienza a sotto-utilizzare le capacità produttive della raffineria:

$$x_{11}+x_{12}+y_1 = 3500$$

$$x_{21}+x_{22}+y_2 = 6000$$

$$x_{31}+x_{32}+y_3 = 4500$$

$$x_{41}+x_{42}+y_4 = 5200.$$

Analizziamo ora i vincoli dovuti al minimo numero di ottani che devono avere le miscele; essi sono dati da

$$\begin{array}{rcl} 90x_{11}+73x_{21}+79x_{31}+86x_{41} &\ge& 80(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})\\ 90x_{12}+73x_{22}+79x_{32}+86x_{42} &\ge& 85(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}). \end{array} \qquad (3.2.1)$$

A queste espressioni si può anche arrivare considerando che il numero degli ottani di ciascuna miscela, per ipotesi, dipende linearmente dalle gradazioni delle benzine componenti e quindi è dato dalla media pesata dei numeri di ottani delle benzine componenti, con pesi costituiti dalle quantità di ciascun componente; quindi il numero di ottani della $j-$esima miscela è dato da

$$\frac{90x_{1j}+73x_{2j}+79x_{3j}+86x_{4j}}{x_{1j}+x_{2j}+x_{3j}+x_{4j}}.$$

Questa espressione è valida solamente se la miscela è prodotta in quantità non nulla, perché in questo caso il denominatore è non nullo. Esprimendo con una disequazione la richiesta che il numero di ottani di tale miscela sia non inferiore al rispettivo limite minimo e moltiplicando entrambi i membri della disequazione per il denominatore della frazione si ottengono i vincoli richiesti nella forma data dalle (3.2.1) che valgono anche nel caso di produzione nulla delle miscele. Svolgendo i calcoli nelle (3.2.1) si ottengono i seguenti vincoli

$$10x_{11}-7x_{21}-x_{31}+6x_{41} \ge 0$$

$$5x_{12} - 12x_{22} - 6x_{32} + x_{42} \geq 0.$$

Si devono inoltre esprimere vincoli di mercato, cioè

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 25000$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geq 10000$$

e i vincoli di non negatività sulle variabili

$$x_{ij} \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4; \quad j = 1, \dots, 3.$$

Quindi, la formulazione completa è

$$\begin{cases} \max(90x_{11} + 140x_{21} + 160x_{31} + 130x_{41} + 260x_{12} + 310x_{22} + \\ \quad +330x_{32} + 300x_{42} + 20y_1 + 40y_2 + 60y_3 + 60y_4) \\ x_{11} + x_{12} + y_1 = 3500 \\ x_{21} + x_{22} + y_2 = 6000 \\ x_{31} + x_{32} + y_3 = 4500 \\ x_{41} + x_{42} + y_4 = 5200 \\ 10x_{11} - 7x_{21} - 1x_{31} + 6x_{41} \geq 0 \\ 5x_{12} - 12x_{22} - 6x_{32} + 1x_{42} \geq 0 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 25000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geq 10000 \\ x_{ij} \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4; \quad j = 1, 2. \end{cases}$$

□

Esercizio 3.2.2 *Una compagnia petrolifera produce 2 tipi di gasolio che vengono venduti rispettivamente a 18 c/gal e a 21 c/gal. La raffineria può comprare quattro tipi di greggio con le seguenti analisi percentuali del contenuto di tre sostanze* **A**, **B** *e* **C** *e al prezzo (al gallone) riportato nella seguente tabella*

Greggio	**A**	**B**	**C**	**prezzo**
tipo 1	*80%*	*10%*	*10%*	*14 c*
tipo 2	*30%*	*30%*	*40%*	*10 c*
tipo 3	*70%*	*10%*	*20%*	*15 c*
tipo 4	*40%*	*50%*	*10%*	*12 c*

Il tipo di gasolio da 21 c deve avere almeno il 60 % di sostanza **A** *e non più del 35% della sostanza* **C**. *Il tipo da 18 c non deve avere più del 18% di sostanza* **C**. *Determinare le quantità relative di greggio da usare in modo da minimizzare il costo del greggio occorrente.*

Formulazione.
È un problema di miscelazione e una sua formulazione come problema di Programmazione Lineare è la seguente.

– *Variabili.* Introduciamo le variabili x_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, 4$ rappresentanti le quantità percentuali di greggio di tipo j da usare nella miscela i, intendendo per miscela 1 il gasolio da 18 c/gal e per miscela 2 il gasolio da 21 c/gal.

– *Funzione obiettivo.* È data dal costo complessivo del greggio occorrente e quindi da

$$14\,(x_{11} + x_{21}) + 10\,(x_{12} + x_{22}) + 15\,(x_{13} + x_{23}) + 12\,(x_{14} + x_{24})\,.$$

– *Vincoli.* Si devono imporre i seguenti vincoli sul contenuto delle varie sostanze

$$\begin{aligned} 0.1x_{11} + 0.4x_{12} + 0.2x_{13} + 0.1x_{14} &\leq 0.18 \\ 0.8x_{21} + 0.3x_{22} + 0.7x_{23} + 0.4x_{24} &\geq 0.6 \\ 0.1x_{21} + 0.4x_{22} + 0.2x_{23} + 0.1x_{24} &\leq 0.35 \end{aligned}$$

e poiché si tratta di quantità percentuali,

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1. \end{aligned}$$

Infine i vincoli di non negatività $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, 4$ □

Esercizio 3.2.3 *Una città deve essere rifornita, ogni giorno, con 500000 litri di acqua. Si richiede che l'acqua non contenga sostanze inquinanti in quantità superiore a 100 parti per milione. L'acqua può essere ottenuta da un fiume o da un pozzo. La quantità di acqua che può essere fornita dal fiume è illimitata, e un impianto di depurazione può depurarla in modo che il livello di inquinamento sia inferiore a 150 parti per milione ad un costo di lire 10000 ogni 5000 litri di acqua trattata o a 75 parti per milione ad un costo di lire 30000 per 5000 litri di acqua trattata. Il pozzo, invece, può fornire al più 200000 litri di acqua al giorno con un livello di inquinamento pari a 50 parti per milione. L'acqua fornita dal pozzo può, volendo, essere purificata mediante un processo sperimentale che riduce le impurità a 10 parti per milione. Il pompaggio dell'acqua del pozzo costa 40000 lire ogni 5000 litri e la stessa quantità di acqua può essere purificata mediante il processo sperimentale al costo di 15000 lire. Scrivere il problema di PL che permette di determinare il modo di soddisfare le esigenze idriche della città al costo minimo.*

Formulazione.

– *Variabili.* Scegliamo come variabili di decisione le quantità di acqua (in litri) x_{1F} ottenuta dal fiume con procedimento di depurazione 1, x_{2F} ottenuta dal fiume con procedimento di depurazione 2, x_{1P} ottenuta dal pozzo senza depurazione, x_{2P} ottenuta dal pozzo con procedimento di depurazione.

– *Vincoli.* Si devono imporre i seguenti vincoli:

- Vincoli di domanda: la città deve essere rifornita con 500000 lt.di acqua:

$$x_{1F} + x_{2F} + x_{1P} + x_{2P} = 500000$$

- Vincoli di capacità: il pozzo può fornire al più 200000 lt. di acqua:

$$x_{1P} + x_{2P} \leq 200000.$$

- Vincoli di qualità: la qualità della miscela è misurata in parti di sostanze inquinanti per milione:

$$150x_{1F} + 75x_{2F} + 50x_{1P} + 10x_{2P} \leq 100(x_{1F} + x_{2F} + x_{1P} + x_{2P}).$$

- Vincoli di non negatività: si tratta di quantità acqua, quindi

$$x_{iF} \geq 0 \quad x_{iP} \geq 0 \quad i = 1, 2.$$

– *Funzione obiettivo.* È il costo da minimizzare. Il costo è diverso a seconda della sorgente e del trattamento effettuato. Poiché 5000 lt. di acqua del tipo $1F$ costano 10000, il costo di x_{1F} lt. di acqua è $(x_{1F}/5000)10000 = 2x_{1F}$, analogamente il costo di x_{2F} lt. di acqua prodotti con modalità x_{2F} è $(x_{2F}/5000)30000 = 6x_{2F}$. Per quanto riguarda l'acqua ottenuta dal pozzo, abbiamo che per la quantità x_{1P} dobbiamo pagare solo il pompaggio dato da: $(x_{1P}/5000)40000 = 8x_{1P}$, mentre per l'acqua sottoposta a trattamento dobbiamo pagare sia il pompaggio che la purificazione $(x_{2P}/5000)(40000 + 15000) = 11x_{2P}$. Quindi la funzione obiettivo è :

$$2x_{1F} + 6x_{2F} + 8x_{1P} + 11x_{2P}.$$

Complessivamente possiamo scrivere il problema di PL

$$\begin{cases} \min\,(2x_{1F} + 6x_{2F} + 8x_{1P} + 11x_{2P}) \\ x_{1F} + x_{2F} + x_{1P} + x_{2P} = 500000 \\ x_{1P} + x_{2P} \leq 200000 \\ 50x_{1F} - 25x_{2F} - 50x_{1P} - 90x_{2P} \leq 0 \\ x_{iF} \geq 0, \quad x_{iP} \geq 0 \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

□

3.3 MODELLI DI TRASPORTO

Esercizio 3.3.1 *Un'industria di acque minerali ha due stabilimenti uno a Viterbo e uno a Latina e tre impianti di imbottigliamento situati a Napoli, Roma e Rieti. L'industria ha la necessità di trasportare giornalmente l'acqua minerale dagli stabilimenti ai tre impianti di imbottigliamento che devono essere riforniti giornalmente rispettivamente di 30, 40 e 35 ettolitri di acqua. Gli stabilimenti giornalmente possono disporre rispettivamente di 50 e 55 ettolitri di acqua minerale. La tabella che segue riporta il costo (in Euro) per trasportare un ettolitro di acqua minerale da ciascuno stabilimento a ciascun impianto di imbottigliamento.*

	Napoli	**Roma**	**Rieti**
Viterbo	*250*	*100*	*85*
Latina	*120*	*80*	*150*

Si vuole costruire un modello di Programmazione Lineare che permetta di determinare le quantità di acqua minerale da trasportare giornalmente da ciascuno stabilimento a ciascun impianto di imbottigliamento in modo da soddisfare esattamente le richieste degli impianti e in modo che non ci siano giacenze di acqua non trasportata negli stabilimenti minimizzando il costo complessivo dovuto al trasporto.

Formulazione.
Si tratta di pianificare i trasporti dagli stabilimenti agli impianti di imbottigliamento. Sono ovviamente verificate le ipotesi fondamentali della Programmazione Lineare.

–*Variabili.* È naturale associare le variabili di decisione alle quantità da determinare cioè alle quantità di acqua minerale (in ettolitri) da trasportare da ciascuno stabilimento a ciascun impianto. Indicheremo quindi con x_1, x_2, x_3 rispettivamente la quantità di acqua minerale (in ettolitri) da trasportare giornalmente dallo stabilimento di Viterbo agli impianti di Napoli, Roma e Rieti; analogamente indicheremo con y_1, y_2, y_3 rispettivamente la quantità di acqua minerale (in ettolitri) da trasportare giornalmente dallo stabilimento di Latina agli impianti di Napoli, Roma e Rieti.

–*Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo che deve essere minimizzata sarà data dal costo complessivo dei trasporti ed è quindi data da

$$250x_1 + 100x_2 + 85x_3 + 120y_1 + 80y_2 + 150y_3.$$

–*Vincoli.* I vincoli sono dovuti al fatto che giornalmente non ci devono essere giacenze negli stabilimenti e quindi si deve avere

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 50 \\
y_1 + y_2 + y_3 &= 55.
\end{aligned}
$$

Inoltre devono essere soddisfatte esattamente le richieste giornaliere degli impianti e quindi si ha

$$
\begin{aligned}
x_1 + y_1 &= 30 \\
x_2 + y_2 &= 40 \\
x_3 + y_3 &= 35.
\end{aligned}
$$

Infine si devono esplicitare i vincoli di non negatività sulle variabili, cioè

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Quindi la formulazione completa è

$$
\begin{cases}
\min \left(250x_1 + 100x_2 + 85x_3 + 120y_1 + 80y_2 + 150y_3\right) \\
x_1 + x_2 + x_3 = 50 \\
y_1 + y_2 + y_3 = 55 \\
x_1 + y_1 = 30 \\
x_2 + y_2 = 40 \\
x_3 + y_3 = 35 \\
x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.
\end{cases}
$$

□

Esercizio 3.3.2 *Un'industria produce un preparato chimico utilizzando due impianti di produzione* **I1**, **I2**. *Da questi impianti tutto il preparato chimico prodotto viene trasportato in due magazzini* **M1**, **M2** *che si trovano in differenti località. In questi magazzini una parte del preparato è venduta all'ingrosso direttamente, un'altra parte viene inviata a quattro centri di distribuzione* **D1**, **D2**, **D3**, **D4** *che effettuano la vendita al minuto. Questi centri necessitano ripettivamente di almeno 150, 190, 220, 170 quintali di preparato chimico che vendono rispettivamente a Lire 350000, 280000, 200000, 270000 al quintale. La tabella che segue riporta i costi (in migliaia di lire) necessari per trasportare un quintale di preparato da ciascun impianto a ciascun magazzino.*

	M1	**M2**
I1	*21*	*25*
I2	*27*	*22*

Nella seguente tabella si riportano i costi (in migliaia di lire) necessari per trasportare un quintale di preparato chimico da ciascun magazzino a ciascun centro di distribuzione.

	D1	**D2**	**D3**	**D4**
M1	*33*	*31*	*36*	*30*
M2	*27*	*30*	*28*	*31*

L'impianto di produzione **I1** *può fabbricare al piú 3000 quintali di preparato, l'impianto* **I2** *può fabbricare al piú 2000 quintali di preparato. I prezzi di vendita all'ingrosso effettuati presso i magazzini* **M1** *e* **M2** *sono rispettivamente di Lire 150000 e 170000 al quintale. Per ragioni commerciali i quantitativi di preparato chimico venduti all'ingrosso in ciascun magazzino devono essere pari ad almeno 500 quintali ed inoltre tutto il preparato contenuto nei magazzini dovrà essere o venduto o trasportato ai centri di distribuzione per non avere rimanenze non vendute. Costruire un modello lineare che permetta di determinare le quantità di preparato chimico che devono essere prodotte in ciascun impianto e come esse devono essere ripartite tra i magazzini e i centri di distribuzione in modo da massimizzare il profitto netto complessivo.*

Formulazione.
Si tratta di un problema di pianificazione industriale che unisce ad un problema di trasporti dagli impianti di produzione ai magazzini e dai magazzini ai centri di distribuzione, un problema di allocazione ottima di risorse.

–*Variabili.* Si introducono le variabili x_{ij}, $i, j = 1, 2$ per rappresentare le quantità (in quintali) di preparato chimico da produrre e quindi da trasportare dall'impianto **I**i al magazzino **M**j. Inoltre si introducono le variabili y_{kh}, $k = 1, 2$, $h = 1, 2, 3, 4$, per rappresentare le quantità (in quintali) di preparato chimico da trasportare dal magazzino **M**k al centro di distribuzione **D**h. Infine si devono introdurre due variabili z_1, z_2 per rappresentare la quantità (in quintali) di preparato chimico venduto all'ingrosso rispettivamente nel magazzino **M1** e **M2**.

–*Funzione obiettivo.* È data dal profitto netto, quindi dalla differenza tra ricavo ottenuto dalla vendita (presso i centri di distribuzione e all'ingrosso presso i magazzini) e le spesa complessiva dei trasporti. Il ricavo è dato da

$$350(y_{11} + y_{21}) + 280(y_{12} + y_{22}) + 200(y_{13} + y_{23}) + 270(y_{14} + y_{24}) + 150z_1 + 170z_2$$

mentre la spesa complessiva dei trasporti (dagli impianti ai magazzini e dai magazzini ai centri di distribuzione) è data

$$21x_{11}+25x_{12}+27x_{21}+22x_{22}+33y_{11}+31y_{12}+36y_{13}+30y_{14}+27y_{21}+30y_{22}+28y_{23}+31y_{24}.$$

La funzione obiettivo sarà quindi data dalla differenza di queste due espressioni.

