



**SAPIENZA**  
UNIVERSITÀ DI ROMA

**FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE,  
INFORMATICA E STATISTICA**

**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA  
E AUTOMATICA**

ANNO ACCADEMICO 2019-2020

APPUNTI DALLE LEZIONI DI

**RICERCA OPERATIVA**  
6 CFU

MASSIMO ROMA

Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale  
“A. Ruberti”

<http://www.dis.uniroma1.it/~roma/didattica>



# *Prefazione*

Queste note sono redatte in via prelimiare ad esclusivo uso degli studenti del corso di “*Ricerca Operativa*” da 6 crediti (CFU) del Corso di Laurea in *Ingegneria Informatica e Automatica* della Facoltà di Ingegneria dell’Informazione, Informatica e Statistica della SAPIENZA, Università di Roma.

Molte parti di queste note sono tratte da

1. F. Facchini, S. Lucidi, M. Roma. *Appunti dalle lezioni di Ricerca Operativa*, SAPIENZA – Università di Roma.
2. M. Roma. *Modelli della Ricerca Operativa*, SAPIENZA – Università di Roma.
3. S. Lucidi, M. Roma. *Modelli e Algoritmi di Programmazione Lineare Intera*, SAPIENZA – Università di Roma.

A completamento degli argomenti svolti in queste note, è disponibile sul sito web del corso

<http://www.dis.uniroma1.it/~roma/didattica>

una raccolta di esercizi svolti in corrispondenza di ogni capitolo ed altro materiale didattico.



# 1

---

## *Introduzione*

### **1.1 CHE COSA È LA RICERCA OPERATIVA**

La Ricerca Operativa è una disciplina relativamente recente. Il termine *Ricerca Operativa* è stato coniato verso la fine degli anni '30 e deriva dal termine inglese “*Operational Research*” o “*Operations Research*” in americano.

La Ricerca Operativa è una disciplina che tratta dello sviluppo e dell'applicazione di metodi scientifici per la soluzione di problemi di decisione che si presentano in molteplici e diversi settori della vita reale. Si tratta di scegliere quali decisioni prendere per gestire nel modo più efficiente un sistema reale utilizzando strumenti matematici; quindi lo scopo della Ricerca Operativa è quello di fornire una base scientifica per cercare di analizzare e comprendere situazioni anche con strutture molto complesse e quindi utilizzare queste informazioni per predire il comportamento di un sistema e per migliorare le prestazioni del sistema stesso. La necessità di un approccio quantitativo ai problemi di decisione è largamente riconosciuto in moltissimi settori della vita reale ed in particolare nei problemi di decisione che si presentano nella gestione dei sistemi di produzione e nella gestione d'impresa. Il semplice “buon senso”, cioè l'impiego di una persona competente del settore che sulla base dell'esperienza acquisita nel corso degli anni gestisca il sistema non è più sufficiente a far fronte alla sempre più crescente complessità organizzativa, e quindi anche decisionale, della gran parte dei sistemi di produzione e servizio. In questo settore, come in molti altri, soprattutto negli ultimi anni, si è acquisita la consapevolezza della necessità di tecniche quantitative basate su sofisticati strumenti matematici e avanzati mezzi informatici che permettano di prendere delle decisioni operative sulla base delle informazioni disponibili.

La Ricerca Operativa, quindi, è la scienza che si occupa di fornire un contesto

unitario a nozioni matematiche, informatiche e che partendo da basi teoriche arriva alla costruzione di modelli concreti e alla loro soluzione cioè ad un confronto diretto con la realtà. In questo senso, un altro termine inglese che solitamente si riferisce alla Ricerca Operativa – *Management Science* – evidenzia gli aspetti più caratteristici della disciplina: “*management*” cioè la gestione e “*science*” a mettere in evidenza il carattere rigoroso tipico di una scienza.

## 1.2 BREVE STORIA DELLA RICERCA OPERATIVA

Il termine Ricerca Operativa ha origini “ufficiali” legate ad operazioni belliche della Seconda Guerra Mondiale. Tuttavia esistono esempi importanti di anticipazioni dei metodi della Ricerca Operativa in anni più lontani; il più famoso risale a F. Taylor che nel 1885 elaborò uno studio sui metodi di produzione; prima ancora, nel 1776, G. Monge aveva studiato un problema di trasporti. Tuttavia la nascita della Ricerca Operativa è storicamente legata agli studi che negli anni immediatamente precedenti alla Seconda Guerra Mondiale vennero condotti in Gran Bretagna per risolvere problemi strategici e tattici in operazioni militari. Più in particolare questi studi erano legati all’uso efficiente di un nuovo strumento di difesa: il radar. Infatti nel 1937 la Royal Air Force iniziò degli esperimenti di un sistema di controllo della difesa aerea basato sull’uso di una stazione radar situata a Bawdsey Research Station, nella costa est; già dai primi esperimenti si resero conto che era molto difficile gestire efficientemente le informazioni provenienti dal radar. Nel luglio 1938 furono compiuti altri esperimenti con l’aggiunta di quattro stazioni radar lungo la costa nella speranza che il sistema di controllo migliorasse sia in copertura sia in efficienza; invece non fu così; dai nuovi esperimenti emersero seri problemi: c’era la necessità di coordinare e correlare le tante informazioni, spesso anche in conflitto tra di loro, che venivano ricevute dalle stazioni radar aggiunte. Nell’imminenza della Guerra si rese necessario tentare qualche nuovo approccio; perciò il sovrintendente della Bawdsey Research Station propose di sviluppare un programma di ricerca che riguardasse gli aspetti *operativi* del sistema e non più solamente quelli prettamente tecnici che erano da considerare soddisfacenti. Il termine “*Operational Research*” – Ricerca nelle operazioni (militari) – fu coniato per descrivere questa nuova branca delle scienze applicate. Fu quindi selezionato un gruppo di scienziati di vari discipline per costituire un “OR team”; il progetto fu diretto dal comandante in capo della Royal Air Force, Air Chief Marshal Sir Hugh Dowding. Nell’estate del 1939 la Gran Bretagna effettuò l’ultima esercitazione pre-bellica dove si evidenziò un notevole miglioramento nelle operazioni di difesa aerea grazie al contributo del gruppo di scienziati. Nacque quindi una vera e propria sezione che più tardi, nel 1941, prese il nome formale di “*Operational Research Section*”. Durante il conflitto mondiale ci furono importanti contributi strategici di questa sezione che permis-

sero di salvare piloti e aerei impegnati nel conflitto. Nonostante gli scopi bellici, anche se di difesa, del progetto, per la prima volta in questa occasione si ebbe una convergenza di scienziati di diverse discipline con l'obiettivo di determinare la più efficiente utilizzazione di risorse limitate usando tecniche quantitative.

Al termine della guerra, alcuni degli scienziati coinvolti nel progetto formarono nuclei di ricercatori per lo sviluppo post bellico e la loro attività si estese a campi diversi da quello militare; in particolare, con l'espandersi delle iniziative industriali e con l'avvento dei computer che sono uno strumento essenziale per la risoluzione dei problemi, c'è stata un'espansione dell'utilizzo della Ricerca Operativa all'interno di diverse realtà applicative.

Negli anni '60 le tecniche della Ricerca Operativa avevano avuto una buona diffusione, ma comunque il loro utilizzo era limitato esclusivamente alle imprese più grandi visti gli altissimi costi dei calcolatori elettronici dell'epoca; più tardi, con la diffusione dei personal computer c'è stata una diffusione sempre più ampia della Ricerca Operativa in molti ambiti della vita reale.

### 1.3 LA RICERCA OPERATIVA OGGI

La necessità dell'uso dei metodi della Ricerca Operativa all'interno di molteplici situazioni del mondo reale è stata col passare degli anni sempre più riconosciuta con una sempre maggiore e rapida espansione delle aree di possibile applicazione. In particolare, gli ambiti di maggiore sviluppo dell'applicazione Ricerca Operativa riguardano *problemI manageriali*, *problemI gestionali*, *problemI di progettazione*. Alcuni esempi di problemi possono essere affrontati per mezzo della Ricerca Operativa sono i seguenti:

- *Problemi in ambito industriale:*
  - *pianificazione della produzione;*  
si tratta di determinare i livelli di produzione e/o l'utilizzazione di risorse; si hanno spesso problemi di *allocazione ottima di risorse* cioè problemi riguardanti la distribuzione di risorse limitate tra alternative concorrenti in modo da minimizzare il costo complessivo o massimizzare il guadagno totale; tali risorse possono essere materie prime, manodopera, tempi di lavoro su macchine, capitali investiti.
  - *gestione ottima delle scorte;*  
si tratta di organizzare un magazzino nella gestione di materiali grezzi, prodotti in lavorazione etc.; cioè di decidere quando e quanto, durante un processo produttivo, si devono immagazzinare prodotti in modo da rispettare le consegne minimizzando i costi, oppure se e quando conviene riordinare materiali in modo da ottenere il miglior compromesso tra costi di acquisto, di produzione e di immagazzinamento.