–*Vincoli.* Si hanno i seguenti vincoli

- vincoli dovuti alla capacità massima produttiva dei due impianti

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} &\leq 3000 \\ x_{21} + x_{22} &\leq 2000 \end{aligned}$$

- vincoli dovuti alle richieste dei centri di distribuzione

$$\begin{aligned} y_{11} + y_{21} &\geq 150 \\ y_{12} + y_{22} &\geq 190 \\ y_{13} + y_{23} &\geq 220 \\ y_{14} + y_{24} &\geq 170 \end{aligned}$$

- vincoli derivanti dal quantitativo minimo di preparato che deve essere venduto all'ingrosso nei magazzini

$$z_1 \geq 500, \qquad z_2 \geq 500$$

- vincoli dovuti al fatto che tutto il preparato contenuto nei magazzini deve essere o venduto all'ingrosso oppure trasportato ai centri di distribuzione in modo da non avere rimanenze non vendute; questi vincoli si esprimono imponendo che in ciascun magazzino la quantità di preparato chimico che arriva trasportato dagli impianti sia uguale alla somma del quantitativo di preparato trasportato dal magazzino ai centri di distribuzione e del quantitativo di preparato venduto all'ingrosso direttamente nel magazzino. Si hanno quindi i vincoli

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + z_1 \\ x_{12} + x_{22} &= y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24} + z_2 \end{aligned}$$

- vincoli di non negatività su tutte le variabili

$$x_{ij} \geq 0,\ i,j = 1,2, \quad y_{kh} \geq 0,\ k = 1,2,\ h = 1,2,3,4 \quad z_1 \geq 0, z_2 \geq 0.$$

Quindi la formulazione completa sarà

$$\begin{cases}
\max\Big(350(y_{11}+y_{21})+280(y_{12}+y_{22})+200(y_{13}+y_{23})+270(y_{14}+y_{24}) \\
+150z_1+170z_2+-(21x_{11}+25x_{12}+27x_{21}+22x_{22} \\
+33y_{11}+31y_{12}+36y_{13}+30y_{14}+27y_{21}+30y_{22}+28y_{23}+31y_{24})\Big) \\
x_{11}+x_{12}\leq 3000 \\
x_{21}+x_{22}\leq 2000 \\
y_{11}+y_{21}\geq 150 \\
y_{12}+y_{22}\geq 190 \\
y_{13}+y_{23}\geq 220 \\
y_{14}+y_{24}\geq 170 \\
x_{11}+x_{21}=y_{11}+y_{12}+y_{13}+y_{14}+z_1 \\
x_{12}+x_{22}=y_{21}+y_{22}+y_{23}+y_{24}+z_2 \\
z_1\geq 500 \\
z_2\geq 500 \\
x_{ij}\geq 0,\ i,j=1,2, \\
y_{kh}\geq 0,\ k=1,2,\ h=1,2,3,4
\end{cases}$$

I vincoli di non negatività delle variabili z_i sono ovviamente implicati dai vincoli $z_1, z_2 \geq 500$. □

Osservazione 3.3.3 L'esempio appena esaminato mette in evidenza come nella realtà i problemi che si incontrano spesso possono essere la combinazione di piú problemi appartenenti a piú classi di modelli; la divisione che si è effettuata in problemi di allocazione ottima, problemi di miscelazione e problemi di trasporti ha, evidentemente, scopi essenzialmente didattici e dovrebbe fornire la possibilità di affrontare anche situazioni in cui confluiscono simultaneamente problematiche riconducibili a differenti classi di modelli.

4

La Programmazione Lineare

4.1 INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DI UN PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Esercizio 4.1.1 *Fornire una rappresentazione geometrica e risolvere graficamente i seguenti problemi di Programmazione Lineare:*

1.

$$\begin{cases} \min x_1 + 9x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 \leq 40 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \min -5x_1 - 7x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ -2x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} \min 3x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ -2x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} \min x_1 - 2x_2 \\ x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1. Il problema ammette soluzione ottima nell'origine degli assi.
2. Il problema è illimitato.
3. Dalla rappresentazione dell'insieme ammissibile si deduce immediatamente che il problema è inammissibile.
4. Il problema ammette infinite soluzioni ottime.

□

5

Teoria della Programmazione Lineare

5.1 VERTICI DI UN POLIEDRO

Esercizio 5.1.1 *Dato il poliedro decritto dal seguente sistema*

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leq 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

verificare se il punto $(1, 1, 0)^T$ *è un vertice del poliedro.*

Riscriviamo innanzitutto il poliedro nella forma

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 \geq -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0; \end{cases}$$

Nel punto $(1, 1, 0)^T$, che appartiene al poliedro, sono attivi il primo, il secondo e il quinto vincolo. Inoltre i vettori $(-3, 2, -5)^T$, $(-2, 3, 1)^T$ e $(0, 0, 1)^T$ corrispondenti a questi tre vincoli sono linearmente indipendenti e quindi il punto $(1, 1, 0)^T$ è un vertice del poliedro. □

Esercizio 5.1.2 *Dato il poliedro decritto dal seguente sistema*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 \geq -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \end{cases}$$

verificare se il punto $(1, 1, 0)^T$ *è un vertice del poliedro.*

Il punto $(1, 1, 0)^T$ non appartiene al poliedro in quanto il quarto vincolo è violato. □

Esercizio 5.1.3 *Dato il poliedro decritto dal seguente sistema*

$$\begin{cases} \tau x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

determinare per quali valori di τ *sono vertici del polidero i punti*

a) $P(1/2, 0, 0)^T$

b) $Q(1, 0, 1)^T$.

Riscriviamo innanzitutto il sistema nella forma

$$\begin{cases} -\tau x_1 - x_2 + x_3 \geq -1 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Sostituendo il punto P nel primo vincolo, si verifica che per $\tau \leq 2$ il punto soddisfa il primo vincolo; inoltre il punto soddisfa anche gli altri vincoli e quindi per $\tau \leq 2$ il punto P appartiene al poliedro. Inoltre il secondo il quarto e il quinto vincolo sono attivi nel punto P e i vettori $(-4 \;\; 1 \;\; 2)^T$, $(0, 1, 0)^T$ e $(0, 0, 1)^T$ corrispondenti a questi tre vincoli sono linearmente indipendenti e quindi il punto P per $\tau \leq 2$ è un vertice del polidero.

b) Sostituendo le coordinate di Q nel sistema si ottiene che per $\tau \leq 2$ il punto appartiene al poliedro. Inoltre nel punto Q sono attivi il secondo e il quarto vincolo, mentre non sono attivi il terzo e il quinto vincolo. Pertanto affinché si abbiano tre vincoli attivi nel punto Q si dovrà scegliere τ in modo che risulti attivo in Q il primo vincolo e cioè $\tau = 2$. Con questa scelta di τ si hanno tre vincoli attivi, ma i vettori corrispondenti $(-2, -1, 1)^T$, $(-4, 1, 2)^T$ e $(0, 1, 0)^T$ non sono linearmente indipendenti e quindi il punto Q non può essere un vertice del poliedro.

□

Esercizi di riepilogo sui Capitoli 1 – 5

1. Dare la definizione di funzione lineare.

   R: Una funzione lineare di n variabili è una funzione del tipo

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

   dove $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono numeri reali.

2. Dire quali delle seguenti funzioni è lineare.

   (a) $2x_1 + x_1x_2 - x_3$
   (b) $(\log 5)x_1 - x_{25}$
   (c) $\sin x_1 - x_{25}$
   (d) $x_1 - x_3 + 5x_4$
   (e) $x_1 - x_3 + 5x_4 + 1$
   (f) $\frac{x_1+2x_2-4x_3}{-x_1+2{,}5x_2+x_3}$
   (g) $x_1 + x_2 + x_3^3$

   R: (b) e (d). Attenzione (e) è la somma di una funzione lineare e di una costante; questo tipo di funzioni è chiamato *affine*. Geometricamente le funzioni lineari rappresentano iperpiani (rette nel caso di due solo variabili) *passanti per l'origine* mentre le funzioni affini rappresentano iperpiani (rette nel caso di due solo variabili) *che non necessariamente passano per l'origine.* Ovviamente ogni funzione lineare è anche affine (una funzione lineare può essere pensata come la somma di se stessa e della costante 0), ma il viceversa non è vero. Spesso nell'ambito della Programmazione Lineare si usa il termini *lineare* anche quando, a rigore, si dovrebbe usare la parola *affine;* vedi per esempio l'esercizio numero 7.

3. Se il valore di una funzione lineare nel punto $(2, 1, -1)$ è 4, qual è il valore della stessa funzione nel punto $(4, 2, -2) = 2(2, 1, -1)$? Sai dire qual è il nome della proprietà che hai utilizzato per dare la risposta?

   R: Il valore è $8 = 2 \cdot 4$. La funzione lineare in questione ha ovviamente tre variabili. Ora, pur senza sapere qual è il valore dei coefficienti c_1, c_2 e c_3 (vedi l'esercizio 1), sappiamo che $c_1 2 + c_2 1 + c_3(-1) = 4$. Quindi Possiamo concludere che

$$c_1(2 \cdot 2) + c_2(2 \cdot 1) + c_3(2 \cdot (-1)) = 2(c_1 2 + c_2 1 + c_3(-1)) = 2 \cdot 4 = 8.$$

   Questa osservazione può essere generalizzata. Data una funzione lineare essa può essere scritta come $c^T x$. E quindi, se λ è una costante reale, ragionando come appena fatto, abbiamo che

$$c^T(\lambda x) = \lambda(c^T x).$$

In parole, se una funzione lineare ha un certo valore in un dato punto x, il valore della funzione in un punto ottenuto moltiplicando tutte le componenti di x per una data costante λ è uguale al valore della funzione in x moltiplicato per la stessa costante λ. Questa proprietà è chiamata *proporzionalità* o, in termini più matematici, *omogeneità*.

4. Se il valore di una funzione lineare nel punto $(2, 1, -1)$ è 4 e quello nel punto $(2, 0, 1)$ è 7, qual è il valore della stessa funzione in $(4, 1, 0) = (2, 1, -1) + (2, 0, 1)$? Sai dire qual è il nome della proprietà che hai utilizzato per dare la risposta?

   R: Il valore è $11 = 4 + 7$. La funzione lineare in questione ha ovviamente tre variabili. Ora, pur senza sapere qual è il valore dei coefficienti c_1, c_2 e c_3 (vedi l'esercizio 1), sappiamo che

   $$c_1 2 + c_2 1 + c_3(-1) = 4 \quad \text{e} \quad c_1 2 + c_2 0 + c_3 1 = 7.$$

   Quindi possiamo concludere che

   $$c_1(2+2)+c_2(1+0)+c_3(-1+1) = [c_1 2+c_2 1+c_3(-1)]+[c_1 2+c_2 0+c_3 1] = 4+7 = 11.$$

   Questa osservazione può essere generalizzata. Data una funzione lineare e due punti x e y, ragionando come appena fatto, abbiamo che

   $$c^T(x + y) = c^T x + c^T y.$$

   In parole, il valore di una funzione lineare in un punto z che è la somma di due punti x e y (cioè $z = x + y$) è uguale alla somma dei valori della funzione calcolata in x e in y. Questa proprietà è chiamata *sovrapposizione degli effetti* o, in termini più matematici, *addittività*.

5. Cos'è un *poliedro*?

   R: Un poliedro è l'insieme di soluzioni di un sistema di equazioni o disequazioni lineari. Un'equazione lineare è un' espressione del tipo:

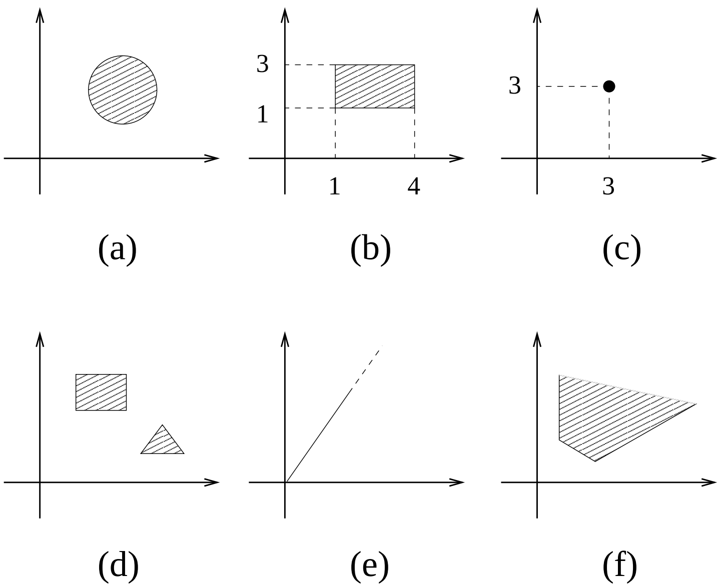
   $$a^T x = b,$$

   dove b è un numero (detto "termine noto") e a è un vettore di coefficienti numerici. Una disequazione lineare è un' espressione del tipo

   $$a^T x \leq b \qquad \text{o} \qquad a^T x \geq b.$$

   Nella nostra definizione di poliedro, non consideriamo valide disequazioni con disuguagianze strette (cioè $a^T x < b$ o $a^T x > b$).

6. Tra gl'insiemi riportati in figura, quali sono i poliedri e quali i poliedri illimitati?



R: (b), (c), (e), (f). (b) è il poliedro più facilmente “riconoscibile”, non di meno anche gli altri sono soluzioni di sistemi lineari. In particolare in (c) è rappresntato un singolo punto, che può essere visto come la soluzione del sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 3. \end{aligned}$$

Altri esempi di poliedri “strani” sono l’insieme vuoto (che è l’insieme di soluzioni di un sistema incompatibile) e tutto lo spazio (che è l’insieme di soluzioni di un sistema “vuoto”, cioè di un sistema che non contiene nessun vincolo).

I poliedri illimitati sono (e) e (f). Questo è abbastanza intuitivo. Volendo precisare la nozione di poliedro limitato o illimitato, possiamo dire che un poliedro è limitato se esiste una costante positiva M, tale che, se x appartiene al poliedro, allora per ogni sua componente abbiamo $|x_i| \leq M$. Un poliedro che non è limitato è illimitato. Per il poliedro (b) possiamo prendere $M = 4$, per il poliedro (c) possiamo prendere invece $M = 3$. Quindi (b) e (c) sono poliedri limitati.

7. Definisci un problema di Programmazione Lineare (PL nel seguito).

   R: Un problema di PL è un problema di minimizzazione o massimizzazione di una funzione lineare soggetta a vincoli lineari. In altre parole un problema di PL è un problema di minimizzazione o massimizzazione di una funzione lineare su un poliedro. Sono problemi di PL anche quelli in cui la funzione obiettivo è affine, quindi, con più precisione, dovremmo dire, che un problema di PL consiste nella minimizzazione o massimizzazione di una funzione affine soggetta a vincoli lineari. L'uso del termine lineare per descrivere la funzione obiettivo è motivato sia dall'uso sia dall'osservazione che minimizzare una funzione affine $c^T x + costante$ su un poliedro P è "equivalente" a minimizzare la funzione lineare $c^T x$ su P. Qui, la parola "equivalente" va intesa nel senso che le soluzioni ottime dei due problemi coincidono.

8. Dire quali dei seguenti problemi è un problema di PL.

(a)

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 - x_2 + x_3 \\ & x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 \ \leq \ 2 \\ & 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 \ = \ 0 \\ & x_1 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 - x_2 + x_3 \\ & x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4^2 \ \leq \ 3 \\ & 3x_1^3 - 6x_2 - 3x_3 \ = \ 0 \\ & x_1 \leq 0, x_3 \geq 0. \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 - x_2 + x_3 + 4 \\ & x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 \ \leq \ 2 \\ & 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 \ \leq \ 0 \\ & x_1 \geq 0, x_4 = 0. \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 \\ & x \in P, \end{array}$$

dove P è un poliedro.

(e)

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1x_2 - x_2 + x_3 + e^{x_4} \\ & x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 \ \leq \ 2 \\ & 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 \ \leq \ 0. \end{array}$$

(f)

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & Ax \ = \ b, \\ & x \ \geq \ 0, \end{array}$$

dove il vettore delle variabili x ha n componenti, c è un vettore di numeri a n componenti, A è una matrice di numeri $m \times n$, e b è un vettore di numeri a m componenti.

R: (a), (c), (d), (f).

9. Risolvere graficamente i seguenti problemi di PL

(a)

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & -x_1 + x_2 \leq -1 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & -x_1 + x_2 \leq -1 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & -x_1 + x_2 \leq -1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

R: Indichiamo con x^* la soluzione ottima.

(a) $x^* = (2, 1)$
(b) Il problema è illimitato (superiormente)
(c) $x^* = (3, 0)$

10. Considera il problema (a) nell'esercizio precedente:

(a) Proponi una nuova funzione obiettivo (sempre da massimizzare) in modo tale che il punto $(4, 0)$ diventi soluzione ottima.
(b) Spiega perchè i punti $(4, 1)$ e $(3, 0.25)$ non potranno mai essere soluzioni ottime del problema, qualunque sia la funzione lineare che si sceglie come funzione obiettivo (attenzione: le ragioni sono diverse per i due punti).

R:

(a) La scelta più semplice è probabilmente di scegliere come funzione obiettivo x_2, ma ovviamente esistono infinite scelte possibili (prova a caratterizzarle tutte!)

(b) Il punto $(4, 1)$ non è ammissibile, e quindi per definizione, non potrà mai essere una soluzione ottima. Il punto $(3, 0.25)$ è interno al poliedro e quindi non potrà mai essere soluzione ottima. Infatti, spostandosi lungo la semiretta di origine $(3, 0.25)$ e direzione $(1, 3)$ (la direzione è quella definita dai coefficienti della funzione obiettivo), sappiamo che la funzione obiettivo aumenta. Siccome $(3, 0.25)$ è un punto interno al poliedro, ci si può sicuramente spostare lungo questa semiretta di una quantità positiva (eventualmente anche molto piccola) e rimanere nel poliedro, cosìgenerando un punto ammissibile con un valore della funzione obiettivo maggiore di quella in $(3, 0.25)$.

11. Determinare tutti i vertici dei seguenti poliedri:

(a)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq -1 \\ 0.5x_1 + x_3 &\geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 &\geq -5 \\ -6x_1 + 7x_2 - 9x_3 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 10 \\ x_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

R:

(a) $v_1 = (0, 11, 5)^T$ e $v_2 = (10, 11, 0)^T$.

(b) $v_1 = (25, 13, -7)^T$, $v_2 = (0, -2, 3)^T$ e $v_3 = (0, 106/37, 66/37)$.

(c) $v_1 = (0, 2/3, 8/3)^T$, $v_2 = (8/3, 2/3, 0)^T$, $v_3 = (0, 0, 2)^T$, $v_4 = (2, 0, 0)^T$.

12. Sia dato il poliedro $P(\tau)$ definito da

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - \tfrac{\tau}{2}x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Determinare per quali valori non negativi di τ, il poliedro $P(\tau)$ ammette più di un vertice.

R:

Il poliedro può ammettere al più due vertici (due è il numero di tutti i sottositemi di tre vincoli, contenenti però i due vincoli di uguaglianza, che si possono estrarre dai vincoli che definiscono il poliedro). Si tratta allora di ricavare in funzione di τ l'espressione dei punti "candidati" a essere vertici e calcolare per quali valori comuni e non negativi di τ i due punti sono effettivamente vertici distinti.

Risulta che per $\tau > 1$ il poliedro ha due vertici. (Attenzione, perché c'è un solo vertice per $\tau = 1/2$?)