- *localizzazione e dimensionamento di impianti;*

sono problemi in cui si deve decidere dove installare impianti di produzione in modo da rifornire in modo ottimale aree distribuite su un territorio, oppure decidere dove costruire le stazioni base di una rete di telecomunicazioni (GSM/UMTS) per coprire il territorio e con quale potenza esse devono trasmettere.

- *Problemi di progettazione ottima:*

- *progettazione di reti e loro gestione;*

si tratta di definire i collegamenti e dimensionare le capacità di una rete di telecomunicazione, di trasmissione dati, di circuiti, in modo da garantire il traffico tra le varie origini e destinazioni e minimizzare il costo complessivo;

- *progettazione strutturale;*

si tratta di problemi che nascono nell'ingegneria civile, industriale, nella meccanica aeronautica, etc. e hanno come scopo quello di definire un progetto di un edificio, di un ponte in modo che meglio resistano a sollecitazioni derivanti da vari agenti (terremoti, venti forti) oppure del profilo di un'ala di un aereo in modo che, ad esempio, sia massimizzata la portanza;

- *progettazione di sistemi ottici, progettazione di robot;*

si vuole ottenere un progetto che risponda a requisiti tecnici prefissati massimizzando alcuni parametri legati, ad esempio, alla precisione o alla prestazione;

- *allocazione ottima di componenti elettronici (VLSI design);*

si tratta di disegnare una piastra madre in modo che, ad esempio, siano minimizzate le lunghezze dei percorsi dei segnali elettrici;

- *Problemi di economia e finanza:*

- *scelta di investimenti;*

si deve scegliere fra un vasto numero di possibilità di investimento quali realizzare rispettando i vincoli imposti da un budget finanziario e massimizzando il guadagno;

- *composizione di un portafoglio;*

è il problema di decidere quali titoli e con quali quote investire capitali in modo da massimizzare il ricavo oppure minizzando il rischio;

- *Problemi di organizzazione:*

- *project planning;*  
si tratta di decidere come gestire le risorse e come sequenziare le molteplici attività di un progetto;
- *determinazione dei turni del personale;*  
si tratta di coprire una serie di servizi rispettando i vincoli di contratto aziendale e minimizzando i costi, come, ad esempio, l'assegnamento di personale viaggiante ai treni o degli equipaggi ai voli in modo da minimizzare il numero dei viaggi necessari per far tornare il personale nella propria sede;
- *manutenzione di beni;*  
cioè il problema di decidere quando e se effettuare la manutenzione di alcuni oggetti soggetti ad usura con il tempo, in modo da minimizzare il costo complessivo.
- *istradamento di veicoli;*  
si deve decidere quali percorsi devono seguire i veicoli di un flotta (ad esempio di automezzi adibiti alla raccolta dei rifiuti o alla distribuzione di prodotti ad una rete di negozi) in modo da minimizzare la distanza complessiva percorsa;

- *Problemi scientifici:*

- *studi sulla struttura del DNA;*  
si tratta di problemi legati alla determinazione delle sequenze di geni minimizzando la probabilità di errore;
- *ricostruzione di immagini;*  
è il problema della visualizzazione delle informazioni provenienti, ad esempio, da un satellite oppure da una tomografia computerizzata, in modo da ottenere un'immagine della migliore qualità possibile;

- *Problemi di diagnostica medica.*

- *interpretazione e analisi dei dati ottenibili da strumenti di analisi clinica.*

- *Problemi di controllo ottimo:*

- *controllo di servomeccanismi e di sistemi di guida;*
- *controllo di traiettorie.*

È importante evidenziare che i metodi della Ricerca Operativa sono oggi utilizzati anche in settori lontani dagli ambiti più tradizionali come le *scienze sociali*, la *biologia*, le *scienze ambientali* e moltissimi altri.

Tuttavia, soprattutto in Italia, e soprattutto nelle realtà aziendali, gli strumenti utilizzati sono stati per anni assai rudimentali e spesso non adeguati alla crescente complessità dei sistemi di produzione. C'era spesso un notevole sforzo in termini sia finanziari sia umani per dotarsi di sistemi informativi all'avanguardia, ma raramente c'era un utilizzo di queste risorse per realizzare validi sistemi di supporto alle decisioni. Con il passare degli anni la consapevolezza dell'esigenza di tecniche quantitative per la gestione d'impresa è notevolmente cresciuta anche se non c'è ancora in certi settori una totale apertura verso l'utilizzo degli strumenti della Ricerca Operativa. Tuttavia, negli anni più recenti, l'enorme sviluppo dei mezzi di calcolo e degli strumenti metodologici hanno portato a un grande successo della Ricerca Operativa soprattutto negli Stati Uniti. Il merito di questo successo è da ricondurre alla cosapevolezza ormai acquisita che l'incremento della potenza dei mezzi di calcolo non è certo sufficiente per risolvere tutti i problemi che si possono presentare. A confermare questo asserto si riassume di seguito un esempio dovuto a G. B. Dantzig<sup>1</sup> che è molto significativo: si supponga di essere a capo di un'azienda che ha 70 dipendenti e deve assegnare ciascuno di essi a 70 differenti mansioni; poiché le capacità lavorative di ogni singolo dipendente sono diverse, non è indifferente per l'azienda come effettuare l'assegnamento. Naturalmente si deve fare in modo che ciascun dipendente sia assegnato ad una sola mansione e che ciascuna mansione sia svolta esattamente da un dipendente. Il problema consiste nel confrontare le  $70!$  possibilità che ci sono per selezionare quella migliore nel senso che permetta di ottenere il maggiore utile per l'azienda. Le possibilità sono un numero molto grande, più grande di  $10^{100}$ . Ora si supponga di disporre di un calcolatore capace di effettuare un milione di calcoli al secondo e che sia in funzione dal tempo del Big Bang, 15 milioni di anni fà; avrebbe questo calcolatore oggi nell'anno 2000 esaminato tutte le  $70!$  combinazioni possibili ? La risposta è no. Supponiamo allora di disporre di un calcolatore che possa effettuare un miliardo di assegnamenti per ogni nano secondo; la risposta sarebbe ancora no. Supponiamo allora di riempire la superficie terrestre di calcolatori di questo tipo che lavorano in parallelo; la risposta sarebbe ancora no. Se si disponesse di  $10^{40}$  terre ciascuna ricoperta di calcolatori di questo tipo che sono in funzione dal tempo del Big Bang fino a quando il sole si raffredderà; allora, forse, la risposta potrebbe essere si !

Da questo esempio facile da enunciare si deduce come in certe situazioni sia assolutamente impossibile esaminare tutti i casi possibili per determinare qual è il migliore. Per questo, prima dell'avvento della Ricerca Operativa, l'unica possibilità era affidarsi al buon senso di persone guidate dall'esperienza che stabilivano regole "ad hoc" di base che dovevano essere seguite per risolvere i problemi ( "ad hoc" *ground-rule approach*).

---

<sup>1</sup>G. B. Dantzig, Linear Programming, *Operations Research*, vol.50, No.1, 2002, pag.42-47

A questo approccio la Ricerca Operativa contrappone un approccio assai diverso: si tratta del cosiddetto *approccio modellistico*. Esso organizza l'analisi di un problema reale in due fasi:

- la rappresentazione del problema attraverso un *modello matematico* che ne astragga gli aspetti essenziali e che schematizzi le interrelazioni esistenti tra i diversi aspetti del fenomeno che si sta studiando;
- lo sviluppo di *metodi matematici efficienti* (algoritmi di soluzione) per determinare una soluzione ottima del problema o una sua buona approssimazione.

Naturalmente per costruire correttamente un modello matematico che rappresenti un particolare fenomeno, si devono distinguere i parametri di controllo significativi da quelli non essenziali, identificando un criterio per la valutazione della qualità della soluzione. Una volta determinato il modello corretto, la Ricerca Operativa si occupa di fornire una procedura esplicita per determinare una soluzione di un problema; tale procedura può essere rappresentata da metodi matematici analitici o, come più spesso accade, da metodi numerici che determinano la soluzione del problema mediante specifici algoritmi di calcolo.

In questo contesto, il merito maggiore della Ricerca Operativa consiste nello studiare un sistema nel suo complesso; infatti, la maggior parte dei problemi reali coinvolge diverse parti di un sistema mutuamente interagenti ed è quindi essenziale studiarne l'interazione reciproca. Questa è una caratteristica distintiva della Ricerca Operativa rispetto ad altre discipline ed è quindi evidente che un aspetto caratterizzante la Ricerca Operativa sia proprio l'interdisciplinarietà; ed infatti le tecniche di cui fa uso sono numerose e provengono da diverse branche della matematica: dall'algebra lineare alla logica, dalla statistica alla teoria dei giochi, dalla teoria delle decisioni alla teoria dei sistemi. Questo ha prodotto lo sviluppo di metodologie di soluzione che rappresentano un'inasuale combinazione di tecniche e strumenti tipici di altri settori.

#### 1.4 L'APPROCCIO MODELLISTICO

L'approccio modellistico per risolvere un problema di decisione o, più in generale, l'impiego di metodi matematici per la soluzione di problemi applicativi, viene di solito realizzato attraverso diverse fasi. Tali fasi possono essere schematizzate nel seguente modo:

- ANALISI DEL PROBLEMA
- COSTRUZIONE DEL MODELLO
- ANALISI DEL MODELLO

- SOLUZIONE NUMERICA
- VALIDAZIONE DEL MODELLO

La prima fase consiste nell'*analisi della struttura del problema* per individuare i legami logico-funzionali e gli obiettivi.