13. Un ospedale deve organizzare il servizio di trasporto del sangue, proveniente dalle donazioni spontaneee. Le sacche di sangue sono disponibili in 4 centri di raccolta diversi e vanno tutte trasportate in 3 centri di trasformazione situati in altrettanti ospedali. Nella tabella di seguito sono riassunti la distanza (Km) tra i centri di raccolta e gli ospedali, nonchè il costo di trasporto di una sacca, per ogni kilometro (il costo di trasporto di una

sacca è quindi dato dal prodotto del costo al kilometro per la distanza), da ciascun centro:

	ospedale 1	ospedale 2	ospedale 3	costo
centro 1	14	19	54	0.2
centro 2	12	31	45	0.26
centro 3	16	45	60	0.19
centro 4	21	44	46	0.29

A ciascun ospedale è necessario portare il seguente quantitativo minimo di sacche di sangue, per uso interno:

	ospedale 1	ospedale 2	ospedale 3
n^o sacche	28	58	25

mentre in ogni centro di raccolta è disponibile il seguente quantitativo di sacche:

	centro 1	centro 2	centro 3	centro 4
n^o sacche	34	38	35	22

Si costruisca un modello di PL che permetta di minimizzare i costi di trasporto

R:

– *Variabili.* Le variabili sono x_{ij} (con $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = 1, 2, 3$) e rappresentano le sacche di sangue trasportate dal deposito i-esimo all'ospedale j-esimo.

– *Funzione obiettivo.* Indichiamo con d_{ij} la distanza dal deposito i-esimo all'ospedale j-esimo e con c_i il costo di trasporto per un kilometro relativa al deposito i-esimo. La funzione obiettivo è data dal costo complessivo di trasporto ed è quindi

$$\sum_{i=1}^{4} c_i \sum_{j=1}^{3} d_{ij} x_{ij}$$

– *Vincoli.* Poiché sono prescritti i fabbisogni minimi di ogni ospedale avremo:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{4} x_{i1} &\geq 28 \\ \textstyle\sum_{i=1}^{4} x_{i2} &\geq 58 \\ \textstyle\sum_{i=1}^{4} x_{i3} &\geq 25 \end{aligned}$$

Inoltre i vincoli sul numero massimo di sacche disponibili nei centri di raccolta si esprimono come

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^{3} x_{1j} &\leq 34 \\ \textstyle\sum_{j=1}^{3} x_{2j} &\leq 38 \\ \textstyle\sum_{j=1}^{3} x_{3j} &\leq 35 \\ \textstyle\sum_{j=1}^{3} x_{3j} &\leq 22. \end{aligned}$$

Le variabili sono inoltre non negative:

$$x \geq 0.$$

A rigore le variabili x_{ij} sono anche *intere*, in quanto le sacche non sono divisibili. Per formulare questo problema come problema di PL trascuriamo però questo vincolo.

14. Un investitore deve scegliere come far fruttare il proprio capitale che ammonta a 10000 Euro. Egli deve scegliere come suddividere l'investimento tra 5 tipologie distinte: Conto corrente bancario, Titoli di stato, Obbligazioni, Azioni e Future. Ciascuno dei 5 investimenti proposti offre un tasso di rendimento annuo e presenta una percentuale di rischio, inoltre per diversificare il portafoglio, il budget (in Euro) destinato ad ogni investimento deve essere compreso tra un valore minimo ed un valore massimo, ovvero

	tasso di rendimento	perc. rischio	min. invest. (Euro)	max. invest. (Euro)
C/C bancario	2.5 %	5 %	0	1500
Titoli di Stato	6.5 %	8.5 %	1000	5000
Obbligazioni	8.7 %	12.4 %	1000	5000
Azioni	18.7 %	20 %	500	4000
Future	11.7 %	14 %	0	4000

L'investimento nel C/C bancario e nei titoli di stato deve essere complessivamente almeno 1/3 dell'investimento nelle azioni. La percentuale di rischio totale (si consideri che le grandezze varino linearmente [1]) non deve superare l' 11.5.

[1] Ovvero se si investono 1000 Euro nel C/C bancario, 2000 in Titoli di stato, 1500 in Obbligazioni, 2000 Euro in Azioni e 3500 Euro in Future, la percentuale di rischio totale è data da

$$\textit{rischio totale} = \frac{5 \cdot 1000 + 8.5 \cdot 2000 + 12.4 \cdot 1500 + 20 \cdot 2000 + 14 \cdot 3500}{10000}.$$

Si costruisca un modello di PL che permetta di determinare l'investimento che massimizza il tasso di rendimento annuo (si consideri che le grandezze variano linearmente [2]).

R:

– *Variabili.* Le variabili sono $x_1, x_2, x_3, x_4 x_5$ e rappresentano la quantità di denaro investita in ogni tipo di investimento.

– *Funzione obiettivo.* Si vuole massimizzare il tasso di rendimento. La funzione obiettivo, da massimizzare è quindi data da

$$2.5x_1 + 6.5x_2 + 8.7x_3 + 18.7x_4 + 11.7x_5.$$

Si noti che il tasso di rendimento è stato, in effetti, moltiplicato per 10000, ma è evidente che questo non altera il problema.

– *Vincoli.* Le variabili sono tutte non negative, ma , in particolare devono soddisfare le limitazioni minime e massime riportate in tabella

$$0 \leq x_1 \leq 1500, \quad 1000 \leq x_2 \leq 5000, \quad 1000 \leq x_3 \leq 5000,$$

$$500 \leq x_4 \leq 4000, \quad 0 \leq x_5 \leq 4000,$$

e inoltre la somma totale investita è pari a 10000

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10000$$

(Sarebbe stato lecito porre invece $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 10000$? Qual è il significato di questo vincolo? Le soluzioni ottime ottenute considerando il vincolo con uguaglianza e quello con la disuguaglianza differiscono?)

L'investimento nel C/C bancario e nei titoli di stato deve essere complessivamente almeno 1/3 dell'investimento nelle azioni:

$$x_1 + x_2 \geq \frac{1}{3}x_4.$$

La percentuale di rischio totale non deve superare l'11.5, cioé

$$5x_1 + 8.5x_2 + 12.4x_3 + 20x_4 + 14x_5 \leq 11.5 \times 10000.$$

[2] Ovvero se si investono 1000 Euro nel C/C bancario, 2000 in Titoli di stato, 1500 in Obbligazioni, 2000 Euro in Azioni e 3500 Euro in Future, il tasso di rendimento annuo è dato da

$$\textit{tasso di rendimento annuo totale} = \frac{2.5 \cdot 1000 + 6.5 \cdot 2000 + 8.7 \cdot 1500 + 18.7 \cdot 2000 + 11.7 \cdot 3500}{10000}.$$

6

Il metodo del simplesso

6.1 LA FORMA STANDARD

Esercizio 6.1.1 *Porre il problema di Programmazione Lineare:*

$$
\begin{array}{ll}
\min & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\
& x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
& 2x_1 - x_3 \geq 4 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0
\end{array}
$$

in forma standard.

Si trasformano i vincoli di disuguaglianza in vincoli di uguaglianza introducendo le variabili di slack x_4 e di surplus x_5:

$$
\begin{array}{ll}
\min & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\
& x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\
& x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\
& 2x_1 - x_3 - x_5 = 4 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0
\end{array}
$$

Si trasformano le variabili non vincolate in segno in variabili vincolate in segno effettuando la sostituzione $x_3 = x_3^+ - x_3^-$:

$$
\begin{array}{ll}
\min & 3x_1 + 2x_2 + x_3^+ - x_3^- \\
& x_1 + x_2 - x_3^+ + x_3^- = 2 \\
& x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\
& 2x_1 - x_3^+ + x_3^- - x_5 = 4 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3^+ \geq 0, \quad x_3^- \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0
\end{array}
$$

In alternativa, si sarebbe potuto procedere in un altro modo; infatti, utilizzando il primo vincolo $x_3 = x_1 + x_2 - 2$, si può eliminare la variabile x_3 ottenendo il problema di PL equivalente

$$\begin{array}{ll} \min & 4x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

da cui aggiungendo le variabili di slack x_4 e di surplus x_5 si ha

$$\begin{array}{ll} \min & 4x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ & x_1 - x_2 - x_5 = 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

□

6.2 VERTICI E SOLUZIONI DI BASE

Esercizio 6.2.1 *Dimostrare che il vettore* $x = (1\ 0\ 0\ 1)^T$ *è un vertice del poliedro individuato dal seguente sistema di equazioni e disequazioni:*

$$\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

Si tratta di un poliedro in forma standard. Consideriamo le colonne di A corrispondenti a componenti non nulle di x, (x_1 e x_4), cioè

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Poiché sono linearmente indipendenti, il punto dato è un vertice del poliedro. □

Esercizio 6.2.2 *Elencare i vertici del poliedro:*

$$\begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 & \\ x_1 - x_3 + x_4 = 3 & \\ x_i \geq 0, & i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

Si tratta dell'insieme ammissibile di un problema in forma standard. Quindi i vertici sono le SBA, cioè al più $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$, in questo caso, 6. La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esaminiamo tutte le possibili coppie ($m = 2$) di colonne della matrice A, e verifichiamo se costituiscono una base (cioè se sono indipendenti). Tra le possibili basi dobbiamo poi individuare quelle ammissibili.
Si ottiene:

$$(1)\ I_B = \{3,4\} \quad x_1 = x_2 = 0; \quad \begin{cases} 3x_3 = 2 \\ -x_3 + x_4 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{2}{3} \\ x_4 = \frac{11}{3} \end{cases}$$

$$(2)\ I_B = \{2,4\} \quad x_1 = x_3 = 0; \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases},$$

$$(3)\ I_B = \{2,3\} \quad x_1 = x_4 = 0; \quad \begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_3 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = \frac{11}{2} \\ x_3 = -3 \end{cases}$$

$$(4)\ I_B = \{1,4\} \quad x_2 = x_3 = 0; \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_1 + x_4 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$(5)\ I_B = \{1,3\} \quad x_2 = x_4 = 0; \quad \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{11}{4} \\ x_3 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(6)\ I_B = \{1,2\} \quad x_3 = x_4 = 0; \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

Possiamo riassumere schematicamente questa situazione con una tabella in cui riportiamo per ciascuna coppia di colonne la verifica se la matrice individuata è di base e se la corrispondente soluzione di base è ammissibile.

Indici delle colonne	Base	SBA
$\{1,2\}$	Sì	No
$\{1,3\}$	Sì	No
$\{1,4\}$	Sì	Sì
$\{2,3\}$	Sì	No
$\{2,4\}$	Sì	Sì
$\{3,4\}$	Sì	Sì

Quindi abbiamo solo tre soluzioni di base ammissibili (vertici) che sono:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/3 \\ 11/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 6.2.3 *Elencare i vertici del poliedro descritto dal sistema:*

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ & -x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ & x_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

Analogo all'esercizio precedente. La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esaminiamo tutte le possibili coppie ($m = 2$) di colonne della matrice A, verifichiamo se costituiscono una base ammissibile e calcoliamo la soluzione.

(1) $I_B = \{3, 4\}$ $\quad x_1 = x_2 = 0;$ $\quad \begin{cases} -x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 3 \end{cases},$ $\quad \begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = -5 \end{cases};$

(2) $I_B = \{2, 4\}$ $\quad x_1 = x_3 = 0;$ $\quad \begin{cases} 2x_2 - x_4 = 1 \\ -x_2 + x_4 = 3 \end{cases},$ $\quad \begin{cases} x_2 = 4 \\ x_4 = 7 \end{cases};$

(3) $I_B = \{2, 3\}$ $\quad x_1 = x_4 = 0;$ $\quad \begin{cases} 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases},$ $\quad \begin{cases} x_2 = 5/3 \\ x_3 = 7/3 \end{cases};$

(4) $I_B = \{1, 4\}$ $\quad x_2 = x_3 = 0;$ $\quad \begin{cases} x_1 - x_4 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases},$ $\quad \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_4 = 3 \end{cases};$

(5) $I_B = \{1, 3\}$ $\quad x_2 = x_4 = 0;$ $\quad \begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_3 = 3 \end{cases},$ $\quad \begin{cases} x_1 = 5/2 \\ x_3 = 3/2 \end{cases};$

(6) $I_B = \{1, 2\}$ $\quad x_3 = x_4 = 0;$ $\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_2 = 3 \end{cases},$ $\quad \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -3 \end{cases}.$

Complessivamente possiamo compilare la seguente tabella:

Indici delle colonne	Base	SBA
$\{1, 2\}$	sì	no
$\{1, 3\}$	sì	sì
$\{1, 4\}$	sì	sì
$\{2, 3\}$	sì	sì
$\{2, 4\}$	sì	sì
$\{3, 4\}$	sì	no

Quindi

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ 7/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

6.3 IL CRITERIO DI OTTIMALITÀ E IL CRITERIO DI ILLIMITATEZZA

Esercizio 6.3.1 *Applicare il criterio di ottimalità e di illimitatezza alla base costituta dalle colonne 1 e 5 nel seguente problema di PL in forma standard:*

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 - x_5 = 1 \\ & x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 5 \end{array}$$

Denotiamo

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad c_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La matrice di base che consideriamo è:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e la matrice delle variabili fuori base è

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per applicare il criterio di ottimalità e illimitatezza dobbiamo calcolare i costi ridotti. Calcoliamo l'inversa di B:

$$B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Quindi i coefficienti di costo ridotto sono:

$$\gamma = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (1 \ 3 \ -2) - \frac{1}{4}(2 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (0 \ 2 \ -5)$$

I costi ridotti non sono non negativi e quindi non si può concludere niente sulla soluzione data. Inoltre, la colonna $\pi_3 = (B^{-1}N)_3 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ è positiva, quindi non possiamo concludere niente sull'illimitatezza del problema. □

Esercizio 6.3.2 *Fornendo una breve giustificazione o un controesempio, stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa: "in una soluzione ammissibile di base ottima di un problema di PL (di minimo, in forma standard) i coefficienti di costo ridotti devono essere tutti non negativi."*

Falso. Il criterio di ottimalità basato sulla non negatività dei coefficienti di costo ridotto è solo sufficiente. Sia ad esempio dato il problema di PL seguente.

$$\begin{array}{ll}\min & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6\end{array}$$

Consideriamo la base B individuata dalle variabili $(x_4,\ x_1,\ x_6)^T$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A questa base corrisponde la soluzione di base ammissibile $(x_4,\ x_1,\ x_6)^T = (2,\ 1,\ 0)^T$ e $x_2 = x_3 = x_5 = 0$ di valore $z = 3$. I coefficenti di costo ridotto relativi sono $(-5/2,\ -7/2,\ 3/2)$, quindi in base al criterio sufficiente non possiamo concludere nulla sulla ottimalità della soluzione. La soluzione è in realtà ottima, ma il criterio di ottimalità è verificato solamente nella soluzione di base ammissibile $(x_4,\ x_1,\ x_3)^T = (2,\ 1,\ 0)^T$ e $x_2 = x_6 = x_5 = 0$ sempre di valore $z = 3$ e relativa alla base

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 6.3.3 *Considerato il problema di PL*

$$\begin{array}{ll}\max & x_1 + x_2 + 2x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ & x \geq 0\end{array}$$

(i) *si stabilisca se il punto $x^* = (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 2)^T$ è una soluzione ammissibile di base ottima calcolando i coefficienti di costo ridotto.*

(ii) *Qualora x^* sia ottima, si stabilisca se la soluzione è unica.*

Innanzitutto si deve scrivere il problema in forma standard.

(i) Si calcolano i coefficienti di costo ridotto che sono $(0,\ 1,\ 1)^T \geq 0$. Si può quindi concludere che la soluzione è ottima.

(ii) Poiché i coefficienti di costo ridotto non sono strettamente positivi, non si può concludere niente sull'unicità della soluzione.

□

Esercizio 6.3.4 *Sia dato il problema di PL*

$$\begin{array}{ll} \min & -4x_1 + 9x_3 + 12x_4 - 5x_5 + 7x_6 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 3 \\ & x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 = 6 \\ & -x_1 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 + x_6 = 5 \\ & x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, 6 \end{array}$$

(i) *Si verifichi che le variabili* $(x_1\ x_2\ x_3)$ *individuano una base ottima.*

(ii) *Si determini l'intervallo di valori entro cui può variare il termine noto* b_2 *del secondo vincolo affinché la base individuata da* $(x_1\ x_2\ x_3)$ *rimanga ottima.*

Qual è l'espressione che lega il valore ottimo della funzione obiettivo a b_2*?*

(iii) *Si supponga di inserire una nuova variabile* $x_7 \geq 0$ *con colonna dei coefficienti* $A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *e coefficiente di costo* $c_7 = 18$*. L'inserimento di questa nuova variabile consente di ottenere un vantaggio? In caso di risposta negativa, si determini il valore di* c_7 *per cui l'uso di questa variabile può essere economicamente competitivo.*

(i) La base individuata dalle variabili $(x_1\ x_2\ x_3)$ è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La corrispondente matrice fuori base è

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si possono quindi calcolare i coefficienti di costo ridotto

$$\gamma = c_N - N^T(B^{-1})^T c_B = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\gamma \geq 0$, la soluzione è ottima e vale

$$x_B^* = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad x_N^* = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Supponiamo che $\tilde{b}^T = (3,\ b_2,\ 5)^T$. In questo caso si tratta di verificare che la soluzione sia ancora ammissibile cioè che $B^{-1}\tilde{b} \geq 0$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ b_2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4b_2 - 21 \\ 8 - b_2 \\ 2b_2 - 8 \end{pmatrix} \geq 0$$

Si individua l'intervallo $b_2 \in [21/4, 8]$. Per un valore di b_2 in questo intervallo la funzione obiettivo vale

$$f^*(b_2) = -4(4b_2 - 21) + 9(2b_2 - 8) = 12 + 2b_2.$$

(iii) L'introduzione della variabile x_7 consente di ottenere un vantaggio se la soluzione ottima cambia. Possiamo verificare se il coefficiente di costo ridotto relativo alla variabile x_7 è non negativo oppure no. Risulta:

$$\gamma_7 = c_7 - c_B^T B^{-1} A_7 = 18 - (-4\ 0\ 9) \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1.$$

Poiché $\gamma_7 > 0$ la soluzione ottenuta al punto (i) è ancora ottima per il problema aumentato; non c'è quindi alcun vantaggio nell'inserire la variabile x_7.