Nella successiva fase di *costruzione del modello*, chiamata anche *formulazione*, si descrivono in termini matematici le caratteristiche principali del problema; questa fase di costruzione verrà descritta in dettaglio nel seguito.

Segue l'*analisi del modello* che prevede la deduzione per via analitica, in riferimento a determinate classi di problemi, di alcune importanti proprietà; le principali sono:

- *esistenza* ed *unicità* della soluzione ottima;
- *condizioni di ottimalità*, cioè una caratterizzazione analitica della soluzione ottima;
- *stabilità* delle soluzioni al variare dei dati o di eventuali parametri presenti.

La successiva fase di *soluzione* avviene mediante opportuni algoritmi di calcolo e la soluzione numerica così ottenuta deve poi essere interpretata dal punto di vista applicativo in modo da evitare che abbia scarso rilievo pratico; in questo caso le eventuali cause di inaccettabilità devono essere inglobate nel modello stesso costruendo così un nuovo modello più completo del precedente. Tale “validazione” del modello può avvenire attraverso una *verifica sperimentale* oppure con metodi di *simulazione*. La definizione di un modello si configura quindi come un processo di raffinamento iterativo, che può essere schematizzato come rappresentato in Figura 1.4.1.

## 1.5 MODELLI DELLA RICERCA OPERATIVA

Il primo passo dell’approccio modellistico consiste nel rappresentare un problema reale attraverso un *modello*; è utile, pertanto, chiarire subito cosa si intende con questo termine. Il termine *modello* è di solito usato per indicare una struttura appositamente costruita per mettere in evidenza le caratteristiche principali di alcuni oggetti reali. Alcune volte possono essere concreti (come ad esempio i modelli rappresentanti prototipi di aerei o auto), ma più spesso, come nella Ricerca Operativa, si tratta di *modelli astratti* cioè *modelli matematici* che usano il simbolismo dell’algebra per mettere in evidenza le relazioni principali dell’oggetto che deve essere modellato. I modelli di cui si tratterà in seguito sono quindi modelli matematici, e sono costituiti da un insieme di relazioni che descrivono in modo semplificato, ma sempre rigoroso, uno o più fenomeni del mondo reale. La nozione di modello matematico per rappresentare il mondo reale non è certo nuova: già Pitagora nel IV secolo a.C. tentava di costruire un modello matematico

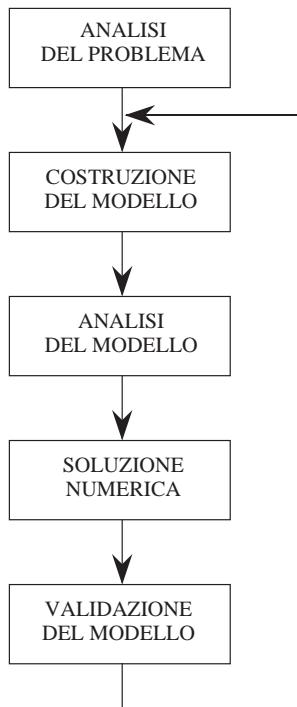


Figura 1.4.1 Fasi dell'approccio modellistico

dell'Universo anche se sotto una luce più esoterica che scientifica. L'interesse per la modellistica matematica è notevolmente cresciuto negli anni più recenti e ai giorni nostri è sempre più viva la convinzione che ricorrendo a modelli matematici sia possibile analizzare i molteplici aspetti del mondo reale e studiare l'influenza che l'uomo può esercitare su di essi. Ciò ha portato ad un enorme sviluppo delle applicazioni della modellistica matematica anche al di fuori delle tradizionali applicazioni alle scienze fisiche. Si è così avuta di fatto una vasta utilizzazione di modelli matematici in settori lontani dagli ambiti più tradizionali come, ad esempio, le scienze sociali, la biologia, le scienze ambientali, la psicologia. Come esempi concreti, si pensi agli studi sulla dinamica della popolazione, sulla diffusione delle epidemie, sul risanamento ambientale. Questa notevole diffusione della modellistica matematica è anche dovuta al fatto che l'evoluzione di un modello matematico può essere rapidamente studiata grazie all'uso di moderni calcolatori elettronici.

È evidente come in molti casi le situazioni rappresentate da un modello sono molto complesse e alcune volte influenzate da fenomeni di natura aleatoria; per questa ragione, sono state definite diverse classi di modelli matematici: *modelli stocastici* che considerano grandezze che possono essere influenzate da fenomeni aleatori e *modelli deterministici* che considerano grandezze esatte; inoltre a seconda che le interazioni tra le grandezze sono immediate o distribuite nel tempo, si parla di

*modelli statici* e di *modelli dinamici*.

Nel seguito verranno analizzati i modelli deterministici che sono di fatto quelli più comunemente usati; in particolare si farà riferimento ai *modelli di programmazione matematica* nei quali è esplicitamente definito un obiettivo da minimizzare o massimizzare ed in cui le variabili sono vincolate ad appartenere ad un insieme prefissato. Si osservi che in questo contesto il termine “*programmazione*” è inteso nel senso di “*pianificazione*” e non di costruzione di programmi (codici) scritti in qualche linguaggio di programmazione.

### 1.5.1 Costruzione di un modello matematico

L’approccio modellistico per risolvere un problema di decisione necessita come primo passo della costruzione di un adeguato modello matematico. Infatti, come già discusso in precedenza, solo un modello costruito tenendo presente tutte le caratteristiche essenziali del fenomeno che si sta studiando permette di comprendere gli aspetti più importanti e di esercitare un intervento pratico efficace.

Nella fase di costruzione del modello matematico si deve fornire una descrizione formalizzata del problema di decisione facendo uso del linguaggio formale della matematica. Si dovrà cercare, quindi, una corrispondenza tra relazioni del mondo reale (relazioni tecnologiche, leggi fisiche, vincoli di mercato, etc.) e relazioni matematiche (equazioni, disequazioni, dipendenze logiche, etc.).



La costruzione di un modello richiede, quindi, scelte e valutazioni in modo da evidenziare gli aspetti più significativi del problema reale e che meglio sono suscettibili di una formalizzazione matematica. Tale procedimento di scelta spesso non è riconducibile ad un procedimento sistematico e quindi è necessario che chi costruisce il modello abbia da un lato una conoscenza approfondita del settore applicativo per evitare che le risposte ottenute dal modello abbiano scarsa rilevanza pratica; dall’altro deve avere una notevole conoscenza dei metodi matematici disponibili per la ricerca della soluzione per evitare che la formulazione matematica porti ad un problema per il quale non esistono algoritmi risolutivi utilizzabili. È importante ribadire che un modello è definito per mezzo delle relazioni che lo costituiscono ed è quindi necessario che tali relazioni siano il più possibile indipendenti dai dati introdotti nel modello; questo perché uno stesso modello deve poter essere usato in differenti occasioni con dati (cioè costi, disponibilità di risorse, limiti tecnologici, etc.) diversi. Lo studio di questo aspetto, come già detto, rientra nella fase di analisi del modello sotto il nome di analisi della stabilità del modello rispetto ai dati introdotti.

### 1.5.2 Vantaggi dell'approccio modellistico

Le motivazioni che rendono molto utile la costruzione di un modello matematico sono molteplici; si riassumono di seguito le principali.

- *Possibilità di risolvere matematicamente il problema.*

Grazie al modello è possibile analizzare matematicamente il problema ed ottenere così una soluzione che, soprattutto in riferimento a scopi di pianificazione, permette di adottare strategie che da una sola analisi strutturale del problema non apparirebbero evidenti o che a volte potrebbero essere perfino contorta.

- *Maggiore comprensione del problema.*

Il modello è una rappresentazione semplificata del problema e spesso la sua costruzione consente di individuare proprietà strutturali del problema che altrimenti non sarebbero affatto evidenti.

- *Deduzione analitica di importanti proprietà.*

Nella fase di analisi del modello è possibile dedurre per via analitica alcune importanti proprietà del problema sulla base dei risultati disponibili per la classe di problemi a cui si fa riferimento.

- *Possibilità di simulazioni.*

Con un modello è possibile effettuare esperimenti che spesso non è possibile effettuare direttamente nella realtà; ad esempio, l'uso di un modello consente di studiare gli effetti dell'adozione di una particolare misura economica in un paese senza la necessità di sperimentarla direttamente.

### 1.5.3 Critiche all'approccio modellistico

Le principali critiche all'approccio modellistico e, quindi, alla costruzione di modelli per la soluzione di problemi di decisione possono essere sintetizzate nei seguenti due punti:

- Impossibilità di quantificare soddisfacientemente con opportuni valori numerici alcuni dati richiesti dal modello; questo accade, ad esempio, nel tentativo di quantificare con un costo o con un profitto alcuni valori sociali soprattutto in relazione a scopi di pianificazione.
- La qualità delle risposte che un modello produce potrebbero dipendere profondamente dall'accuratezza dei dati introdotti.