Si può avere un vantaggio se risulta $\gamma_7 < 0$, cioè se $c_7 - 17 < 0$. In questo caso infatti non si può concludere che la soluzione è ottima (ma nemmeno che non lo è).

□

Esercizio 6.3.5 *Sia $x^* = (1,\ 1,\ 0,\ 0)^T$ una soluzione di base ammissibile per un problema di Programmazione Lineare e sia $(\gamma_1,\ \gamma_2)^T = (-1,\ 0)^T$ il vettore dei costi ridotti associato alle variabili fuori base x_3 ed x_4. Se il valore della funzione obiettivo in x^* è pari a 12, ovvero $c^T x^* = 12$ dire qual è il valore della funzione obiettivo nel punto ammissibile $\bar{x} = (2,3,2,2)^T$.*

Si ha $z = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N$ cioè $z(x^*) = c_B^T B^{-1} b = 12$ e $z(\hat{x}) = c_B^T B^{-1} b + \gamma_1 x_3 + \gamma_2 x_4$. Si ottiene quindi $z(\hat{x}) = 12 - 2 = 10$. □

Esercizio 6.3.6 *Data una soluzione ammissibile di base $\bar{x} = (1,2,1,0,0)$ di valore $z(\bar{x}) = 7$, siano $\gamma_1 = 3 + h$ e $\gamma_2 = 2$ i costi ridotti associati alle variabili fuori base x_4 ed x_5. Determinare il valore del parametro h per il quale la soluzione ammissibile $\hat{x} = (0,1,0,2,2)^T$ ha valore 5.*

Si ha

$$z = c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N.$$

Sappiamo che $z(\bar{x}) = c_B^T B^{-1} b = 7$. Nel punto $\hat{x}$ si ha: $z(\hat{x}) = c_B^T B^{-1} b + \gamma_1 x_4 + \gamma_2 x_5 = 7 + (3+h)\hat{x}_4 + 2\hat{x}_5 = 7 + (3+h)2 + 4$ e quindi si ottiene l'equazione:

$$2h + 17 = 5$$

da cui $h = -6$. □

6.4 IL METODO DEL SIMPLESSO

In questo paragrafo sono riportati alcuni esercizi risolti sul metodo del simplesso. Alcuni sono risolti utilizzando la procedura di pivot per determinare, ad ogni iterazione, la nuova forma canonica; in altri tale forma canonica è determinata con l'uso esplicito della matrice di pivot T. Ovviamente l'uso dell'una o dell'altra procedura è del tutto equivalente.

Esercizio 6.4.1 *Risolvere applicando la Fase II del metodo del simplesso il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{array}{ll}\min & -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 3 \\ & x \geq 0.\end{array}$$

Si può applicare la Fase II del metodo del simplesso perché il problema è in forma canonica rispetto alle variabili $x_4,\ x_5$, ovvero può essere scritto

$$\begin{array}{ll}\min & (2\ 0)\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + (-2\ \ 4\ \ -2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0.\end{array}$$

La base iniziale è $B^0 = I$ e risulta $x_{B^0} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$, $x_{N^0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Iterazione 0.
Calcolo dei costi ridotti.

$$\gamma^0 = c_{N^0} - (N^0)^T c_{B^0} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^0 \not\geq 0$; si prosegue.
Verifica illimitatezza. Per $i = 1, 2, 3$ risulta $\pi_i > 0$; si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta della variabile <u>entrante</u>. Si sceglie la variabile corrispondente al costo ridotto minore, cioè x_3 ed $h = 3$.
Scelta della variabile <u>uscente</u>. Si sceglie $\displaystyle\min_{\substack{i \\ (\pi_3)_i > 0}} \left\{ \frac{((B^0)^{-1}b)_i}{(\pi_3)_i} \right\} = \frac{3}{2}$ che corrisponde alla variabile x_5 e $k = 2$.

I nuovi vettori delle variabili di base e fuori base sono:

$$x_{B^1} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x_{N^1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \qquad c_{B^1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad c_{N^1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a cui corrispondono le nuove matrici:

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N^1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Costruzione forma canonica.
Calcolo $(B^1)^{-1}N^1$ e $(B^1)^{-1}b$ con operazione di pivot. La matrice di pivot è:

π_3	π_1	π_2	e_2	$(B^0)^{-1}b$
2	1	4	0	6
2	2	1	1	3

Con l'operazione di pivot sull'elemento $(\pi_3)_2 = 2$, si ottiene:

e_2	$(B^1)^{-1}N^1$			$(B^1)^{-1}b$
0	-1	3	-1	3
1	1	1/2	1/2	3/2

Quindi la nuova forma canonica rispetto alla base B^1 è:

$$\begin{aligned} \min \quad & (2 \ -2)\begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} + (-2 \ 4 \ 0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Iterazione 1.
Calcolo dei costi ridotti.

$$\gamma^1 = c_{N^1} - \left[\left(B^1\right)^{-1} N^1\right]^T c_{B^1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^1 \not\geq 0$; si prosegue.
Verifica illimitatezza. Risulta $\pi_2 > 0$; si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta della variabile <u>entrante</u>. C'è un solo costo ridotto negativo, la variabile entrante è x_2 e $h = 2$.
Scelta della variabile <u>uscente</u>. Si sceglie $\min\limits_{\substack{i \\ (\pi_2)_i>0}} \left\{ \dfrac{((B^1)^{-1}b)_i}{(\pi_2)_i} \right\} = 1$ che corrisponde alla variabile x_4 e $k = 1$.
I nuovi vettori delle variabili di base e fuori base sono:

$$x_{B^2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x_{N^2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \qquad c_{B^2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad c_{N^2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a cui corrispondono le nuove matrici:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Costruzione forma canonica.
Calcolo $(B^2)^{-1}N^2$ e $(B^2)^{-1}b$ con operazione di pivot. La matrice di pivot è:

π_2	π_1	e_1	π_3	$(B^1)^{-1}b$
3	-1	1	-1	3
1/2	1	0	1/2	3/2

Con l'operazione di pivot sull'elemento $(\pi_2)_1 = 3$, si ottiene:

e_1	$(B^2)^{-1}N^2$			$(B^2)^{-1}b$
1	-1/3	1/3	-1/3	1
0	7/6	-1/6	2/3	1

Quindi la nuova forma canonica rispetto alla base B^2 è:

$$\begin{aligned} \min \quad & (4 \ \ -2) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (-2 \ 2 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 7/6 & -1/6 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Iterazione 2.
Calcolo dei costi ridotti.

$$\gamma^2 = c_{N^2} - [(B^2)^{-1}N^2]^T c_{B^2} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}.$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^2 > 0$. La soluzione è ottima e vale:

$$x_1^* = x_4^* = x_5^* = 0,\ \ x_2^* = x_3^* = 1;$$

il valore ottimo della funzione obiettivo è pari a 2 e la base ottima B^* è B^2. La soluzione è unica poiché i coefficienti di costo ridotto sono strettamente positivi.
□

Esercizio 6.4.2 *Risolvere con il metodo del simplesso il seguente problema di PL*

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 - x_3 \\ & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Innanzitutto poniamo il problema in forma standard.

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 - x_3 \\ & 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 10 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 10 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 + x_6 = 10 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Il problema è in forma canonica, infatti si può scrivere:

$$\min\ (0\ 0\ 0)\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + (1\ 1\ -1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$
$$x \geq 0$$

e quindi possiamo applicare direttamente la Fase II del metodo del simplesso.
Iterazione 0.
Calcolo dei costi ridotti. $(\gamma^0)^T = c_{N^0}^T = (1\ \ 1\ -1)$
Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^0 \not\geq 0$; si prosegue.

Verifica illimitatezza. La colonna $\pi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \not\leq 0$; si prosegue.

Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta della variabile <u>entrante</u>. C'è un unico costo ridotto negativo -1, che corrisponde alla variabile x_3 ed $h = 3$.
Scelta della variabile <u>uscente</u>. Si sceglie

$$\min_{\substack{i \\ (\pi_3)i>0}} \left\{ \frac{((B^0)^{-1}b)_i}{(\pi_3)_i} \right\} = \frac{((B^0)^{-1}b)_2}{(\pi_3)_2} = \frac{((B^0)^{-1}b)_3}{(\pi_3)_3} = 10$$

cioè $k = 2$ o $k = 3$. Si può scegliere quindi indifferentemente x_5 o x_6. Si sceglie x_5 $(k = 2)$.
Quindi

$$x_{B^1} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} \qquad x_{N^1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \qquad c_{B^1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_{N^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e le corrispondenti matrice di base e fuori base:

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la matrice

$$T^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

o effettuando un'operazione di pivot si ottiene la nuova forma canonica.
Iterazione 1.
Calcolo costi ridotti. Si ha $\gamma^1 = (4 \;\; -1 \;\; 1)^T$
Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^1 \not\geq 0$ e quindi il criterio di ottimalità non è soddisfatto.

Verifica illimitatezza. Risulta $\pi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq 0$, e quindi è soddisfatto il criterio sufficiente di illimitatezza. Il problema dato è quindi illimitato inferiormente. □

Esercizio 6.4.3 *Risolvere, utilizzando il metodo del simplesso, il seguente problema di Programmazione Lineare:*

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Utilizzare esplicitamente la matrice T per il calcolo della nuova forma canonica ad ogni iterazione.

Questo problema è stato già risolto (si veda l'Esercizio 7.4.11 degli *Appunti dalle lezioni di Ricerca Operativa*, dove il calcolo della nuova forma canonica era stato realizzato attraverso l'operazione di pivot). Ora si richiede di risolverlo facendo esplicito uso della matrice T.
Il problema è già in forma canonica:

$$\begin{array}{l} \min(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + (1\ 2\ 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{array}$$

e quindi possiamo applicare direttamente la Fase II del metodo del simplesso.
Iterazione 0.
Calcolo dei costi ridotti. Si ha

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^0 \not\geq 0$ e quindi si prosegue.
Verifica illimitatezza. Risulta

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \not\leq 0 \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \not\leq 0$$

quindi si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta variabile <u>entrante</u>. Il costo ridotto negativo -3 corrisponde alla variabile x_1, cioè $h = 1$.

Scelta variabile uscente.

$$\min_{\substack{i=1,2,3\\(\pi_1)_i>0}} \left\{ \frac{((B^0)^{-1}b)_i}{(\pi_1)_i} \right\} = \left\{ \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{1} \right\} = 1$$

Poichè il minimo è raggiunto per più di un indice, la soluzione trovata sarà degenere. Scegliamo di far uscire la variabile x_5 corrispondente a $k = 2$.
Le nuove matrici di base e fuori base sono:

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a cui corrispondono

$$x_{B^1} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad x_{N_1} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad c_{B^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_{N^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si costruisce la nuova forma canonica utilizzando la matrice

$$T^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo ora calcolare la matrice $(B^1)^{-1}N^1$ e il vettor $(B^1)^{-1}b$. Si ottiene:

$$(B^1)^{-1}N^1 = \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}, \qquad (B^1)^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La nuova forma canonica è quindi:

$$\begin{array}{l} \min(1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} + (1\ 2\ 1) \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{array}$$

Si osservi che la soluzione di base ottenuta ha una componente nulla, cioè è degenere.

Iterazione 1.
Calcolo dei costi ridotti. Si ha

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \\ -7/2 \end{pmatrix}$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^1 \not\geq 0$; si prosegue.
Verifica illimitatezza. Risulta

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} \not\leq 0, \qquad \pi_3 = \begin{pmatrix} 11/2 \\ -5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \not\leq 0$$

si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta variabile entrante. C'è un unico costo ridotto negativo corrispondente all'indice $h = 3$ cioè alla variabile x_3.
Scelta variabile uscente. Si ha

$$\min_{\substack{i=1,2,3 \\ (\pi_3)_i > 0}} \left\{ \frac{((B^1)^{-1}b)_i}{(\pi_3)_i} \right\} = \left\{ \frac{2}{11/2}, \frac{0}{3/2} \right\} = \frac{((B^1)^{-1}b)_3}{(\pi_3)_3} = 0$$

Esce la variabile x_6 corrispondente a $k = 3$.
Le nuove matrici di base e fuori base sono:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a cui corrispondono

$$x_{B^2} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x_{N_2} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad c_{B^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_{N^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si costruisce la nuova forma canonica utilizzando la matrice T^2

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11/3 \\ 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo ora calcolare le matrici $(B^2)^{-1}N^2$, $(B^2)^{-1}b$. Si ottiene:

$$(B^2)^{-1}N^2 = \begin{pmatrix} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad (B^2)^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La nuova forma canonica è:

$$\begin{array}{l} \min(1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + (1\ 2\ 1) \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{array}$$

Iterazione 2.

Calcolo dei costi ridotti.

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 10/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

Verifica ottimalità.

I costi ridotti sono tutti positivi, quindi la soluzione trovata è ottima. La soluzione ottima è

$$x_B^* = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_N^* = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con valore ottimo della funzione obiettivo pari a 3. La soluzione trovata è unica ed è degenere. □

Esercizio 6.4.4 *Risolvere utilizzando il metodo del simplesso il seguente problema di PL:*

$$\begin{aligned} \min\quad & 4x_1 + x_2 + x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ & -x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Innanzitutto scriviamo il problema in forma standard:

$$\begin{aligned} \min\quad & 4x_1 + x_2 + x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Il problema non è in forma canonica; si deve quindi applicare la Fase I. Consideriamo quindi il problema ausiliario:

$$\begin{aligned} \min\quad & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + \alpha_1 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + \alpha_2 = 3 \\ & x_1 - x_2 + 3x_3 + \alpha_3 = 5 \\ & x \geq 0, \qquad \alpha \geq 0. \end{aligned}$$

Il problema ausiliario naturalmente è in forma canonica:

$$\begin{aligned} & \min\ (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + (0\ 0\ 0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \quad \alpha \geq 0 \end{aligned}$$

Si risolve il problema ausiliario con la Fase II del metodo del simplesso.
$B^0 = I$, $x_{B^0} = \alpha$, $x_{N^0} = x$.

Iterazione 0.

Calcolo dei costi ridotti.

$$\gamma^0 = c_{N^0} - (N^0)^T c_{B^0} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^0 \not\geq 0$; si prosegue.

Costruzione nuova base ammissibile.

Scelta della variabile <u>entrante</u>: il minimo costo ridotto è -6 che corrisponde alle variabili x_1, x_3; si sceglie $h = 1$.
Scelta della variabile <u>uscente</u>. Si ha:

$$\min_{\substack{i=1,2,3\\(\pi_1)_i>0}} \left\{ \frac{((B^1)^{-1}b)_i}{(\pi_1)_i} \right\} = \min \left\{ \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{5}{1} \right\} = 1,$$

con $k = 2$ a cui corrisponde la variabile α_2.
Quindi

$$x_{B^1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad x_{N^1} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad c_{B^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_{N^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le nuove matrici di base e fuori base sono:

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Costruzione forma canonica.
Calcolo $(B^1)^{-1}N^1$ e $(B^1)^{-1}b$ con operazione di pivot. La matrice di pivot è data da:

π_1	e_2	π_2	π_3	$(B^0)^{-1}b$
2	0	1	2	4
3	1	3	1	3
1	0	-1	3	5

Con l'operazione di pivot sull'elemento $(\pi_1)_2 = 3$, si ottiene:

e_2	$(B^1)^{-1}N^1$			$(B^1)^{-1}b$
0	-2/3	-1	4/3	2
1	1/3	1	1/3	1
0	-1/3	-2	8/3	4

Quindi la nuova forma canonica rispetto alla base B^1 è:

$$\min \ (1\ 0\ 1) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3 & -1 & 4/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ -1/3 & -2 & 8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0 \quad \alpha \geq 0$$

Iterazione 1.
Calcolo dei costi ridotti.

$$\gamma^1 = c_{N^1} - ((B^1)^{-1}N^1)^T c_{B^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2/3 & -1 & 4/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ -1/3 & -2 & 8/3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^1 \not\geq 0$; si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta della variabile <u>entrante</u>. C'è un'unico costo ridotto negativo che corrisponde alla variabile x_3 ed $h = 3$.
Scelta della variabile <u>uscente</u>. Si sceglie $\displaystyle\min_{\substack{i \\ (\pi_3)_i > 0}} \left\{ \frac{((B^1)^{-1}b)_i}{(\pi_3)_i} \right\} = \frac{3}{2}$ che corrisponde alla variabile α_1 e α_3. Si sceglie α_1 e $k = 1$.
I nuovi vettori delle variabili di base e fuori base sono:

$$x_{B^2} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad x_{N^2} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ x_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad c_{B^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_{N^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le nuove matrici di base e fuori base sono:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Costruzione forma canonica.
Calcolo $(B^2)^{-1}N^2$ e $(B^2)^{-1}b$ con operazione di pivot. La matrice di pivot è data da:

π_3	π_1	π_2	e_1	$(B^1)^{-1}b$
4/3	-2/3	-1	1	2
1/3	1/3	1	0	1
8/3	-1/3	-2	0	4

Con operazione di pivot si ottiene

e_1	$(B^2)^{-1}N^2$			$(B^2)^{-1}b$
1	-1/2	-3/4	3/4	3/2
0	1/2	5/4	-1/4	1/2
0	1	0	-2	0

Quindi la nuova forma canonica rispetto alla base B^2 è:

$$\begin{array}{l} \min\ (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ x_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & -3/4 & 3/4 \\ 1/2 & 5/4 & -1/4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ x_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \quad \alpha \geq 0 \end{array}$$