Il primo punto riguarda la possibilità di dover trattare concetti non facilmente quantificabili, ma ogni approccio scientifico può difficilmente evitare tale difficoltà; il modo migliore per superare tale problema consiste nell'incorporare tale quantificazione nel modello stesso.

La seconda critica riguarda la possibile mancanza di precisione di alcuni dei dati immessi nel modello; tale critica è meno rilevante della precedente, in quanto anche se alcuni dati introdotti sono poco accurati, è ancora possibile che la struttura del modello sia tale da garantire che la soluzione sia sufficientemente accurata.

All'estremo opposto di queste critiche si può collocare un atteggiamento di totale fiducia del modello che induca ad accettare la prima risposta prodotta dal modello senza ulteriori analisi. Tale atteggiamento, in realtà molto raro, è assai pericoloso in quanto tale risposta potrebbe rappresentare un piano operativo non accettabile nella realtà; in tal caso i motivi della non accettabilità devono essere evidenziati e incorporati in un nuovo modello modificato: si tratta, in realtà, della già citata fase di validazione del modello che quindi non può essere trascurata e che costituisce un valido mezzo per costruire modelli sempre più completi e significativi.

In conclusione, come spesso accade, l'atteggiamento corretto si colloca tra le due situazioni estreme precedentemente citate e consiste nel considerare la costruzione del modello un mezzo assai utile per affrontare un problema di decisione: rimane il fatto che la qualità delle risposte che un modello produce dipende dall'accuratezza della sua struttura e quindi non è trascurabile la fase di validazione che consente di interpretare la soluzione numerica ottenuta ed eventualmente permette di completare il modello introducendo elementi trascurati in una prima fase, in assenza dei quali la soluzione risulta non accettabile oppure di scarso rilievo dal punto di vista applicativo.

# 2

---

# *La Programmazione Matematica*

All'interno della Ricerca Operativa, un ruolo di fondamentale importanza è svolto dalla *Programmazione Matematica* che è la disciplina che ha per oggetto lo studio dei problemi in cui si vuole minimizzare o massimizzare una funzione reale definita su  $\mathbb{R}^n$  (lo spazio delle  $n$ -uple reali) le cui variabili sono vincolate ad appartenere ad una insieme prefissato che è descritto attraverso un numero finito di disuguaglianze o uguaglianze. Si tratta quindi di *problemi di Ottimizzazione* cioè problemi nei quali si desidera minimizzare o massimizzare una funzione.

## 2.1 PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

In termini generali, data una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ed  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , un *problema di Ottimizzazione* può essere formulato nella forma

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in S. \end{cases} \quad (PO)$$

Quindi un problema di Ottimizzazione consiste nel determinare, se esiste, un punto di minimo della funzione  $f$  tra i punti dell'insieme  $S$ .

Si parlerà indifferentemente di problemi di massimo o di minimo in quanto vale  $\min f(x) = - \max_{x \in S} (-f(x))$ .

La funzione  $f$  viene chiamata *funzione obiettivo* e l'insieme  $S$  *insieme ammissibile* cioè l'insieme delle possibili soluzioni del problema. Un punto  $x \in S$  si chiama *soluzione ammissibile*.

L'insieme ammissibile  $S$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  e quindi  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  è una variabile vettoriale  $n$ -dimensionale e la funzione obiettivo  $f$  è una funzione di  $n$  variabili reali  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

### 2.1.1 Definizioni fondamentali

Si riportano di seguito alcune definizioni fondamentali riguardanti i problemi di Ottimizzazione.

**Definizione 2.1.1** *Il problema di ottimizzazione (PO) si dice inammissibile se  $S = \emptyset$ , cioè se non esistono soluzioni ammissibili.*

**Definizione 2.1.2** *Il problema di ottimizzazione (PO) si dice illimitato (inferiormente) se comunque scelto un valore  $M > 0$  esiste un punto  $x \in S$  tale che  $f(x) < -M$*

**Definizione 2.1.3** *Si dice che il problema di ottimizzazione (PO) ammette soluzione ottima (finita) se esiste un  $x^* \in S$  tale che risulti  $f(x^*) \leq f(x)$  per ogni  $x \in S$ . Il punto  $x^*$  è detto soluzione ottima o minimo globale e il corrispondente valore  $f(x^*)$  di dice valore ottimo.*

Queste definizioni sono immediatamente estendibili al caso in cui un problema di Ottimizzazione è scritto in forma di massimizzazione.

### 2.1.2 Classificazione dei problemi di Ottimizzazione

All'interno dei problemi di Ottimizzazione, in base alla *struttura dell'insieme ammissibile  $S$* , si possono distinguere le seguenti importanti classi di problemi:

- PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE CONTINUA.

Le variabili possono assumere tutti i valori reali ( $x \in \mathbb{R}^n$ ); ed inoltre si parla di problemi di ottimizzazione continua

- *vincolata* se  $S \subset \mathbb{R}^n$
- *non vincolata* se  $S = \mathbb{R}^n$ .

- PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE DISCRETA.

Le variabili sono vincolate ad essere numeri interi ( $x \in \mathbb{Z}^n$ ); si possono distinguere all'interno di questa classe di problemi altre due classi:

- *programmazione a numeri interi* se  $S \subseteq \mathbb{Z}^n$
- *ottimizzazione booleana* se  $S \subseteq \{0, 1\}^n$ .

- PROBLEMI MISTI.

Solo alcune delle variabili sono vincolate ad essere intere.

## 2.2 PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE MATEMATICA

Di solito l'insieme ammissibile  $S$  viene descritto da una numero finito di diseguaglianze del tipo  $g(x) \geq b$ , dove  $g$  è una funzione definita su  $\mathbb{R}^n$  a valori reali e  $b \in \mathbb{R}$ . Cioè, formalmente, date  $m$  funzioni  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  ed  $m$  scalari  $b_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  si esprime  $S$  nella forma

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq b_1, g_2(x) \geq b_2, \dots, g_m(x) \geq b_m\}.$$

Ogni diseguaglianza  $g_i(x) \geq b_i$  prende nome di *vincolo* e l'insieme ammissibile è quindi formato da tutti quei punti  $x \in \mathbb{R}^n$  che sono soluzione del sistema di diseguaglianze

$$\begin{cases} g_1(x) \geq b_1 \\ g_2(x) \geq b_2 \\ g_3(x) \geq b_3 \\ \vdots \\ g_m(x) \geq b_m \end{cases}$$

**Osservazione 2.2.1** In questa formulazione dell'insieme  $S$  si sono utilizzati vincoli di diseguaglianza nella forma di maggiore o uguale, ma è chiaro che questa notazione include i casi in cui i vincoli sono espressi con vincoli di diseguaglianza nella forma di minore o uguale e vincoli di uguaglianza; infatti si può sempre trasformare un vincolo di minore o uguale del tipo  $g(x) \leq b$  in un vincolo di maggiore o uguale semplicemente riscrivendolo nella forma  $-g(x) \geq -b$ . Inoltre un vincolo di uguaglianza  $g(x) = b$  può essere riscritto nella forma equivalente delle due diseguaglianze  $g(x) \geq b$  e  $-g(x) \geq -b$ .

Quindi, senza perdere di generalità, si può riscrivere il problema di ottimizzazione (PO) nella forma

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Un problema di questo tipo viene chiamato *problema di Programmazione Matematica*. I punti dell'insieme ammissibile di questo tipo di problemi sono quelli per i quali tutti i vincoli sono soddisfatti cioè tutti quei punti  $x$  tali che tutte le diseguaglianze  $g_i(x) \geq b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  sono verificate.

I problemi di Programmazione Matematica si possono classificare in base alla *struttura delle funzioni che li definiscono*; in particolare si ha la seguente classificazione:

- PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE (PL)

La funzione obiettivo  $f(x)$  e tutte le funzioni che definiscono i vincoli  $g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$  sono *lineari*, cioè esprimibili nella forma  $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ .

- PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE NON LINEARE (PNL)

Almeno una delle funzioni che definiscono un problema di Programmazione Matematica *non è lineare*.

Si formalizzano nella definizione che segue alcuni semplici concetti riguardanti i vincoli di un problema di Programmazione Matematica.

**Definizione 2.2.2** Si consideri un vincolo di diseguaglianza del tipo  $g(x) \geq b$ , esso si dice:

- soddisfatto in un punto  $\bar{x}$  se  $g(\bar{x}) \geq b$ ;
- violato in un punto  $\bar{x}$  se  $g(\bar{x}) < b$ ;
- attivo in un punto  $\bar{x}$  se  $g(\bar{x}) = b$ ;
- ridondante se con la sua eliminazione l'insieme ammissibile rimane immutato.

Alcuni esempi di problemi di Programmazione Matematica sono i seguenti:

**Esempio 2.2.3** Si consideri una funzione obiettivo di due variabili  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  che si vuole minimizzare, con i vincoli  $2x_1 + x_2 \geq 1$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ . Si ottiene il problema

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

che è nella forma (2.2.1) dove  $g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ,  $g_2(x_1, x_2) = x_1$ ,  $g_3(x_1, x_2) = x_2$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = b_3 = 0$ . L'insieme ammissibile è descritto attraverso questi tre vincoli e poiché tutte le funzioni che compaiono sono lineari nelle variabili  $x_1$  e  $x_2$ , questo problema è un problema di Programmazione Lineare.