Iterazione 2.
Calcolo dei costi ridotti. $(\gamma^2)^T = (1\ 0\ 1) - (0\ 0\ 1) = (0\ 0\ 3)$.
Verifica ottimalità. I costi ridotti sono non negativi, quindi la soluzione trovata è ottima. Si tratta di una soluzione degenere.
Verifica ammissibilità problema originario.
Il valore della funzione obiettivo del problema ausiliario $z(\alpha^*)$ è nullo, quindi il problema di PL è ammissibile.
Costruzione della base del problema originario.
Le variabili α_1, α_2 sono uscite dalla base e si possono semplicemente eliminare. Si ottiene

$$\begin{array}{l} \min\ (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/4 \\ 5/4 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \quad \alpha_3 \geq 0 \end{array}$$

La variabile α_3 è invece ancora in base, ma l'elemento $(\pi_3)_2 = 0$. (La variabile α_3 è cioè identicamente nulla). Il vincolo corrispondente è quindi ridondante e si può eliminare. Si ottiene la forma canonica del problema originario rispetto alla base $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (ottenuta da B^2 eliminando la riga e la colonna relative ad α_3):

$$\begin{array}{l} \min\ (1\ 4)\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + x_2 \\ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/4 \\ 5/4 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ x \geq 0. \end{array}$$

INIZIO FASE II

Indichiamo la matrice di base iniziale e la matrice fuori base con:

$$B^0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad N^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Iterazione 0.
Calcolo costi ridotti. $\gamma^0 = -13/4$
Verifica ottimalità. $\gamma^0 < 0$; si prosegue.
Verifica illimitatezza. Risulta $\pi_1 \not\leq 0$; si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta della variabile <u>entrante</u>. Entra in base la variabile x_2 e $h = 1$.
Scelta della variabile <u>uscente</u>. Esce dalla base la variabile x_1 e $k = 2$.
I nuovi vettori delle variabili di base e fuori base sono:

$$x_{B^1} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad x_{N^1} = x_1$$

a cui corrispondono le nuove matrici:

$$B^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$N^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Costruzione forma canonica.
Calcolo $(B^1)^{-1}N^1$ e $(B^1)^{-1}b$ con operazione di pivot. La matrice di pivot è:

π_1	e_2	$(B^0)^{-1}b$
-3/4	0	3/2
5/4	1	1/2

Con l'operazione di pivot sull'elemento $(\pi_1)_2 = 5/4$, si ottiene:

e_2	$(B^1)^{-1}N^1$	$(B^1)^{-1}b$
0	3/5	9/5
1	4/5	2/5

Quindi la nuova forma canonica rispetto alla base B^1 è:

$$\begin{array}{l} \min\ (1\ 1) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} + 4x_1 \\ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 9/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} \\ x \geq 0. \end{array}$$

Iterazione 1.
Calcolo dei costi ridotti. $\gamma^1 = 13/5$
Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^1 > 0$; la soluzione trovata è ottima e unica e vale:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 2/5, \quad x_3^* = 9/5$$

con valore ottimo della funzione obiettivo pari a 11/5. La base ottima B è B^1. □

Esercizio 6.4.5 *Risolvere, utilizzando il metodo del simplesso, il seguente problema di Programmazione Lineare:*

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 - x_3 \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Innanzitutto scriviamo il problema in forma standard:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 - x_3 \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Il problema non è in forma canonica e quindi di deve applicare la Fase I.

Consideriamo quindi il problema ausiliario:

$$\begin{array}{ll} \min & \alpha_1 + \alpha_2 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + \alpha_1 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + \alpha_2 = 2 \\ & x \geq 0, \quad \alpha \geq 0. \end{array}$$

Il problema ausiliario è in forma canonica

$$\min\ (1\ 1)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + (0\ 0\ 0\ 0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0, \quad \alpha \geq 0$$

Si risolve il problema ausiliario con la Fase II del metodo del simplesso.
Iterazione 0.
Calcolo dei costi ridotti.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^0 \not\geq 0$; si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta della variabile <u>entrante</u>: il minimo costo ridotto è -2 che corrisponde alla variabile x_1 e $h = 1$.
Scelta della variabile <u>uscente</u>. Si ha:

$$\min_{\substack{i=1,2\\(\pi_1)_i>0}} \left\{ \frac{((B^0)^{-1}b)_i}{(\pi_1)_i} \right\} = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{2}{1} \right\} = 2$$

Poiché il minimo è raggiunto per più di un indice, la soluzione sarà degenere. Si sceglie di far uscire la variabile α_1 corrispondente a $k = 1$.
Quindi

$$x_{B^1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad x_{N^1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad c_{B^1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_{N^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le nuove matrici di base e fuori base sono:

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la nuova forma canonica attraverso la matrice

$$T^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi si ha:

$$(B^1)^{-1}N^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (B^1)^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ed il problema in forma canonica rispetto alla base B^1 è:

$$\begin{aligned}
&\min\ (0\ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + (1\ 0\ 0\ 0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Iterazione 1.
Calcolo dei costi ridotti. Si ha

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^1 \not\geq 0$; si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta della variabile entrante. C'è un solo costo ridotto negativo $(\gamma^1)_2 = -3$ che corrisponde alla variabile x_2 e $h = 2$.
Scelta della variabile uscente.

$$\min_{\substack{i=1,2 \\ (\pi_2)_i>0}} \left\{ \frac{((B^1)^{-1}b)_i}{\pi_{i2}} \right\} = \frac{0}{3} = 0$$

Si ottiene un valore nullo; questo corrisponde, come previsto, ad una soluzione degenere. La variabile uscente è α_2 e $k = 2$.
Quindi

$$x_{B^2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_{N^2} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad c_{B^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_{N^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le nuove matrici di base e fuori base sono:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si può calcolare la nuova forma canonica attraverso l'uso della matrice

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Iterazione 2.
Calcolo dei costi ridotti. Si ha $(\gamma^2)^T = (1\ 1\ 0\ 0)$.
Verifica ottimalità. Il vettore dei costi ridotti è non negativo, quindi la soluzione trovata è ottima. Calcoliamo

$$(B^2)^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La soluzione ottima vale quindi

$$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 0 \quad \alpha_1^* = \alpha_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$$

Si tratta di una soluzione degenere.

Verifica ammissibilità problema originario.
Il valore della funzione obiettivo del problema ausiliario $z(\alpha^*)$ è nullo, quindi il problema di originario è ammissibile.
Costruzione della base del problema originario.
Le variabili ausiliarie sono tutte fuori base e quindi una base ammissibile per il problema iniziale è B^2, e la soluzione di base ammissibile corrispondente si ottiene eliminando le variabili ausiliarie dalla soluzione ottima. Si applica quindi la Fase II al problema

$$\begin{array}{l}
\min\ (1\ 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (-1\ 0)\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
x \geq 0
\end{array}$$

Risulta

$$B^0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad N^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

INIZIO FASE II
Iterazione 0.
Calcolo dei costi ridotti. Si ha:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^0 \not\geq 0$; si prosegue.
Verifica illimitatezza. La colonna $\pi_1 \not\leq 0$; si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta della variabile <u>entrante.</u> C'è un solo costo ridotto negativo $-\frac{2}{3}$ che corrisponde alla variabile x_3 e $h = 1$.
Scelta della variabile <u>uscente</u>. Risulta $\pi_1 = (1/3 \quad -2/3)^T$ e si ha

$$\min_{\substack{i=1,2 \\ (\pi_1)_i > 0}} \left\{ \frac{((B^0)^{-1}b)_i}{(\pi_1)_i} \right\} = \frac{((B^0)^{-1}b)_1}{(\pi_1)_1} = 6$$

che corrisponde a alla variabile x_1 e $k = 1$.
Quindi si ha

$$x_{B^1} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad x_{N^1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad c_{B^1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_{N^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le nuove matrici di base e fuori base sono

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La nuova forma canonica si può ottenere attraverso la matrice

$$T^1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Iterazione 1.
Calcolo dei costi ridotti. Si ha

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^1 \geq 0$. Quindi la soluzione trovata è ottima. Calcoliamo

$$(B^1)^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix};$$

la soluzione ottima vale quindi:

$$x_1^* = x_4^* = 0, \quad x_2^* = 4, \quad x_3^* = 6$$

con valore della funzione obiettivo pari a -2. La base ottima B^* uguale a B^1. □

Esercizio 6.4.6 *Sia dato il problema di Programmazioe Lineare definito da*

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

con A è $m \times n$. Fornendo una breve giustificazione o un controesempio, stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa: "se A ha rango minore di m, al termine della Fase I del metodo del simplesso alcune variabili artificiali devono essere necessariamente variabili di base".

Vero. Poiché il problema artificiale usato nella Fase I del metodo del simplesso ammette sempre una soluzione ottima, esiste sempre una soluzione di base ammissibile. Se A ha rango minore di m, non esiste una sottomatrice B, $m \times m$, di A non singolare. Quindi la base ammissibile individuata alla fine della Fase I del metodo del simplesso, deve necessariamente contenere almeno una colonna relativa ad una variabile ausiliaria e la SBA corrispondente contiene almeno una variabile ausiliaria. □

7

La dualità nella Programmazione Lineare

7.1 TEORIA DELLA DUALITÀ

Esercizio 7.1.1 *Scrivere il problema duale del seguente problema di Programmazione Lineare:*

$$\begin{aligned}
&\min x_1 - x_2 + x_3 \\
&2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
&x_2 - x_3 \leq 3 \\
&x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Soluzione.

Riscriviamo innanzitutto il vincolo $x_2 - x_3 \leq 3$ nella forma $-x_2 + x_3 \geq -3$.
Il problema duale è:

$$\begin{aligned}
&\max 3u_1 - 3u_2 + 2u_3 \\
&2u_1 + u_3 \leq 1 \\
&3u_1 - u_2 + u_3 \leq -1 \\
&u_2 + u_3 = 1 \\
&u_1 \geq 0, u_2 \geq 0
\end{aligned}$$

□

Esercizio 7.1.2 *Dato il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{aligned}
&\min 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \\
&x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&2x_1 + 3x_4 = 1 \\
&x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4
\end{aligned} \qquad (P)$$

Sia $\bar{x} = (0, 0, 2, 1/3)^T$ *una soluzione ammissibile per (P) e sia* $\bar{u} = (1, 1/3)^T$ *una soluzione ammissibile per il problema duale associato a (P).*

(i) *Scrivere il problema duale di (P).*

(ii) *Dire se* $\bar{x}$ *è una soluzione ottima di (P) e dimostrare l'affermazione utilizzando le condizioni di complementarità.*

Soluzione.
Il problema duale di (P) è:

$$\begin{aligned}
&\max 2u_1 + u_2 \\
&u_1 + 2u_2 \le 2 \\
&u_1 \le 3 \\
&u_1 \le 1 \\
&3u_2 \le 1
\end{aligned}$$

Poiché (P) presenta solo vincoli di uguaglianza, le condizioni di complementarità si riducono a $x^T(c - A^T u) = 0$ cioè:

$$\begin{aligned}
&x_1(2 - u_1 - 2u_2) = 0 \\
&x_2(3 - u_1) = 0 \\
&x_3(1 - u_1) = 0 \\
&x_4(1 - 3u_2) = 0
\end{aligned}$$

Sostituendo i valori delle soluzioni ammissibili $\bar{x}$, $\bar{u}$ rispettivamente per il primale ed il duale, le condizioni di complementarità risultano verificate. Quindi la soluzione $\bar{x}$ è effettivamente ottima per il primale e $\bar{u}$ è ottima per il duale. □

Esercizio 7.1.3 *Dato il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{aligned}
&\min 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\
&x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\
&x_1 + x_3 + 2x_4 = 5 \\
&x_i \ge 0, \qquad i = 1, \ldots, 4
\end{aligned}$$

decidere se la soluzione $u^* = (1/2,\ 1/2)^T$ *è ottima per il problema duale.*

Soluzione.
Il problema duale è:

$$\begin{aligned}
&\max\ 2u_1 + 5u_2 \\
&u_1 + u_2 \le 3 \\
&-u_1 \le 4 \\
&u_1 + u_2 \le 1 \\
&2u_2 \le 1
\end{aligned}$$

Le condizioni di complementarità si scrivono:

$$\begin{aligned}&x_1(3-u_1-u_2)=0\\&x_2(4+u_1)=0\\&x_3(1-u_1-u_2)=0\\&x_4(1-2u_2)=0\end{aligned}$$

Nel punto assegnato u^* le ultime due equazioni sono soddisfatte per qualunque valore di x_3, x_4, mentre le prime due equazioni sono soddisfatte se e solo se $x_1 = 0$ ed $x_2 = 0$. Si tratta di verificare se esiste una soluzione ammissibile del primale con $x_1 = x_2 = 0$. Si pongono a zero le variabili x_1 ed x_2 nel problema primale e si ottiene il problema:

$$\begin{aligned}&\min x_3+x_4\\&x_3=2\\&x_3+2x_4=5\\&x_3\geq 0,\quad x_4\geq 0\end{aligned}$$

Una soluzione ammissibile per questo problema si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases}x_3=2\\x_3+2x_4=5\\x_3\geq 0,\ x_4\geq 0\end{cases}$$

che ha per soluzione $x_3 = 2$ e $x_4 = \dfrac{3}{2}$. Il punto $(0,\ \ 0,\ \ 2,\ \ 3/2)^T$ è una soluzione ammissibile per il problema primale che soddisfa le condizioni di complementarità e quindi $u^* = (1/2,\ 1/2)^T$ è ottima per il duale. □

Esercizio 7.1.4 *Dato il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{aligned}&\max(-x_1-x_2)\\&-x_1+x_2\geq 1\\&2x_1-x_2\leq 2\\&x_1\geq 0\\&x_2\geq 0\end{aligned}$$

scrivere il problema duale. Risolvere il problema primale e il problema duale graficamente e verificare il risultato del Teorema della dualità forte.

Innanzitutto riscriviamo il problema nella forma

$$\begin{aligned}&\max(-x_1-x_2)\\&x_1-x_2\leq -1\\&2x_1-x_2\leq 2\\&x_1\geq 0\\&x_2\geq 0.\end{aligned}$$

Il problema duale è

$$
\begin{aligned}
&\min(-u_1 + 2u_2)\\
&u_1 + 2u_2 \geq -1\\
&-u_1 - u_2 \geq -1\\
&u_1 \geq 0\\
&u_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Risolvendo graficamente i due problemi si ottiene

$$x^\star = (0,1)^T \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad u^\star = (-1,0)^T.$$

In corrispondenza di questi punti risulta

$$c^T x^\star = -1 = b^T u^\star$$

e quindi il Teorema della dualità forte è verificato. □

Esercizio 7.1.5 *Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$
\begin{aligned}
&\min 2x_1 + 9x_2 + 3x_2\\
&-2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1\\
&x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 1\\
&x_1 \geq 0\\
&x_2 \geq 0\\
&x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

a) *Scrivere il problema duale e risolverlo graficamente.*

b) *Utilizzando la complementarità determinare la soluzione del problema primale.*

a) Il problema duale del problema dato è

$$
\begin{aligned}
&\max u_1 + u_2\\
&-2u_1 + u_2 \leq 2\\
&2u_1 + 4u_2 \leq 9\\
&u_1 - u_2 \leq 3\\
&u_1 \geq 0\\
&u_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

e graficamente si ottiene che il punto di ottimo è $u^\star = (7/2, 1/2)^T$.

b) Poiché $u^\star = (7/2, 1/2)^T$ risulta

$$A^T u^\star = \begin{pmatrix} -2 & 1\\ 2 & 4\\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{2}\\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2}\\ 9\\ 3 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$c - A^T u^\star = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi le condizioni di complementarità

$$0 = (x^\star)^T (c - A^T u^\star) = x^T \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

forniscono $x_1 = 0$. Mentre per le condizioni di complementarità

$$(u^\star)^T (Ax^\star - b)$$

essendo $u^\star > 0$ si deve avere $Ax^\star = b$ cioè, tenendo conto che $x_1 = 0$

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si ottiene la soluzione ottima del problema primale data da
$x^\star = (0, 1/3, 1/3)^T$.

□

Esercizio 7.1.6 *Scrivere il problema duale del seguente problema di Programmazione Lineare:*

$$\begin{aligned} &\min 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ &x_1 + x_2 \leq 5 \\ &-3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ &-1 \leq x_1 \leq 1 \\ &x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Supponendo che all'ottimo la prima variabile del problema duale valga 0.5*, qual è il valore all'ottimo della somma delle variabili* x_1 *e* x_2*?*

Soluzione.

Per scrivere il problema duale trasformiamo innanzitutto i vincoli di minore o uguale in vincoli di maggiore o uguale:

$$\begin{aligned} &\min 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ &-x_1 - x_2 \geq -5 \\ &-3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ &x_1 \geq -1 \\ &-x_1 \geq -1 \\ &x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ora possiamo scrivere il problema duale:

$$
\begin{aligned}
&\max -5u_1 - 2u_2 - u_3 - u_4 \\
&-u_1 - 3u_2 + u_3 - u_4 = 3 \\
&-u_1 + 2u_2 \leq -2 \\
&-u_2 = 4 \\
&u_1 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

La condizione di complementarità relativa alla variabile u_1 è:

$$u_1(-x_1 - x_2 + 5) = 0$$

Poiché $u_1^* \neq 0$, deve risultare all'ottimo $-x_1^* - x_2^* + 5 = 0$, quindi la somma delle variabili primali x_1, x_2 all'ottimo è $x_1^* + x_2^* = 5$. □

Esercizio 7.1.7 *Dato il problema di Programmazione Lineare*

$$
\begin{aligned}
&\max 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = z(x) \\
&3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 500 \\
&3x_1 + 2x_3 \leq 460 \\
&x_1 + 4x_2 \leq 420 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

utilizzando la teoria della dualità determinare un intervallo in cui è compreso il valore ottimo $z(x^*)$ della funzione obiettivo.

Soluzione.
Osserviamo preliminarmente che, poiché $x \geq 0$ ed i coefficienti di costo della funzione obiettivo sono positivi, risulta $z(x^*) \geq 0$. Il problema duale è:

$$
\begin{aligned}
&\min 500u_1 + 460u_2 + 420u_3 = g(u) \\
&3u_1 + 3u_2 + u_3 \geq 3 \\
&2u_1 + 4u_3 \geq 2 \\
&u_1 + 2u_2 \geq 5 \\
&u \geq 0
\end{aligned}
$$

Osserviamo che il problema primale è di massimizzazione ed il duale è di minimizzazione, quindi, per il teorema della dualità debole, per ogni soluzione ammissibile primale-duale risulta $z(x) \leq g(u)$. Individuiamo quindi una soluzione ammissibile del problema duale. Fissiamo ad esempio $u_1 = 0$. Si ottiene allora

$$
\begin{aligned}
u_2 &\geq 5/2 \\
u_3 &\geq 1/2 \\
3u_2 + u_3 &\geq 3
\end{aligned}
$$

Quindi fissando $u_3 = 1/2$ si ha $u_2 \geq \max\{5/2, 5/6\} = 5/2$. Una soluzione ammissibile duale è quindi $(0,\ 5/2,\ 1/2)^T$ e la funzione obiettivo duale vale in questo punto $g(u) = 1360$. Quindi, poiché risulta $z(x^*) = g(u^*) \leq g(u)$, si ha $z(x^*) \in [0, 1360]$. $\square$

Esercizio 7.1.8 *Dato il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{array}{l} \max\ 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ x \geq 0 \end{array}$$

si supponga di sapere che x_1 e x_2 sono positive in una soluzione ottima. Utilizzando questa informazione e la teoria della dualità:

(i) *calcolare una soluzione ottima del duale e del primale;*

(ii) *stabilire se può esistere una soluzione ottima con $x_1 = 0$.*

Soluzione.
Il problema duale è:

$$\begin{array}{l} \min 10u_1 + 8u_2 \\ u_1 + 2u_2 \geq 5 \\ 2u_1 - u_2 \geq 12 \\ u_1 + 3u_2 \geq 4 \\ u_1 \geq 0 \end{array}$$

e le condizioni di complementarità sono:

$$\begin{array}{l} u_1(10 - x_1 - 2x_2 - x_3) = 0 \\ x_1(u_1 + 2u_2 - 5) = 0 \\ x_2(2u_1 - u_2 - 12) = 0 \\ x_3(u_1 + 3u_2 - 4) = 0 \end{array}$$

(i) Sapendo che $x_1^* > 0$ e $x_2^* > 0$, dalle condizioni di complementarità, risulta all'ottimo
$$\begin{array}{l} u_1^* + 2u_2^* = 5 \\ 2u_1^* - u_2^* = 12 \end{array}$$
e quindi $u_1^* = 29/5$ e $u_2^* = -2/5$. Sostituendo questo punto nelle condizioni di complementarità si ottiene
$$\begin{array}{l} x_3^* = 0 \\ x_1^* + 2x_2^* = 10 \\ 2x_1^* - x_2^* = 8 \end{array}$$
cioè $x_1^* = 26/5$, $x_2^* = 12/5$, $x_3^* = 0$. Il valore della funzione obiettivo è $z(x^*) = 274/5$.

(ii) Una soluzione ottima con $x_1^* = 0$ deve verificare il vincolo di uguaglianza $-x_2^* + 3x_3^* = 8$ e avere lo stesso valore della funzione obiettivo $12x_2^* + 4x_3^* = 274/5$. Si ottiene la soluzione $x_2^* = 3,31$ e $x_3^* = 3,77$ che non è ammissibile. Non esiste quindi una soluzione ottima con $x_1^* = 0$.

□

Esercizio 7.1.9 *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{aligned} &\max\ b^T x \\ &Ax \leq b, \\ &x \geq 0, \end{aligned}$$

in cui A è una matrice simmetrica $n \times n$. Stabilire se è vera o falsa l'affermazione seguente: "se $\bar{x}$ soddisfa $A\bar{x} = b$ e $\bar{x} \geq 0$ allora $\bar{x}$ è una soluzione ottima del problema assegnato".

Soluzione.
L'affermazione è vera. Infatti, poiché la matrice A è simmetrica risulta $A^T = A$ e il problema duale del problema dato è

$$\begin{aligned} &\min b^T u \\ &Au \geq b, \\ &u \geq 0. \end{aligned}$$

Quindi la soluzione $\tilde{u} = \bar{x}$ è tale che $A\tilde{u} = b$ e $\tilde{u} \geq 0$. Esiste quindi una coppia di soluzioni ammissibili primale e duale $(\bar{x}, \tilde{u})$ che soddisfa le condizioni di complementarità e quindi ottime. □

Esercizio 7.1.10 *Sia dato il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{aligned} &\max 9x_1 + 8x_2 \\ &x_1 + x_2 \leq 10 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ &2x_1 + x_2 \leq 14 \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Supponiamo che si tratti di un modello di Programmazione Lineare relativo all'allocazione ottima di tre risorse A, B, C per la produzione di due beni x_1, x_2.

(i) *Si risolva il problema graficamente, indicando il punto ottimo; si determini tale punto ed il valore corrispondente della funzione obiettivo.*

(ii) *Supponiamo che il primo vincolo corrisponda ad un limite di disponibilità per la risorsa A, il secondo per la B ed il terzo per la C. A quale risorsa corrisponde sicuramente nel problema duale una variabile nulla all'ottimo?*

(iii) *Si supponga di poter incrementare la disponibilità della risorsa A, trasformando il primo vincolo in*

$$x_1 + x_2 \leq 10 + k.$$

Determinare graficamente il valore di k oltre il quale ulteriori incrementi della risorsa A non fanno aumentare il profitto.

Soluzione

(i) L'insieme ammissibile e le curve di livello della funzione obiettivo sono rappresentate nella Figura 7.1.1 dove l'insieme ammissibile è evidenziato in grigio e la curva di livello della funzione obiettivo corrispondente al valore ottimo è tratteggiata.

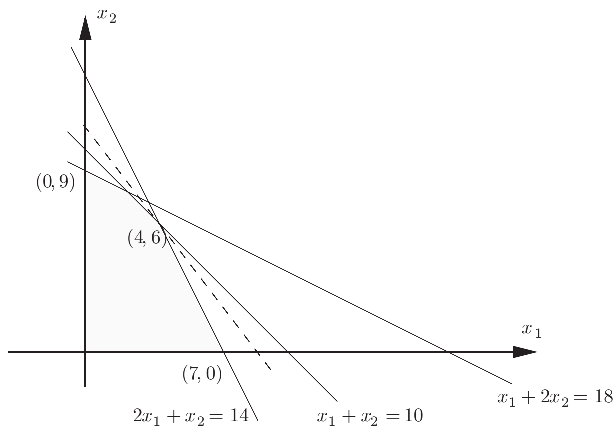


Fig. 7.1.1 Rappresentazione grafica del problema.

Il massimo è raggiunto nel vertice $(4, 6)^T$ che si ottiene come intersezione delle rette

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 14 \end{cases}$$

a cui corrisponde il valore per la funzione obiettivo 84.

(ii) All'ottimo devono valere le condizioni di complementarità, cioè

$$\begin{gathered} u_1^*(10 - x_1^* + x_2^*) = 0 \\ u_2^*(18 - x_1^* - 2x_2^*) = 0 \\ u_3^*(14 - 2x_1^* - x_2^* = 0 \end{gathered}$$

La variabile duale che deve essere necessariamente nulla all'ottimo è quella che corrisponde ad un vincolo non attivo nel problema primale; in $(4,\ 6)^T$ non è attivo il vincolo relativo alla risorsa B, quindi $u_2^* = 0$.

(iii) L'aumento della risorsa A consente di aumentare il profitto finché il vincolo corrispondente rimane attivo. Analizzando graficamente, il vincolo $x_1 + x_2 = 10 + k$ rappresenta un fascio di rette parallele. All'aumentare di k il vincolo si sposta fino ad incontrare il punto P, ottenuto come intersezione dei vincoli relativi alla risorsa A e C. Per ulteriori aumenti di k il vincolo è ridondante e quindi non influenza più la soluzione. In Figura 7.1.2 la retta tratteggiata $x_1 + x_2 = 10 + 2/3$ individua il valore massimo della risorsa A oltre il quale un aumento non consente ulteriore guadagno.

Il punto P si ottiene come intersezione delle rette

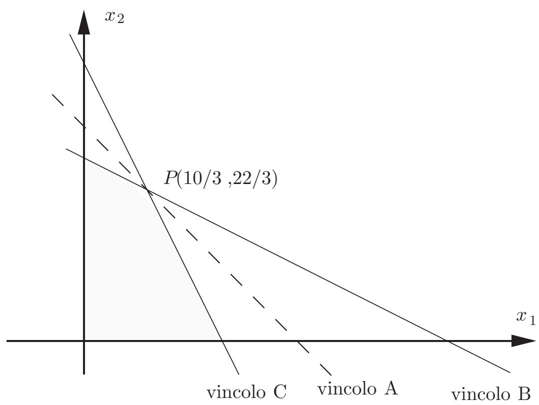


Fig. 7.1.2 Rappresentazione grafica del problema.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 18 \\ 2x_1 + x_2 = 14 \end{cases}$$

cioè il punto $P(10/3, 22/3)$. La retta del fascio $x_1 + x_2 = 10 + k$ passante per il punto P, è quindi

$$10/3 + 22/3 = 10 + k$$

che corrisponde a $k = 2/3$.

□

Esercizio 7.1.11 *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{aligned} &\max c_1 x_1 + x_2 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ &x_1 + x_2 \leq 4 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Determinare graficamente una soluzione ottima assumendo $c_1 = 2$ e determinare l'intervallo entro cui può variare c_1 perché la soluzione ottima rimanga invariata.

Soluzione.
Per $c_1 = 2$ la funzione obiettivo è $z = 2x_1 + x_2$. In Figura 7.1.3 la regione ammissibile è disegnata in grigio, e la retta di livello relativa al valore ottimo della funzione obiettivo è tratteggiata.

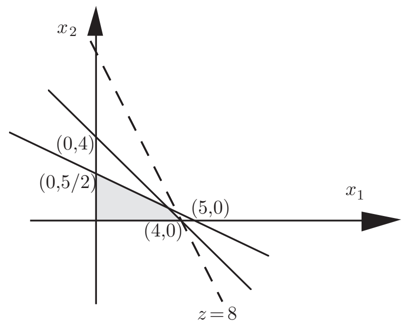


Fig. 7.1.3 Rappresentazione grafica del problema.

La soluzione ottima è nel punto $x_1^* = 4, x_2^* = 0$ con valore ottimo della funzione obiettivo $z(x^*) = 8$. La soluzione rimane invariata per valori di $c_1 \geq 1$. □

Esercizio 7.1.12 *Determinare la soluzione ottima (se esiste) del seguente problema di Programmazione Lineare, risolvendo graficamente il problema duale.*

$$
\begin{aligned}
&\min 2x_1 + x_2 \\
&x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\
&3x_1 + x_2 + x_4 = 7 \\
&x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Soluzione.
Il problema duale è

$$
\begin{aligned}
&\max 3u_1 + 7u_2 \\
&u_1 + 3u_2 = 2 \\
&u_1 + u_2 = 1 \\
&u_1 \leq 0 \\
&u_2 \leq 0
\end{aligned}
$$

La regione ammissibile del problema duale è vuota, come si può vedere in Figura 7.1.4.

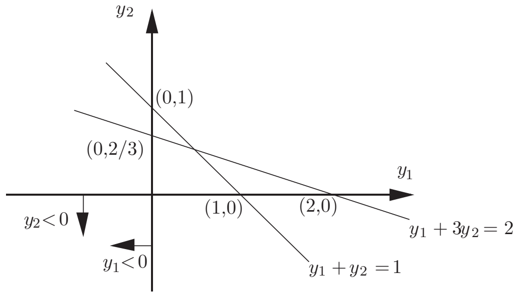


Fig. 7.1.4 L'insieme ammissibile del problema duale è vuoto.

Il problema primale può avere insieme ammissibile vuoto, oppure funzione obiettivo illimitata inferiormente; in entrambi i casi non ammette soluzione ottima. Osserviamo però che si può determinare facilmente una soluzione ammissibile primale fissando $x_3 = x_4 = 0$. Si ottiene $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Quindi l'insieme ammissibile primale è non vuoto ed il primale è illimitato inferiormente. $\square$

8

Modelli di Programmazione Lineare Intera

8.1 MODELLI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA

Esercizio 8.1.1 *Una compagnia petrolifera dispone di 5 pozzi (P1, P2, P3, P4, P5) dai quali può estrarre petrolio. Le quantità massime di petrolio estraibili giornalmente da ciascuno dei pozzi e il costo di estrazione (in migliaia di lire) di un ettolitro di petrolio è riportato nella seguente tabella*

	P1	P2	P3	P4	P5
quantità massime	1100	870	950	1500	800
costo unitario	150	130	135	180	125

La compagnia deve pianificare giornalmente l'estrazione del petrolio scegliendo quali dei pozzi utilizzare e la quantità di petrolio da estrarre da ciascuno di essi dovendo soddisfare esattamente una richiesta giornaliera di 3000 ettolitri di petrolio minimizzando il costo complessivo dato dal costo di estrazione e dal costo giornaliero degli operai addetti; quest'ultimo costo è differenziato a seconda dei pozzi ed è riportato nella tabella seguente in migliaia di lire

	P1	P2	P3	P4	P5
costo operai	5000	4500	4800	5200	4300

Costruire un modello lineare che rappresenti il problema di pianificazione descritto tenendo conto che il costo degli operai è legato all'utilizzazione di un determinato pozzo cioè tale costo esiste solo se il corrispondente pozzo è effettivamente utilizzato.

Formulazione.

Si tratta di un problema di costo fisso e può essere rappresentato mediante un modello di Programmazione Lineare Intera come segue.

– *Variabili.* Indichiamo con x_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, la quantità in ettolitri estratta giornalemte rispettivamente dal pozzo Pi ed inoltre introduciamo le variabili binarie δ_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, così definite:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se il pozzo P}i \text{ è utilizzato} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare sarà data dal costo complessivo e quindi si può esprimere nella forma

$$150x_1+130x_2+135x_3+180x_4+125x_5+5000\delta_1+4500\delta_2+4800\delta_3+5200\delta_4+4300\delta_5.$$

– *Vincoli.* Si devono considerare il vincolo dovuto alla richiesta giornaliera

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3000,$$

e i vincoli derivanti dalla presenza dei costi fissi:

$$\begin{aligned} x_1 - 1100\delta_1 &\leq 0 \\ x_2 - 870\delta_2 &\leq 0 \\ x_2 - 950\delta_3 &\leq 0 \\ x_3 - 1500\delta_4 &\leq 0 \\ x_4 - 800\delta_5 &\leq 0. \end{aligned}$$

Infine devono essere esplicitati i vincoli

$$x_i \geq 0, \qquad \delta_i \in \{0, 1\}, \qquad\qquad i = 1, \ldots, 5.$$

Quindi la formulazione completa può essere così riassunta:

$$\begin{cases} \min 150x_1 + 130x_2 + 135x_3 + 180x_4 + 125x_5 + \\ \qquad 5000\delta_1 + 4500\delta_2 + 4800\delta_3 + 5200\delta_4 + 4300\delta_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3000 \\ x_1 - 1100\delta_1 \leq 0 \\ x_2 - 870\delta_2 \leq 0 \\ x_2 - 950\delta_3 \leq 0 \\ x_3 - 1500\delta_4 \leq 0 \\ x_4 - 800\delta_5 \leq 0 \\ x_i \geq 0, \qquad \delta_i \in \{0, 1\}, \qquad\qquad i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

□

Esercizio 8.1.2 *Una casa automobilistica produce quattro modelli differenti di automobili (Mod1, Mod2, Mod3, Mod4) dispondendo di tre catene di montaggio (C1, C2, C3). Per ottenere un modello finito di ciascun tipo di automobile è necessaria la lavorazione su una sola catena di montaggio. La tabella che segue riporta per ciascuna catena di montaggio i costi (in milioni di lire) necessari per produrre un modello di automobile insieme ai costi di attivazione (in milioni di lire) e alla quantità minima di automobili che devono essere prodotte.*

	C1	C2	C3	quantità minima di automobili
Mod1	10	12	11	15000
Mod2	9	10.5	9.5	10000
Mod3	13	14.5	12.5	7500
Mod4	15	16	15.5	5000
costi attivazione	50	60	55	

Costruire un modello lineare che permetta di determinare le quantità di ciascun modello da fabbricare su ciascuna catena di montaggio minimizzando i costi complessivi di produzione, tenendo conto che per motivi tecnici possono essere utilizzate al piú due catene di montaggio e che le tre catene di montaggio hanno rispettivamente le seguenti capacità massime di produzione: 10000 automobili C1, 20000 automobili C2 e 25000 automobili C3.

Formulazione.

Si tratta di un problema di pianificazione della produzione in cui sono presenti anche costi fissi di attivazione delle catene di montaggio.