**Esempio 2.2.4** Si consideri una funzione obiettivo di due variabili  $f(x_1, x_2) = (x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2$  che si vuole massimizzare, con i vincoli  $x_1 + x_2 \geq 1$ ,  $x_1 \leq 1$ ,

$x_2 \leq 1$ . Si ottiene il problema

$$\begin{cases} \max(x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \end{cases}$$

che è un problema di Programmazione Non Lineare (quadratico).

**Esempio 2.2.5** Si consideri una funzione obiettivo di due variabili  $f(x_1, x_2) = 3x_1^3 + 7x_1^2 + x_2$  che si vuole minimizzare, con vincoli  $x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 1$ . Si ottiene il problema

$$\begin{cases} \min 3x_1^3 + 7x_1^2 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2} \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 1 \end{cases}$$

che è un problema di Programmazione Non Lineare che può essere facilmente ricondotto nella forma (2.2.1) riscrivendo il secondo vincolo nella forma  $-x_1 - x_2 \geq -\frac{1}{2}$ .

**Esempio 2.2.6** Si consideri una funzione obiettivo di due variabili  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  che si vuole minimizzare sulla regione ammissibile descritta dal vincolo di uguaglianza  $4x_1 - x_2 = -2$ . Il problema di Programmazione Lineare risultante è

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 \\ 4x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$$

che è un problema di Programmazione Lineare con un solo vincolo di uguaglianza.

Gli esempi appena visti, per semplicità, sono stati formulati come problemi in due variabili, in modo da permettere, fra l'altro, di comprenderne facilmente la loro struttura geometrica. Il significato geometrico di problemi di Programmazione Matematica verrà comunque trattato in dettaglio in seguito.

### 2.3 MODELLI DI PROGRAMMAZIONE MATEMATICA

I modelli standard più comunemente usati nella Ricerca Operativa sono i *modelli di Programmazione Matematica*, cioè modelli che possono essere rappresentati per mezzo di un problema di Programmazione Matematica. I settori applicativi all'interno dei quali sorgono problemi di questo tipo sono moltissimi: come esempi si possono citare problemi inerenti la pianificazione industriale, problemi di progettazione ottima, problemi di gestione di reti, problemi di economia e moltissimi altri.

Tuttavia, ogni lista di classi di modelli non può essere esaustiva: possono sempre presentarsi situazioni pratiche che non possono essere modellate in modo standard oppure che possono essere modellate in più di un modo standard.

La costruzione formale di un modello di Programmazione Matematica si effettua a partire da una descrizione logica e qualitativa di un problema di decisione e richiede di :

1. associare opportune *variabili di decisione* alle grandezze reali. Tali variabili costituiscono le incognite del problema;
2. esprimere formalmente l'*obiettivo* che si intende minimizzare o massimizzare;
3. esprimere quantitativamente i *legami* esistenti tra le variabili e le *limitazioni* derivanti da considerazioni di carattere fisico, economico, etc. Tali legami e limitazioni definiscono i *vincoli*. L'insieme dei valori delle variabili per cui i vincoli sono soddisfatti costituisce l'*insieme ammissibile*.

A seconda della classe di problemi di Ottimizzazione entro la quale la formulazione del modello si colloca si parlerà di *modelli continui*, *modelli discreti*, *modelli misti*.

### 2.3.1 Esempi di modelli di Programmazione Matematica

Come primi esempi di costruzione di modelli verranno ora analizzati un semplice problema di pianificazione della produzione, un problema di pianificazione degli investimenti e un problema di progettazione industriale.

**Esempio 2.3.1** *Un'industria chimica fabbrica 4 tipi di fertilizzanti, Tipo 1, Tipo 2, Tipo 3, Tipo 4, la cui lavorazione è affidata a due reparti dell'industria: il reparto produzione e il reparto confezionamento. Per ottenere fertilizzante pronto per la vendita è necessaria naturalmente la lavorazione in entrambi i reparti. La tabella che segue riporta, per ciascun tipo di fertilizzante i tempi (in ore) necessari di lavorazione in ciascuno dei reparti per avere una tonnellata di fertilizzante pronto per la vendita.*

	<b>Tipo 1</b>	<b>Tipo 2</b>	<b>Tipo 3</b>	<b>Tipo 4</b>
<b>Reparto produzione</b>	2	1.5	0.5	2.5
<b>Reparto confezionamento</b>	0.5	0.25	0.25	1

Dopo aver dedotto il costo del materiale grezzo, ciascuna tonnellata di fertilizzante dà i seguenti profitti (prezzi espressi in Euro per tonnellata)

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
profitti netti	250	230	110	350

Determinare le quantità che si devono produrre settimanalmente di ciascun tipo di fertilizzante in modo da massimizzare il profitto complessivo, sapendo che ogni settimana, il reparto produzione e il reparto confezionamento hanno una capacità lavorativa massima rispettivamente di 100 e 50 ore.

### Analisi del problema e costruzione del modello.

Si tratta di un problema di pianificazione della produzione industriale in cui le incognite, che saranno le variabili del problema, sono le quantità di fertilizzante di ciascun tipo che si devono produrre. Costruiamo un modello di Programmazione Matematica rappresentante il problema in analisi supponendo di voler pianificare la produzione settimanale.

- *Variabili di decisione.* È naturale introdurre le variabili reali  $x_1, x_2, x_3, x_4$  rappresentanti rispettivamente le quantità di prodotto del **Tipo 1**, **Tipo 2**, **Tipo 3**, **Tipo 4** da fabbricare in una settimana.
- *Funzione Obiettivo.* Ciascuna tonnellata di fertilizzante contribuisce al profitto totale secondo la tabella data. Quindi il profitto totale sarà

$$250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4. \quad (2.3.1)$$

L’obiettivo dell’industria sarà quello di scegliere le variabili  $x_1, x_2, x_3, x_4$  in modo che l’espressione (2.3.1) del profitto sia massimizzata. La (2.3.1) rappresenta la funzione obiettivo.

- *Vincoli.* Ovviamente la capacità produttiva della fabbrica limita i valori che possono assumere le variabili  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ ; infatti si ha una capacità massima lavorativa in ore settimanali di ciascun reparto. In particolare per il reparto produzione si hanno a disposizione al più 100 ore settimanali e poiché ogni tonnellata di fertilizzante di **Tipo 1** utilizza il reparto produzione per 2 ore, ogni tonnellata di fertilizzante di **Tipo 2** utilizza il reparto produzione per 1.5 ore e così via per gli altri tipi di fertilizzanti si dovrà avere

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100. \quad (2.3.2)$$

Ragionando in modo analogo per il reparto confezionamento si ottiene

$$0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50. \quad (2.3.3)$$

Le espressioni (2.3.2), (2.3.3) costituiscono i vincoli del modello. Si devono inoltre esplicitare vincoli dovuti al fatto che le variabili  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$  rappresentando

quantità di prodotto non possono essere negative e quindi vanno aggiunti i vincoli di non negatività

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0.$$

Posto  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ , l'insieme ammissibile  $S$  sarà quindi così definito:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \quad \left| \begin{array}{l} 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100, \\ 0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0 \end{array} \right. \right\}$$

La formulazione finale quindi può essere scritta in questa forma

$$\begin{cases} \max (250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4) \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100 \\ 0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

□

**Esempio 2.3.2 – CAPITAL BUDGETING.** Supponiamo di dover investire £1000 sul mercato finanziario. Supponiamo inoltre che il mercato offra tre tipi diversi di investimenti **A**, **B**, **C** ciascuno caratterizzato da un prezzo d'acquisto e da un rendimento netto, che sono riassunti nella seguente tabella:

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
<b>costo</b>	750	200	800
<b>rendimento</b>	20	5	10

Si vuole decidere quali degli investimenti effettuare per massimizzare il rendimento sapendo che gli investimenti **A**, **B**, **C** non si possono effettuare in modo parziale cioè non sono frazionabili.

### Analisi del problema e costruzione del modello.

Si tratta di un problema di pianificazione degli investimenti. Si devono definire formalmente le variabili di decisione, l'insieme delle soluzioni ammissibili e la funzione obiettivo.

– *Variabili di decisione.* Si tratta quindi di esprimere matematicamente la scelta elementare: effettuare o non effettuare l'investimento. Una scelta naturale delle variabili di decisione è la seguente:

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{non si effettua l'investimento } i\text{--esimo} \\ 1 & \text{si effettua l'investimento } i\text{--esimo} \end{cases} \quad i = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \quad (2.3.4)$$

– *Insieme ammissibile.* In base alla definizione delle variabili, le possibili scelte compatibili con il nostro budget sono:

- (0) non si effettuano investimenti  $x_A = x_B = x_C = 0$
- (1) si effettua l'investimento **A**;  $x_A = 1, x_B = x_C = 0$
- (2) si effettua l'investimento **B**;  $x_A = 0, x_B = 1, x_C = 0$
- (3) si effettua l'investimento **C**;  $x_A = x_B = 0, x_C = 1$
- (4) si effettuano gli investimenti **A** e **B**;  $x_A = x_B = 1, x_C = 0$
- (5) si effettuano gli investimenti **B** e **C**;  $x_A = 0, x_B = x_C = 1$ .