– *Variabili.* Si introducono le variabili x_{ij} per rappresentare il numero di automobili del modello i-esimo da produrre sulla catena di montaggio j-esima ($i = 1, \dots, 4,\ j = 1, 2, 3$). Inoltre si introducono le variabili binarie δ_1, δ_2 e δ_3 ad indicare l'attivazione o la non attivazione della catena di montaggio j-esima, $j = 1, 2, 3$ e quindi così definite:

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & \text{se la catena di montaggio C}i\text{ è attivata} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è data dal costo complessivoe quindi può essere scritta

$$10x_{11} + 12x_{12} + 11x_{13} + 9x_{21} + 10.5x_{22} + 9.5x_{23} + 50\delta_1 + 60\delta_2 + 55\delta_3.$$

– *Vincoli.* Si devono considerare i vincoli sulla quantità minima di automobili da produrre che possono essere scritti

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \quad \geq \quad 15000$$

$$\begin{aligned} x_{21} + x_{22} + x_{23} &\geq 10000 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\geq 7500 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} &\geq 5000. \end{aligned}$$

Ci sono poi i vincoli dovuti alla presenza dei costi fissi:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} - 10000\delta_1 &\leq 0 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} - 20000\delta_2 &\leq 0 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} - 25000\delta_3 &\leq 0. \end{aligned}$$

Per esprimere la condizione che al piú due catene di montaggio possono essere utilizzate è sufficiente introdurre il vincolo

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 2.$$

Infine devono essere esplicitati i vincoli

$$x_{ij} \geq 0, \quad \text{intere} \qquad \delta_i \in \{0, 1\}, \qquad\qquad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3.$$

Quindi il modello complessivo è dato da

$$\begin{cases} \min 10x_{11} + 12x_{12} + 11x_{13} + 9x_{21} + 10.5x_{22} + 9.5x_{23} + 50\delta_1 + 60\delta_2 + 55\delta_3 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 15000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 10000 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 7500 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} \geq 5000 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} - 10000\delta_1 \leq 0 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} - 20000\delta_2 \leq 0 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} - 25000\delta_3 \leq 0 \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 2 \\ x_{ij} \geq 0, \quad \text{intere} \qquad \delta_i \in \{0, 1\}, \qquad\qquad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

□

Esercizio 8.1.3 *Un'azienda produce fertilizzanti e possiede quattro depositi distribuiti in un'area geografica. In ogni deposito si ha la seguente domanda fissata di fertilizzanti (in quintali).*

Dep. 1	Dep. 2	Dep. 3	Dep. 4
400	500	250	350

Tale azienda vuole costruire alcune fabbriche che producono il fertilizzante e deve decidere dove costruirle in modo da poter rifornire tutti depositi soddisfando esattamente le richieste. Per ragioni economiche, pur avendo a disposizione tre possibili luoghi (A, B, C) dove costruire le fabbriche, non può costruirne più di due.

I costi necessari per costruire una fabbrica in ciascuno dei tre luoghi possibli sono riportati nella seguente tabella (in milioni di lire) insieme alla quantità massima di fertilizzante che si può produrre in ciascuna fabbrica se questa fosse costruita nel luogo A, B o C.

	A	B	C
Costo costr.	50	40	30
quantità max	9000	6500	2000

I costi unitari di trasporto da ciascuna delle possibili fabbriche a ciascun deposito sono i seguenti (in migliaia di lire)

	Dep. 1	Dep. 2	Dep. 3	Dep. 4
A	12	14	9	15
B	18	9	7	12
C	8.5	11	10	15

Formulare un modello lineare che permetta di decidere dove costruire le due fabbriche e di pianificare i trasporti in modo da minimizzare i costi complessivi.

Formulazione.

Si tratta di un problema di localizzazione di impianti che può essere formulato come segue.

– *Variabili.* Si introducono le varibili x_{ij} per rappresentare il quantitativo di fertilizzante da trasportare dalla fabbrica i-esima ($i = A, B, C$), al deposito j-esimo ($j = 1, 2, 3, 4$). Inoltre si introducono le variabili δ_A, δ_B e δ_C ad indicare la costruzione della fabbrica nei luoghi A, B, C e quindi così definite:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se una fabbrica è costruita nell'area } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = A, B, C.$$

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è data da

$$\begin{aligned} &12x_{A1} + 14x_{A2} + 9x_{A3} + 15x_{A4} + 18x_{B1} + 9x_{B2} + 7x_{B3} + 12x_{B4} + \\ &+8.5x_{C1} + 11x_{C2} + 10x_{C3} + 15x_{C4} + 50000\delta_A + 40000\delta_B + 30000\delta_C. \end{aligned}$$

– *Vincoli.* Si devono considerare i vincoli di domanda

$$\begin{aligned} x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} &= 400 \\ x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} &= 500 \\ x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} &= 250 \\ x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} &= 350, \end{aligned}$$

i vincoli dei costi fissi

$$\begin{aligned} x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} - 9000\delta_A &\leq 0 \\ x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4} - 6500\delta_B &\leq 0 \\ x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4} - 9000\delta_C &\leq 0, \end{aligned}$$

e il vincolo sul massimo numero di fabbriche costruibili

$$\delta_A + \delta_B + \delta_C \leq 2;$$

inoltre devono essere esplicitati i vincoli

$$x_{ij} \geq 0, \qquad \delta_i \in \{0,1\}, \qquad\qquad i = A, B, C, \quad j = 1,2,3,4.$$

Quindi il modello complessivo può essere scritto:

$$\begin{cases} \min(12x_{A1} + 14x_{A2} + 9x_{A3} + 15x_{A4} + 18x_{B1} + 9x_{B2} + 7x_{B3} + 12x_{B4} \\ \qquad + 8.5x_{C1} + 11x_{C2} + 10x_{C3} + 15x_{C4} + 50000\delta_A + 40000\delta_B + 30000\delta_C) \\ x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} = 400 \\ x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} = 500 \\ x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} = 250 \\ x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} = 350 \\ x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} - 9000\delta_A \leq 0 \\ x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4} - 6500\delta_B \leq 0 \\ x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4} - 9000\delta_C \leq 0 \\ \delta_A + \delta_B + \delta_C \leq 2 \\ x_{ij} \geq 0, \qquad \delta_i \in \{0,1\}, \qquad\qquad i = A, B, C, \quad j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

□

Esercizio 8.1.4 *Un'industria dispone di quattro magazzini dislocati in regioni diverse del territorio nazionale e riceve ordini da cinque clienti differenti (C1, C2, C3, C4, C5) che deve essere soddisfatto esattamente. Ciascuno dei quattro magazzini già dispone di un quantitativo di merce, ma a causa di una carenza di personale solo due dei quattro magazzini possono essere usati per prelevare la merce da destinare ai cinque clienti. La tabella che segue riporta i costi unitari (in migliaia di lire) per il trasporto della merce da ciascuno dei quattro magazzini a ciascuno dei clienti, insieme ai costi necessari per rendere operativi i magazzini (in milioni di lire), e alle loro disponibilità (in quintali); si riportano inoltre i quantitativi di merce ordinati da ciascun cliente:*

	C1	C2	C3	C4	C5	costi attivazione	disponiblità
MAG1	20	40	30	25	21	8.5	3500
MAG2	50	25	15	45	30	9	4500
MAG3	20	15	25	40	10	20	4000
MAG4	10	20	50	35	18	25	3000
ordini dei clienti	1000	1500	900	800	1200		

Costruire un modello lineare che permetta di determinare quali magazzini usare dei quattro disponibili e i quantitativi di merce da trasportare in modo da minimizzare il costo complessivo dato dalla somma dei costi di attivazione dei magazzini necessari per renderli operativi e i costi dei trasporti.

Formulazione.

Il problema può essere formulato come segue:

– *Variabili.* Introduciamo le variabili x_{ij} per indicare il quantitativo di merce da trasportare da magazzino i-esimo al cliente j-esimo ($i = 1, \ldots, 4,\ j = 1, \ldots 5$). Inoltre, introduciamo le variabili binarie

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se il magazzino } i\text{-esimo è utilizzato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, 4.$$

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è data dal costo complessivo ed è quindi esprimibile come

$$\begin{aligned} &20x_{11} + 40x_{12} + 30x_{13} + 25x_{14} + 21x_{15} + 50x_{21} + 25x_{22} + 15x_{23} + 45x_{24} + 30x_{25} + \\ &20x_{31} + 15x_{32} + 25x_{33} + 40x_{34} + 10x_{35} + 10x_{41} + 20x_{42} + 50x_{43} + 35x_{44} + 18x_{45} + \\ &8500\delta_1 + 9000\delta_2 + 20000\delta_3 + 25000\delta_4. \end{aligned}$$

– *Vincoli.* Si devono considerare i vincoli dovuti agli ordini dei clienti che assumiamo debbano essere soddisfatti esattamente:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1500 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 900 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 800 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} &= 1200. \end{aligned}$$

Si devono poi considerare i vincoli dovuti alla presenza dei costi fissi:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} - 3500\delta_1 &\leq 0 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} - 4500\delta_2 &\leq 0 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} - 4000\delta_3 &\leq 0 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} - 3000\delta_4 &\leq 0. \end{aligned}$$

Poiché solo due dei magazzini sono utilizzabili deve risultare

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \leq 2.$$

Infine devono essere esplicitati i vincoli

$$x_{ij} \geq 0, \qquad \delta_i \in \{0,1\}, \qquad\qquad i = 1,2,3,4, \quad j = 1,2,3,4,5.$$

Quindi il modello complessivo si può riassumere nella forma

$$\begin{cases}
\min\Big(20x_{11} + 40x_{12} + 30x_{13} + 25x_{14} + 21x_{15} + 50x_{21} + 25x_{22} + \\
\quad + 15x_{23} + 45x_{24} + 30x_{25} + 20x_{31} + 15x_{32} + 25x_{33} + 40x_{34} \\
\quad + 10x_{35} + +10x_{41} + 20x_{42} + 50x_{43} + 35x_{44} + 18x_{45} + \\
\quad + 8500\delta_1 + 9000\delta_2 + 20000\delta_3 + 25000\delta_4\Big) \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1000 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1500 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 900 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 800 \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1200 \\
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} - 3500\delta_1 \leq 0 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} - 4500\delta_2 \leq 0 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} - 4000\delta_3 \leq 0 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} - 3000\delta_4 \leq 0 \\
\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \leq 2 \\
x_{ij} \geq 0, \qquad \delta_i \in \{0,1\}, \qquad\qquad i = 1,2,3,4, \quad j = 1,2,3,4,5.
\end{cases}$$

□

Esercizio 8.1.5 *Un'industria produce computer utilizzando due fabbriche (F1, F2) dislocate in due differenti regioni. Si prende in considerazione un particolare modello di computer per la cui produzione queste due fabbriche hanno le seguenti caratteristiche (costo di produzione unitario in euro), numero massimo di computer che si possono produrre settimanalmente)*

	F1	*F2*
costo di produzione	*450*	*490*
capacità massima	*800*	*100*

Ogni computer dopo la fabbricazione viene trasportato a centri di imballaggio dove viene preparato per la vendita. L'industria dispone di 3 centri di imballaggio (C1, C2, C3) che possono essere utilizzati. La tabella che segue riporta i costi di trasporto di un computer da ciascuna fabbrica a ciascun centro di imballaggio (in euro), insieme al numero di operai necessari in ogni centro, al numero di ore necessarie per imballare un computer e alla capacità massima di ciascun centro:

	C1	*C2*	*C3*
F1	*10*	*9.5*	*8*
F2	*7.5*	*8.5*	*9*
numero operai	*10*	*8*	*9*
ore per l'imballaggio	*1.5*	*1.1*	*1.2*
capacità massima	*400*	*500*	*450*

I centri di imballaggio hanno una capacità limitata in quanto ogni operaio lavora 35 ore settimanali. Costruire un modello lineare che permetta di formulare un piano settimanale della produzione di questa industria che permetta di decidere settimanalmente quali centri di imballaggio attivare in modo da massimizzare il profitto netto complessivo sapendo che tutti i computer trasportati ai centri settimanalmente vengono venduti nella settimana stessa e che il prezzo di vendita è di euro 900 ogni computer. Tenere inoltre conto del fatto che al più due dei tre centri possono essere attivati in una stessa settimana.

9
Teoria della Programmazione Lineare Intera

Non sono disponibili esercizi relativi a questo capitolo.

10

Soluzione di problemi di Programmazione Lineare Intera

10.1 ESERCIZI SULLA SOLUZIONE DI PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA

Esercizio 10.1.1 *Risolvere con il metodo del Branch and Bound il seguente problema di Programmazione Lineare Intera*[1]

$$
Prob^{(0)} \qquad \begin{cases} \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 1 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \quad \textit{interi.} \end{cases}
$$

Soluzione.

È un problema di massimizzazione, quindi le soluzioni dei problemi rilassati forniranno dei limiti superiori ("upper bounds") al valore della soluzione ottima intera. Inoltre, il valore della funzione obiettivo calcolato in corrispondenza ad una soluzione ammissibile fornirà una limitazione inferiore del valore ottimo del problema originario. Per la soluzione dei problemi rilassati si può utilizzare il metodo grafico oppure utilizzare un solutore di problemi di Programmazione Lineare.

La soluzione ottima $\bar{x}^{(0)}$ del rilassamento lineare di $Prob^{(0)}$ è $\bar{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 17/6 \end{pmatrix}$ e fornisce un "upper bound" pari a $U_0 = \bar{x}^{(0)} = 59/6 = 9.8333\ldots$. Se effet-

[1] cfr. A. Sassano, *Metodi e Modelli della Ricerca Operativa*, Franco Angeli, 1999.

tuiamo un semplice arrotondamento all'intero inferiore delle componenti di $\bar{x}^{(0)}$ otteniamo il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Poichè tale vettore è ammissibile per $Prob^{(0)}$, possiamo porre come prima soluzione ammissibile del problema originario (ottimo corrente) $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e quindi possiamo inizializzare il valore ottimo corrente $\tilde{z}$ con il valore corrispondente cioè $\tilde{z} = 8$ (che è una limitazione inferiore dell'ottimo del problema intero).
Non è possibile chiudere il problema $Prob^{(0)}$ in quanto la soluzione $\bar{x}$ non è intera e l'"upper bound" U_0 è strettamente maggiore di $\tilde{z}$. Si procede quindi alla separazione del problema $Prob^{(0)}$. Possiamo separare rispetto ad una qualsiasi delle variabili non intere, per semplicità separiamo rispetto alla variabile con indice più piccolo (x_1). A tale scopo, aggiungiamo ai vincoli del problema $Prob^{(0)}$, i due vincoli $x_1 \geq \lceil \bar{x}_1^{(0)} \rceil$ e $x_1 \leq \lfloor \bar{x}_1^{(0)} \rfloor$ cioè $x_1 \geq 3$ e $x_1 \leq 2$.
Si ottengono i due sottoproblemi seguenti che vengono inseriti nella lista:

$$Prob^{(1)} \quad \begin{cases} \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 1 \leq x_1 \leq 2 \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \quad \text{intere} \end{cases} \qquad Prob^{(2)} \quad \begin{cases} \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 3 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \quad \text{intere} \end{cases}$$

• Estraiamo un problema dalla lista $\mathcal{L} = \{Prob^{(1)}, \ \ Prob^{(2)}\}$ dei problemi candidati. In particolare esaminiamo il problema $Prob^{(1)}$. Il rilassamento lineare del problema $Prob^{(1)}$ ha soluzione $\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$ e fornisce il corrispondente valore $U_1 = 8.5$.
Il problema non è eliminabile in quanto $U_1 > \tilde{z}$. La prima componente di $\bar{x}^{(1)}$ è intera mentre la seconda componente è frazionaria. Scegliamo quindi la variabile x_2 per effettuare la separazione. A tale scopo, aggiungiamo alla formulazione di $Prob^{(1)}$ i due vincoli $x_2 \leq 2$ e $x_2 \geq 3$. In tal modo, otteniamo i due problemi seguenti che inseriamo nella lista:

$$Prob^{(3)} \quad \begin{cases} \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 1 \leq x_1 \leq 2 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \quad \text{intere} \end{cases} \qquad Prob^{(4)} \quad \begin{cases} \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 1 \leq x_1 \leq 2 \\ 3 \leq x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \quad \text{intere} \end{cases}$$

• Estraiamo dalla lista $\mathcal{L} = \{Prob^{(2)}, Prob^{(3)}, Prob^{(4)}\}$ il problema $Prob^{(2)}$. La soluzione del rilassamento lineare del problema $Prob^{(2)}$ è $\bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ con valore $U_2 = 9.5$. Il problema non è eliminabile ed effettuiamo la separazione rispetto alla variabile x_2 (infatti la seconda componente di $\bar{x}^{(2)}$ è frazionaria). Dobbiamo aggiungere alla formulazione di $Prob^{(2)}$ i due vincoli $x_2 \leq 0$ e $x_2 \geq 1$. In tal modo, otteniamo i due problemi seguenti da aggiungere alla lista:

$$Prob^{(5)} \quad \begin{cases} \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 3 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \quad \text{intere} \end{cases} \qquad Prob^{(6)} \quad \begin{cases} \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 3 \leq x_1 \leq 4 \\ 1 \leq x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \quad \text{intere} \end{cases}$$

• Estraiamo dalla lista $\mathcal{L} = \{Prob^{(3)}, Prob^{(4)}, Prob^{(5)}, Prob^{(6)}\}$ il problema $Prob^{(3)}$. La soluzione del rilassamento lineare del problema $Prob^{(3)}$ è $\bar{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ con valore $U_3 = 8$. Siccome risulta $U_3 = \tilde{z}$, si chiude il problema.

• Estraiamo dalla lista $\mathcal{L} = \{Prob^{(4)}, Prob^{(5)}, Prob^{(6)}\}$ il problema $Prob^{(4)}$. Siccome Il problema $Prob^{(4)}$ non ha soluzioni ammissibili, si chiude il problema.

• Estraiamo dalla lista $\mathcal{L} = \{Prob^{(5)}, Prob^{(6)}\}$ il problema $Prob^{(5)}$. La soluzione del rilassamento lineare del problema $Prob^{(5)}$ è $\bar{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} 3.14\ldots \\ 0 \end{pmatrix}$ con valore $U_5 = 9.428\ldots$. Risulta $U_5 < \tilde{z}$, e quindi viene effettuata la separazione rispetto alla variabile x_1 di $Prob^{(5)}$. A tale scopo, si aggiungono al problema $Prob^{(5)}$ i due vincoli $x_1 \leq 3$ e $x_1 \geq 4$, ottenendo i due problemi da aggiungere alla lista:

$$Prob^{(7)} \quad \begin{cases} \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 3 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \quad \text{intere} \end{cases} \qquad Prob^{(8)} \quad \begin{cases} \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 4 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \quad \text{intere} \end{cases}$$

• Estraiamo dalla lista $\mathcal{L} = \{Prob^{(6)}, Prob^{(7)}, Prob^{(8)}\}$ il problema $Prob^{(6)}$. Il problema $Prob^{(6)}$ non ha soluzioni ammissibili e viene chiuso.

• Estraiamo dalla lista $\mathcal{L} = \{Prob^{(7)}, Prob^{(8)}\}$ il problema $Prob^{(7)}$. La soluzione del rilassamento lineare del problema $Prob^{(7)}$ è $\bar{x}^{(7)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ con valore $U_7 = 9$. La soluzione $\bar{x}^{(7)}$ è intera e inoltre $U_7 > \tilde{z}$, quindi la soluzione corrente viene aggiornata: si pone $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\tilde{z} = 9$.

• Estraiamo dalla lista $\mathcal{L} = \{Prob^{(8)}\}$ il problema $Prob^{(8)}$. Il problema $Prob^{(8)}$ non ha soluzioni ammissibili e viene chiuso.

• La lista $\mathcal{L}$ è ora vuota, il procedimento quindi termina. La soluzione ottima è data dalla soluzione corrente, ossia dalla soluzione del problema $Prob^{(7)}$.

L'*Albero di Enumerazione* è riportato in Figura 10.1.1.

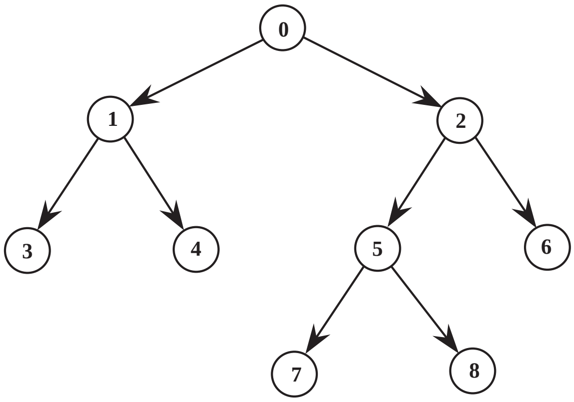


Fig. 10.1.1 Albero di enumerazione.

Esercizio 10.1.2 *Sia dato il seguente problema di Programmazione Lineare Intera*

$$\begin{cases} \max 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \quad \text{interi.} \end{cases} \tag{10.1.1}$$

Sia $\bar{x} = \begin{pmatrix} 9/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ *la soluzione ottima del rilassamento lineare del problema (10.1.1), con valore ottimo della funzione obiettivo* $\bar{z} = 41.25$.

(i) *Si effettui una operazione di separazione rispetto alla variabile* x_2 *generando due sottoproblemi* $Prob^{(1)}$, $Prob^{(2)}$.

(ii) *La soluzione ottima del rilassamento del problema* $Prob^{(1)}$ *è*

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \textit{con valore ottimo} \qquad \bar{z}^{(1)} = 39$$

mentre per il problema $Prob^{(2)}$ *si ha*

$$\bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \textit{con valore ottimo} \qquad \bar{z}^{(2)} = 41$$

Utilizzando il metodo del Branch and Bound dire se è possibile chiudere qualche problema della lista dei candidati e indicare le eventuali operazioni di separazione.

(i) La soluzione ottima del rilassamento lineare del problema (10.1.1) non è intera. Si può separare rispetto alla variabile x_2. Si ha $\lfloor x_2 \rfloor = 3$ e $\lceil x_2 \rceil = 4$ quindi si ottengono i due sottoproblemi:

$$Prob^{(1)} \begin{cases} \max 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \quad \text{interi} \end{cases} \qquad Prob^{(2)} \begin{cases} \max 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, \quad x_1, x_2 \quad \text{interi} \end{cases}$$

(ii) Per rispondere al secondo quesito, è necessario individuare una soluzione ammissibile per il problema (10.1.1) ed un valore di ottimo corrente a cui fare riferimento. Un valore ammissibile si può ottenere considerando la parte intera inferiore della soluzione ottima $\bar{x}$ del rilassamento lineare del problema (10.1.1); in particolare si ha $\lfloor \bar{x}_1 \rfloor = 2$ e $\lfloor \bar{x}_2 \rfloor = 3$; poiché il punto $(2, 3)^T$ così ottenuto è ammissibile per il problema originario (10.1.1), si può prendere $\tilde{x} = (2, 3)^T$ come ottimo corrente con $\tilde{z} = 34$ valore ottimo corrispondente. La soluzione ottima del rilassamento lineare del problema

$Prob^{(1)}$ è intera con valore ottimo $\bar{z}^{(1)} > \tilde{z}$. Quindi si aggiorna l'ottimo corrente e si pone pari a 39. Il problema $Prob^{(2)}$ non ha soluzione intera e $\bar{z}^{(2)} = 41$ risulta maggiore dell'ottimo corrente; quindi il problema $Prob^{(2)}$ non può essere chiuso. Si deve ulteriormente separare rispetto alla variabile x_1. Si generano quindi due problemi $Prob^{(3)}$ e $Prob^{(4)}$ inserendo i vincoli $x_1 \leq 1, \quad x_1 \geq 2$:

$$Prob^{(3)} \begin{cases} \max 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ x_2 \geq 4 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_1, x_2 \quad \text{interi} \end{cases} \qquad Prob^{(4)} \begin{cases} \max 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, \quad x_1, x_2 \quad \text{interi} \end{cases}$$

La lista dei problemi candidati è $\{Prob^{(3)}, \quad Prob^{(4)}\}$.

Esercizio 10.1.3 *Sia dato il seguente problema di Programmazione Lineare Intera*

$$\begin{cases} \min x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \quad \text{interi} \end{cases} \tag{10.1.2}$$

Sia $\bar{x} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ *la soluzione ottima del rilassamento lineare del problema (10.1.2), con valore ottimo della funzione obiettivo* $\bar{z} = 14/5$.

(i) *Elencare tutti i possibili modi di separare il problema e generare la lista di problemi candidati.*

(ii) *Dire se è possibile chiudere qualche problema della lista dei candidati.*

(i) Poiché nella soluzione ottima sono frazionarie entrambe le componenti, si può separare il problema sia rispetto a x_1 (ottenendo i problemi $Prob^{(1)}$ e $Prob^{(2)}$), sia rispetto a x_2 (ottenendo i problemi $Prob^{(3)}$ e $Prob^{(4)}$). Risulta $\lfloor \bar{x}_1 \rfloor = 1$, $\lceil \bar{x}_1 \rceil = 2$ e $\lfloor \bar{x}_2 \rfloor = 0$, $\lceil \bar{x}_2 \rceil = 1$ e quindi si ottengono i sottoproblemi:

$$Prob^{(1)} \begin{cases} \min x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad Prob^{(2)} \begin{cases} \min x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Prob^{(3)} \begin{cases} \min x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0, \end{cases} \qquad Prob^{(4)} \begin{cases} \min x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

La lista dei problemi candidati è costituita da

$$\{Prob^{(1)}, \quad Prob^{(2)}, \quad Prob^{(3)}, \quad Prob^{(4)}\}.$$

(ii) Osserviamo che il problema (10.1.2) è di minimizzazione, quindi si deve fare riferimento a "lower bound" per il valore ottimo. Per stabilire se è possibile chiudere qualche problema è necessario individuare una soluzione ammissibile per il problema (10.1.2) e quindi il valore dell'ottimo corrente Osserviamo inoltre che, in questo caso, una soluzione ammissibile non si può trovare (come è stato fatto nell'esercizio precedente) approssimando all'intero inferiore la soluzione $\bar{x}$. Infatti, il punto $(1,\ 0)^T$ che si otterrebbe non è ammissibile. Una possibile soluzione ammissibile del problema (10.1.2) si determina comunque facilmente: possiamo considerare $\widetilde{x} = (1, 1)^T$ con valore $\widetilde{z} = 4$. Per la soluzione ottima dei sottoproblemi utilizziamo il metodo grafico. Il problema $Prob^{(1)}$ è raffigurato in Figura 10.1.2 dove è evi-

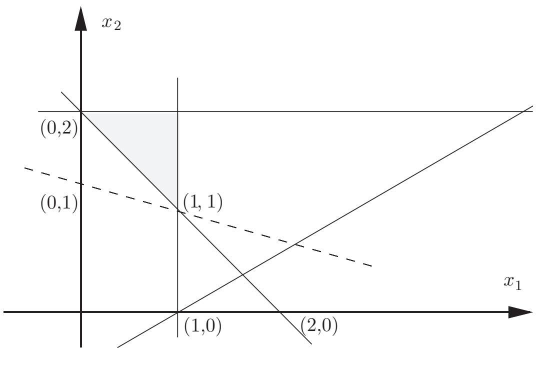


Fig. 10.1.2 Soluzione grafica del Problema $Prob^{(1)}$ dell'Esercizio 10.1.3.

denziato l'insieme ammissibile e la curva di livello della funzione obiettivo corrispondente al valore ottimo.

Il rilassamento lineare del problema $Prob^{(1)}$ ha soluzione ottima intera $\bar{x}^{(1)} = (1, 1)^T$ con valore ottimo della funzione obiettivo pari a $\bar{z}^{(1)} = 4$. Quindi può essere chiuso.

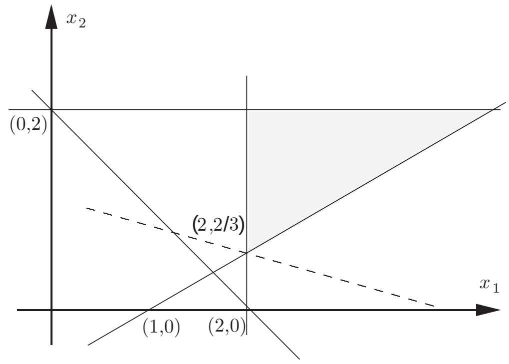


Fig. 10.1.3 Soluzione grafica del Problema $Prob^{(2)}$ dell'Esercizio 10.1.3.

Il rilassamento lineare del problema $Prob^{(2)}$ ha soluzione ottima frazionaria $\bar{x}^{(2)} = (2,\ 2/3)^T$ con valore ottimo della funzione obiettivo $z^{(2)} = 4$ (si veda la Figura 10.1.3). Anche il problema $Prob^{(2)}$ può essere chiuso.

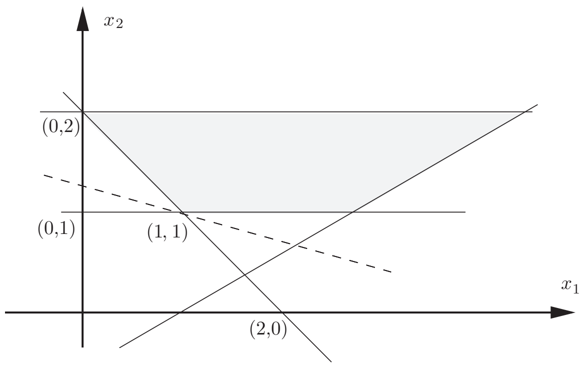


Fig. 10.1.4 Soluzione grafica del Problema $Prob^{(4)}$ dell'Esercizio 10.1.3.

Il rilassamento lineare problema $Prob^{(3)}$ ha regione ammissibile vuota, quindi può essere chiuso.

Il rilassamento lineare problema $Prob^{(4)}$ ha soluzione ottima intera $\bar{x}^{(4)} = (1,1)^T$ con valore ottimo della funzione obiettivo pari a $\bar{z}^{(4)} = 4$ (si veda La Figura 10.1.4) e quindi può essere chiuso.

Si può concludere che la soluzione ottima è $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con valore 4.

Esempio 10.1.4 *Risolvere con il metodo del Branch and Bound il seguente problema di knapsack binario:*

$$\begin{array}{ll} \max & 3.1x_1 + 4x_2 - 3.7x_3 + 4.1x_4 + 1.3x_5 - 4x_6 - 2.2x_7 \\ & 3x_1 - 4x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 4x_6 + x_7 \le 2 \\ & x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, 7. \end{array}$$

Innanzitutto si fissano $x_2 = 1$ (ricordandoci di sommare 4 al termine noto del vincolo), $x_6 = 0$ e $x_7 = 0$. Inoltre si definisce una nuova variabile $\hat{x}_3$ che sostituisce x_3 (ricordandoci di sommare 1 al termine noto del vincolo). Si deve risolvere il problema nelle variabili rimanenti. Si riordinano le variabili in modo decrescente rispetto al rapporto peso–ingombro c_k/a_k (rinominandole con y) e si aumenta di 5 il valore del termine noto; si ottiene il seguente problema (in cui si sono sostituite $\hat{x}_3$ con y_1, x_1 con y_2, x_4 con y_3, x_5 con y_4)

$$Prob^{(0)} \left\{ \begin{array}{l} \max 3.7y_3 + 3.1y_2 + 4.1y_3 + 1.3y_4 \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2y_4 \leq 7 \\ y_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, 4. \end{array} \right.$$

Inizializzazione

Una soluzione del rilassamento lineare è data da

$$\bar{y}^{(0)} = \left(1,\ 1, \frac{7-4}{4},\ 0\right)^T = \left(1,\ 1, \frac{3}{4},\ 0\right)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound $U_0 = 9.875$. Siccome $\bar{y}^{(0)}$ non è intera, essa non può essere la soluzione del problema di knapsack binario. Per inizializzare l'ottimo corrente è sufficiente ottenere una soluzione ammissibile intera, approssimando all'intero inferiore la componente frazionaria, ovvero $\tilde{y} = (1,\ 1,\ 0,\ 0)^T$ ed il valore dell'ottimo corrente è $\tilde{z} = 6.8$. Siccome risulta $6.8 = \tilde{z} < U_0 = 9.875$, $\tilde{y}$ non è ottimo.

Si separa rispetto alla variabile y_3 e si ottengono i due sottoproblemi:

$$Prob^{(1)} \left\{ \begin{array}{l} \max 3.7y_3 + 3.1y_2 + 4.1y_3 + 1.3y_4 \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2y_4 \leq 7 \\ y_3 = 0 \\ y_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, 4. \end{array} \right.$$

$$Prob^{(2)} \left\{ \begin{array}{l} \max 3.7y_3 + 3.1y_2 + 4.1y_3 + 1.3y_4 \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2y_4 \leq 7 \\ y_3 = 1 \\ y_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, 4. \end{array} \right.$$

Si inizializza la lista $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \left\{Prob^{(1)}, Prob^{(2)}\right\}.$$

Prima iterazione

Si estrae $Prob^{(1)}$ dalla lista:

$$\mathcal{L} = \left\{Prob^{(2)}\right\}.$$

Si ottiene:

$$\bar{y}^{(1)} = (1,\ 1,\ 0, 1)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound $U_1 = 8.1$. Poiché $U_1 = 8.1 > 6.8 = \tilde{z}$ e $\bar{y}^{(1)}$ è intera, si aggiorna l'ottimo corrente $\tilde{y} = \bar{y}^{(1)}$ e $\tilde{z} = 8.1$ e si chiude il $Prob^{(1)}$.

Seconda iterazione
Si estrae $Prob^{(2)}$ dalla lista:

$$\mathcal{L} = \emptyset.$$

Si ottiene:

$$\bar{y}^{(2)} = \left(1,\ \frac{2}{3},\ 1, 0\right)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound $U_2 = 9.86667$. Poiché $U_2 = 9.86667 > 8.1 = \tilde{z}$ e $\bar{y}^{(2)}$ non è intera, si separa rispetto alla variabile y_2 e si ottengono i seguenti due sottoproblemi:

$$Prob^{(3)} \begin{cases} \max 3.7y_3 + 3.1y_2 + 4.1y_3 + 1.3y_4 \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2y_4 \leq 7 \\ y_3 = 1 \\ y_2 = 0 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \ldots, 4. \end{cases}$$

$$Prob^{(4)} \begin{cases} \max 3.7y_3 + 3.1y_2 + 4.1y_3 + 1.3y_4 \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2y_4 \leq 7 \\ y_3 = 1 \\ y_2 = 1 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \ldots, 4. \end{cases}$$

e si inseriscono nella lista:

$$\mathcal{L} = \left\{Prob^{(3)}, Prob^{(4)}\right\}.$$

Terza iterazione
Si estrae $Prob^{(3)}$ dalla lista:

$$\mathcal{L} = \left\{Prob^{(4)}\right\}.$$

Si ottiene:

$$\bar{y}^{(3)} = (1,\ 0,\ 1,\ 1)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound $U_3 = 9.1$. Poiché $U_3 = 9.1 > 8.1 = \tilde{z}$ e $\bar{y}^{(3)}$ è intera, si aggiorna l'ottimo corrente $\tilde{y} = \bar{y}^{(3)}$ e $\tilde{z} = 9.1$ e si chiude il $Prob^{(3)}$.

Quarta iterazione
Si estrae $Prob^{(4)}$ dalla lista:

$$\mathcal{L} = \emptyset.$$

Si ottiene:

$$\bar{y}^{(4)} = (0,\ 1,\ 1,\ 0)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound $U_4 = 7.2$. Poiché $U_4 = 7.2 < \tilde{z}$ si chiude il $Prob^{(4)}$.

Quinta iterazione

La lista $\mathcal{L}$ è vuota, quindi si ha

$$y^* = \tilde{y} = \bar{y}^{(3)} = (1,\ 0,\ 1,\ 1)^T$$

con valore ottimo pari a 9.1. Nelle variabili originarie la soluzione ottima è $x^* = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)^T$. (Si ricorda che siccome $\hat{x}_3^* = 1$ allora $x_3^* = 0$). $\square$

Sommario