Notiamo che le possibilità **A**, **C** e **A**, **B**, **C** non sono ammissibili in quanto il costo supera la nostra disponibilità. L'insieme ammissibile, ovvero l'insieme delle possibili scelte (0) – (5) è dato da:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si tratta quindi di un sottoinsieme dei vettori di  $\mathbb{R}^3$  a componenti 0–1 ovvero  $S \subseteq \{0, 1\}^3$ .

– *Funzione obiettivo.* L'obiettivo che ci proponiamo è la massimizzazione del rendimento totale. Quindi dobbiamo esprimere la funzione obiettivo che corrisponde al rendimento netto relativo alla scelta di  $x = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix}$  in  $S$ , cioè

$$f(x) = 20x_A + 5x_B + 10x_C.$$

È possibile ottenere la soluzione ottima valutando esaustivamente la funzione obiettivo per ogni elemento di  $S$ , ottenendo in relazione alle possibili scelte:

- (0)  $f_0 = 0$
- (1)  $f_1 = 20$
- (2)  $f_2 = 5$
- (3)  $f_3 = 10$
- (4)  $f_4 = 25$
- (5)  $f_5 = 15$ .

La soluzione ottima è ovviamente quella corrispondente alla scelta (4), cioè all'effettuare gli investimenti **A** e **B**, con valore della funzione obiettivo pari a £25.

Questo *non è un modello corretto* per due motivi:

1. *L'insieme ammissibile  $S$  è rappresentato in modo estensivo*, cioè elencando tutte le soluzioni ammissibili. In questo caso la cardinalità dell'insieme ammissibile è al più quella di  $\{0, 1\}^3$  cioè  $2^3$ , ma in generale, se la dimensione

del problema fosse più grande sarebbe impossibile valutare esaustivamente le soluzioni del problema. Se, ad esempio, il numero degli investimenti fosse stato 100 (che dal punto di vista delle applicazioni reali è del tutto verosimile) la cardinalità dell'insieme ammissibile sarebbe stata  $2^{100}$  e per la valutazione di  $2^{100}$  possibilità anche supponendo di utilizzare un calcolatore che effettui  $10^{10}$  valutazioni al secondo (velocità superiore a quella raggiungibile dai calcolatori attuali) occorrerebbero  $10^{20}$  secondi, cioè 3000 miliardi di anni !

2. *Il modello non è indipendente dai dati del problema*, cioè cambiando i dati del problema (prezzi e/o rendimenti) sarebbe necessario cambiare completamente il modello.

In generale, in un modello corretto, si cerca di dare una *rappresentazione intensiva* dell'insieme ammissibile  $S$ , cioè individuare le proprietà  $P(x)$  che consentono di distinguere le soluzioni ammissibili dagli elementi dell'insieme  $\{0, 1\}^3$  che non lo sono. Si vuole quindi scrivere l'insieme  $S$  in una forma del tipo:

$$S = \{x \in \{0, 1\}^3 : \text{vale la proprietà } P(x)\}.$$

Nell'esempio, la proprietà distintiva degli elementi di  $S$  è il costo complessivo che non deve essere superiore a £1000. Possiamo esprimere matematicamente questa relazione come:

$$P(x) : 750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000$$

e quindi l'insieme ammissibile si può scrivere

$$S = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} \in \{0, 1\}^3 \mid 750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000 \right\}.$$

In conclusione, il modello matematico corretto per il problema di decisione in esame è:

$$\begin{cases} \max (20x_A + 5x_B + 10x_C) \\ 750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000 \\ x_i \in \{0, 1\} \quad i = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}. \end{cases}$$

□

**Esempio 2.3.3** *Un'industria deve costruire un silos di forma cilindrica per contenere grandi quantitativi di un liquido che verrà poi distribuito in piccole confezioni pronte per la vendita al minuto. Tale silos deve essere posto in un magazzino appoggiato su una delle basi. Tale magazzino è a pianta rettangolare di dimensioni metri  $20 \times 10$  ed ha un tetto spiovente lungo il lato di 10 metri, che ha altezza massima di metri 5 e altezza minima di metri 3. Per costruire questo silos deve essere usato del materiale plastico sottile flessibile che può essere tagliato, modellato e incollato saldamente. Sapendo che si dispone di non più di  $200 \text{ m}^2$  di tale*

*materiale plastico si costruisca un modello che permetta di determinare le dimensioni del silos (raggio di base ed altezza) in modo da massimizzare la quantità di liquido che può esservi contenuto.*

**Analisi del problema e costruzione del modello.**

Si tratta di determinare il dimensionamento ottimale di un contenitore cilindrico per uso industriale cercando di massimizzare il suo volume tenendo presente che deve essere contenuto in un magazzino di dimensioni fissate. Si devono innanzitutto definire formalmente le variabili di decisione, l'insieme delle soluzioni ammissibili e la funzione obiettivo.

- *Variabili di decisione.* È immediato introdurre due variabili  $x_1$  e  $x_2$  che rappresentano rispettivamente la lunghezza (in metri) del raggio di base e dell'altezza del contenitore cilindrico.
- *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo è rappresentata dal volume del contenitore cilindrico ed è data da

$$\pi x_1^2 x_2.$$

- *Vincoli.* Il diametro della base non può superare le dimensioni del magazzino e quindi deve essere

$$2x_1 \leq 10.$$

La limitazione dell'altezza del contenitore varia al variare del diametro di base in quanto il tetto è spiovente. Dato che la pendenza del tetto è del 20%, dovrà risultare

$$x_2 \leq 5 - 0.2 \cdot 2x_1.$$

Inoltre disponendo solo di una quantità limitata di materiale plastico la superficie totale del contenitore cilindrico non può superare  $200m^2$  e quindi deve risultare

$$2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 \leq 200.$$

Si devono infine esplicitare i vincoli di non negatività  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ . Quindi l'insieme ammissibile è

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} x_1 \leq 5, \quad x_2 \leq 5 - 0.2 \cdot 2x_1, \quad 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 \leq 200, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

La formulazione complessiva risulta quindi

$$\begin{cases} \max \pi x_1^2 x_2 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 5 - 0.2 \cdot 2x_1 \\ 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 \leq 200 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

□

**Osservazione 2.3.4** Negli Esempi 2.3.1 e 2.3.2 ora analizzati, sia la funzione obiettivo sia i vincoli sono rappresentati attraverso espressioni *lineari* nelle variabili di decisione. Quindi questi modelli hanno una forma particolare che, in generale prende nome di *Modello di Programmazione Lineare*, (PL). Questa classe di modelli è molto importante e sarà la classe di problemi che tratteremo nel seguito.

**Osservazione 2.3.5** Nell’Esempio 2.3.1 abbiamo assunto che le variabili di decisione potessero assumere valori reali e quindi, in particolare, frazionari. Tale assunzione potrebbe essere vera nel caso in cui per quantità di prodotto si intenda una misura, ad esempio in litri, quintali, o altra quantità frazionabile di prodotto. Altrimenti se tale quantità rappresenta, ad esempio il numero di motori per automobile, allora le variabili  $x_j$  che danno la misura di questa quantità devono assumere *valori interi*. In tal caso, sempre nell’ipotesi che il modello sia lineare, si parla di *Modello di Programmazione Lineare Intera* (PLI). Questo è anche il caso del modello dell’Esempio 2.3.2.

**Osservazione 2.3.6** A differenza degli Esempi 2.3.1 e 2.3.2, nell’Esempio 2.3.3 sia la funzione obiettivo, sia uno dei vincoli sono rappresentati attraverso espressioni *non lineari* nelle variabili di decisione. In questo caso si parla di *Modello di Programmazione Non Lineare* (PNL). La presenza di espressioni non lineari in un modello di programmazione matematica è piuttosto frequente: si pensi, ad esempio, ad una generica situazione in cui il profitto unitario che si ricava dalla vendita di un prodotto varia al variare della quantità dei prodotti venduti fino a quel momento; nella realtà, in accordo ad elementari leggi di mercato, accade molto spesso che il prezzo unitario di un prodotto possa aumentare se cresce la richiesta e quindi se una variabile  $x$  rappresenta la quantità di prodotto venduto e  $p(x)$  il prezzo di vendita (dipendente da  $x$ ), il profitto che si ricava dalla vendita di  $x$  prodotti sarà  $p(x)x$ ; il temine  $p(x)$  introduce una non linearità nella funzione obiettivo. Come esempio di ciò, riferendoci all’Esempio 2.3.1, se avessimo supposto che il prezzo unitario di vendita del prodotto **P1** fosse  $250 + 3x_1$  cioè fosse dipendente dalla quantità di prodotto venduto  $x_1$  il contributo al profitto complessivo dato dalla vendita di  $x_1$  prodotti **P1** sarebbe stato  $(250 + 3x_1)x_1$ . Verrebbe così introdotta una non linearità data dal termine  $3x_1^2$ . Anche in questo caso in cui la sola funzione obiettivo è non lineare ed i vincoli continuano ad essere lineari, si parla di modelli di Programmazione Non Lineare. Tuttavia i modelli non lineari sono di solito molto più difficili da risolvere e quindi molto spesso si cerca di approssimarli con modelli lineari.

# 3

## Modelli di Programmazione Lineare

### 3.1 GENERALITÀ

Come già detto nel capitolo precedente, è possibile classificare i modelli di Programmazione Matematica in base alla struttura particolare che possono avere la funzione obiettivo e i vincoli. Riprendiamo qui, espandendola, la definizione di *problemi di Programmazione Lineare* nei quali sia la funzione obiettivo, sia i vincoli sono rappresentati mediante funzioni lineari nelle variabili di decisione.

Preliminarmente, richiamiamo il concetto di *funzione lineare*.

**Definizione 3.1.1** Una funzione reale di  $n$  variabili reali  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si dice lineare se valgono le seguenti condizioni:

- i) per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^n$  si ha  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ;
- ii) per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  risulta  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ .

Una immediata conseguenza di questa definizione è che una funzione è lineare se e solo se può essere scritta nella forma

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \tag{3.1.1}$$

con  $c_1, \dots, c_n$  costanti reali. Infatti è immediato verificare che una funzione della forma (3.1.1) soddisfa la Definizione 3.1.1; d'altra parte, se una funzione  $f(x)$  è lineare cioè se soddisfa la Definizione 3.1.1, allora si può scrivere nella forma (3.1.1); infatti se indichiamo con  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^n$  allo-

ra risulta  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  dove le  $x_i$  sono le componenti del vettore  $x$ . Quindi utilizzando la linearità si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = f(x_1 e_1) + f(x_2 e_2) + \dots + f(x_n e_n) = \\ &= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \end{aligned}$$

dove  $c_i = f(e_i)$  per  $i = 1, \dots, n$ . □

Quindi

$$\begin{aligned} &x_1 + 4x_2 - 3.5x_3 \\ &-2x_1 + (\sin 4)x_2 + \pi x_3 - 4x_5, \end{aligned}$$

sono funzioni lineari, mentre

$$\begin{aligned} &(x_1)^2 + 4x_2 - 3.5x_3 \\ &x_1 + 4x_2 - 3.5e^{x_3} \\ &-2x_1 + \sin x_2 + \pi x_3 - 4x_5, \end{aligned}$$

non sono funzioni lineari.

### 3.2 STRUTTURA DI UN MODELLO DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Esaminiamo ora la struttura di un generico modello di Programmazione Lineare. Un modello di Programmazione Lineare è caratterizzato da

- una singola *funzione obiettivo lineare* da minimizzare o massimizzare che può essere quindi scritta nella forma

$$f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

- un numero finito di *vincoli lineari* che, supponendo siano  $m$ , possono essere scritti nella forma

$$\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + & \dots & + a_{2n}x_n & \geq b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n & \geq b_m. \end{array}$$

Introducendo il vettore  $c \in \mathbb{R}^n$ , definito  $c = (c_1, \dots, c_n)^T$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  definito  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  la funzione obiettivo può essere scritta in notazione vettoriale

$$c^T x.$$

Inoltre, introducendo la matrice  $(m \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e il vettore  $b = (b_1, \dots, b_m)^T$  la formulazione completa di un generico problema di Programmazione Lineare può essere scritta nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases}$$

**Osservazione 3.2.1** Come già osservato in relazione ad un generico problema di Programmazione Matematica, (cfr. Osservazione 2.2.1) non si perde di generalità formulando un generico problema di Programmazione Lineare con vincoli di sola diseguaglianza nella forma di maggiore o uguale. Infatti, ogni vincolo di diseguaglianza nella forma di minore o uguale e ogni vincolo di uguaglianza può essere ricondotto a questa forma con semplici operazioni algebriche.

Per esempio,

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \\ & x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \end{aligned}$$

sono problemi di PL.

Le applicazioni della Ricerca Operativa che possono essere formulate mediante l'uso di modelli di Programmazione Lineare sono molto frequenti e importanti. In riferimento alle applicazioni di tipo economico la funzione obiettivo ha di solito il significato di profitto (da massimizzare) oppure di costo (da minimizzare). Profitti e costi sono ottenuti come somma dei *profitti* e *costi marginali* cioè di quelli relativi a ciascuna unità di prodotto. Quando è richiesta la massimizzazione di un profitto, il modello contiene, di solito, vincoli che esprimono limitazioni superiori sulle risorse (vincoli di capacità produttiva, disponibilità di materie prime); se invece è richiesta la minimizzazione di un costo sono di solito presenti vincoli sulla domanda (richieste di mercato) che impongono limitazioni inferiori alle variabili.

È possibile la presenza di *vincoli di continuità* che esprimono conservazione o riduzione di masse o volumi ed hanno spesso la forma di vincoli di uguaglianza.

I modelli di Programmazione Lineare hanno un impiego molto generale non limitato ad applicazioni economiche o progettuali; ad esempio, essi sono usati come elementi base di procedimenti di soluzione di problemi più complessi: è il caso di alcuni algoritmi di ottimizzazione discreta che sono basati sulla soluzione di una successione di problemi di Programmazione Lineare.

### 3.3 GENERALITÀ SUI MODELLI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Mettiamo ora in evidenza le caratteristiche che un problema reale deve possedere per poter essere formulato come modello di Programmazione Lineare ed i pregi dei modelli di Programmazione Lineare.

Innanzitutto, chiariamo che le ipotesi che vengono assunte nel formulare un problema come modello di Programmazione Lineare sono le seguenti:

- *proporzionalità*: il contributo di una variabile di decisione alla funzione obiettivo e ai vincoli è proporzionale secondo una costante moltiplicativa alla quantità rappresentata dalla variabile stessa;
- *additività*: il contributo delle variabili di decisione alla funzione obiettivo e ai vincoli è dato dalla somma dei contributi di ogni singola variabile.
- *continuità*: ogni variabile di decisione può assumere tutti i valori reali nell'intervallo di ammissibilità, e quindi le variabili possono assumere valori frazionari.

In relazione ad applicazioni reali queste ipotesi non rappresentano una grossa restrizione nel senso che sono molti gli ambiti e i problemi che sono ben rappresentati da un modello di Programmazione Lineare; si tenga comunque presente che esistono casi significativi in cui queste ipotesi non sono soddisfatte e quindi in questi casi è necessario considerare Modelli di Programmazione Non Lineare.

La particolare attenzione dedicata ai modelli di Programmazione Lineare deriva, comunque, dai numerosi vantaggi che essa presenta e che possono essere così sintetizzati:

1. *Generalità e flessibilità*.

I modelli di Programmazione Lineare possono descrivere moltissime situazioni reali anche assai diverse tra loro e quindi hanno un carattere di universalità e di adattabilità alle diverse realtà applicative e anche quando l'ipotesi di linearità non è accettabile, il modello lineare costituisce una buona base di partenza per successive generalizzazioni.

2. *Semplicità.*

I modelli di Programmazione Lineare sono espressi attraverso il linguaggio dell'algebra lineare e quindi sono facilmente comprensibili anche in assenza di conoscenze matematiche più elevate.

3. *Efficienza degli algoritmi risolutivi.*

Come accennato in precedenza i modelli reali hanno dimensioni molto elevate ed è quindi indispensabile l'uso del calcolatore che con opportuni programmi di calcolo possa rapidamente fornire una soluzione numerica. Relativamente ai modelli di Programmazione Lineare esistono programmi molto efficienti e largamente diffusi che sono in grado di risolvere rapidamente problemi con migliaia di vincoli e centinaia di migliaia di variabili.

4. *Possibilità di analisi qualitative.*

I modelli di Programmazione Lineare permettono di ottenere, oltre la soluzione numerica del problema, anche ulteriori informazioni relative alla dipendenza della soluzione da eventuali parametri presenti, che possono avere significative interpretazioni economiche.

### 3.4 CLASSI DI MODELLI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Lo scopo di questo paragrafo è quello di illustrare alcune classi di problemi di Programmazione Lineare tipici che si incontrano frequentemente nelle applicazioni reali. Questa divisione in classi ha uno scopo esclusivamente didattico al fine di fornire una esposizione sistematica di esempi di modelli di Programmazione Lineare di tipo generale. Nella realtà, nella maggior parte dei casi, i problemi che si presentano non sono riconducibili ad una classe specifica, ma possono essere costituiti da molteplici elementi. Tuttavia, la trattazione per grandi classi di problemi dovrebbe fornire strumenti utili per la modellizzazione di problemi reali. Tenendo presente questa osservazione, nel seguito esamineremo tre grandi classi di modelli di Programmazione Lineare che rappresentano situazioni molto diffuse del mondo reale; si tratta dei

- *modelli di allocazione ottima di risorse,*
- *modelli di miscelazione,*
- *modelli di trasporto.*

Per ciascuna classe di modelli verranno presentati alcuni esempi e una formulazione generale. Tale divisione in "classi" di problemi ha il solo scopo permettere una descrizione schematica di alcune situazioni tipiche che possono essere rappresentate attraverso problemi di Programmazione Lineare. È chiaro che nella

realità i problemi si presentano nelle forme più diverse e sta a colui che costruisce il modello fornirne una rappresentazione il più possibile completa e significativa del problema in analisi.

### 3.4.1 Modelli di allocazione ottima di risorse

Si tratta di modelli che considerano il problema di come dividere (allocare) risorse limitate tra varie esigenze in competizione fra di loro. Il generico termine “*risorse*” può rappresentare, ad esempio, disponibilità di macchinari, materie prime, mano d’opera, energia, tempi macchina, capitali, etc.

**Esempio 3.4.1** *Un colorificio produce due tipi di coloranti **C1** e **C2** utilizzando 3 preparati base in polvere **P1**, **P2**, **P3** che vengono sciolti in acqua. La differente concentrazione dei preparati base dà origine ai due diversi tipi di coloranti. Le quantità (in etogrammi) di preparati base necessarie per produrre un litro di colorante di ciascuno dei due tipi è riportato nella seguente tabella*

	<b>C1</b>	<b>C2</b>
<b>P1</b>	1	1
<b>P2</b>	1	2
<b>P3</b>	-	1

*Ogni giorno la quantità di ciascuno dei preparati base (in etogrammi) della quale il colorificio può disporre è la seguente*

<b>P1</b>	<b>P2</b>	<b>P3</b>
750	1000	400

*Il prezzo di vendita del colorante **C1** è di 7 Euro al litro, mentre il colorante **C2** viene venduto a 10 Euro al litro. Determinare la strategia ottimale di produzione giornaliera in modo da massimizzare i ricavi ottenuti dalla vendita dei due coloranti.*

#### Formulazione.

Si vuole costruire il modello di Programmazione Lineare che rappresenti il problema in analisi considerando le limitazioni date dalle produzioni effettivamente realizzabili.

È immediato associare le variabili di decisione ai quantitativi di coloranti prodotti. Siano, quindi, rispettivamente  $x_1$  e  $x_2$  i quantitativi (in litri) da produrre giornalmente dei due coloranti.

Nel formulare il modello di Programmazione Lineare si deve verificare che siano soddisfatte le ipotesi fondamentali:

- *Proporzionalità.*

I consumi dei preparati base e i ricavi ottenibili sono proporzionali ai quantitativi di coloranti prodotti. Ad esempio, per produrre una quantità  $x_2$  di colorante **C2** si consumano  $2x_2$  etogrammi di **P2** e dalla vendita di  $x_2$  litri di **C2** si ricavano  $10x_2$  Euro indipendentemente dalla quantità prodotta e venduta dell'altro tipo di colorante.

- *Additività.*

I consumi dei preparati base e i ricavi rispettivamente associati alla produzione dei due coloranti sono additivi, nel senso che per produrre  $x_1$  litri di colorante **C1** e  $x_2$  di **C2** si consumano  $x_1 + 2x_2$  etogrammi di preparato di base **P2** e si ricavano  $7x_1 + 10x_2$  Euro.

- *Continuità.*

Ogni variabile introdotta nel modello può assumere tutti i valori reali nell'intervallo di ammissibilità.

- *Variabili.* Come già detto, prendiamo come variabili di decisione  $x_1$  e  $x_2$ , rispettivamente i quantitativi (in litri) di colorante **C1** e **C2** da produrre giornalmente.
- *Funzione obiettivo.* È rappresentata dal profitto totale che per le ipotesi fatte è dato (in Euro) da  $7x_1 + 10x_2$ .
- *Vincoli.* Poiché il consumo di preparati base non può essere superiore alla disponibilità si deve avere

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 750 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 1000 \\ x_2 &\leq 400. \end{aligned}$$

Inoltre si deve esplicitare il vincolo di non negatività sulle variabili

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Quindi la formulazione finale è

$$\begin{cases} \max (7x_1 + 10x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 750 \\ x_1 + 2x_2 \leq 1000 \\ x_2 \leq 400 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

□

**Esempio 3.4.2** Una azienda automobilistica produce tre diversi modelli di autovettura: un modello economico, uno normale ed uno di lusso. Ogni autovettura viene lavorata da tre robot: **A**, **B** e **C**. I tempi necessari alla lavorazione sono riportati, in minuti, nella tabella seguente insieme al profitto netto realizzato per autovettura

	Economica	Normale	Lusso
<b>A</b>	20	30	62
<b>B</b>	31	42	51
<b>C</b>	16	81	10
Prezzo	1000	1500	2200

I robot **A** e **B** sono disponibili per 8 ore al giorno mentre il robot **C** è disponibile per 5 ore al giorno. Il numero di autovetture di lusso prodotte non deve superare il 20% del totale mentre il numero di autovetture economiche deve costituire almeno il 40% della produzione complessiva. Supponendo che tutte le autovetture prodotte vengano vendute, formulare un problema di Programmazione Lineare che permetta di decidere le quantità giornaliere (non necessariamente intere) da produrre per ciascun modello in modo tale da massimizzare i profitti rispettando i vincoli di produzione.

### Formulazione.

È un problema di allocazione ottima di risorse e può essere formulato in termini di Programmazione Lineare nel seguente modo.

- *Variabili.* Indichiamo con  $x_1, x_2, x_3$ , rispettivamente il numero di autovetture (assunte non necessariamente intere) del modello economico, normale e di lusso da produrre giornalmente.
- *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo è data dal profitto globale ottenuto dalla vendita delle automobili e quindi può essere scritta

$$1000x_1 + 1500x_2 + 2200x_3.$$

- *Vincoli.* Ci sono due tipologie di vincoli da considerare:

- i vincoli sulla capacità produttiva; poiché il robot **A** è disponibile giornalmente per 8 ore, cioè per 480 minuti si ha il vincolo

$$20x_1 + 30x_2 + 62x_3 \leq 480.$$

Ragionando in modo analogo si ottengono i vincoli relativi alla disponibilità dei robot **B** e **C**, e quindi si ottengono i seguenti vincoli:

$$31x_1 + 42x_2 + 51x_3 \leq 480$$

$$16x_1 + 81x_2 + 10x_3 \leq 300.$$

- i vincoli sul numero totale dei singoli tipi di autovetture da fabbricate giornalmente che possono essere scritti nella forma

$$x_3 \leq 0.2(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$x_1 \geq 0.4(x_1 + x_2 + x_3).$$

Si devono inoltre esplicitare i vincoli di non negatività

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0.$$

Quindi la formulazione completa può essere scritta

$$\left\{ \begin{array}{l} \max (1000x_1 + 1500x_2 + 2200x_3) \\ 20x_1 + 30x_2 + 62x_3 \leq 480 \\ 31x_1 + 42x_2 + 51x_3 \leq 480 \\ 16x_1 + 81x_2 + 10x_3 \leq 300 \\ x_3 \leq 0.2(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1 \geq 0.4(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

□

**Osservazione 3.4.3** Nel modello precedente sono state utilizzate variabili di decisione *continue* associate a quantità che possono essere considerate indivisibili (autovetture). Questa ipotesi potrebbe risultare impropria, tuttavia permette di formulare il problema come Problema di Programmazione Lineare (e non di Programmazione Lineare Intera, cioè come un problema più “trattabile”). D’altra parte, in generale, tale ipotesi può non far perdere validità al modello soprattutto se i valori assunti dalle variabili di decisione sono relativamente molto grandi. Ogni approssimazione a valori interi del valore ottimo delle variabili, ovviamente, fa perdere l’ottimalità della soluzione così ottenuta, ma in molti casi tale soluzione approssimata può essere efficacemente utilizzata nella pratica.

**Esempio 3.4.4** *Si consideri la stessa azienda dell’esempio precedente con la sola differenza che, questa volta, i tre modelli di autovetture possono essere prodotti utilizzando uno qualsiasi dei tre robot senza richiedere quindi che per avere un’autovettura finita sia necessaria la lavorazione di tutti i tre robot.*

**Formulazione.**

- *Variabili.* Indichiamo con  $x_{ij}$ , con  $i = 1, 2, 3$  e  $j = 1, 2, 3$ , il numero di autovetture del modello  $j$ -esimo da produrre giornalmente con il robot  $i$ -esimo.
- *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo diventa:

$$1000(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 1500(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 2200(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

– *Vincoli.*

- I vincoli sulla capacità produttiva si esprimono:

$$20x_{11} + 30x_{12} + 62x_{13} \leq 480.$$

$$31x_{21} + 42x_{22} + 51x_{23} \leq 480$$

$$16x_{31} + 81x_{32} + 10x_{33} \leq 300.$$

- i vincoli sul numero totale dei singoli tipi di autovetture da fabbricare assumono la forma:

$$\begin{aligned} x_{13} + x_{23} + x_{33} &\leq 0.2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 0.4 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij}. \end{aligned}$$

Si devono inoltre esplicitare i vincoli di non negatività

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3.$$

Quindi la formulazione finale è la seguente:

$$\begin{cases} \max (1000(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 1500(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 2200(x_{13} + x_{23} + x_{33})) \\ 20x_{11} + 30x_{12} + 62x_{13} \leq 480 \\ 31x_{21} + 42x_{22} + 51x_{23} \leq 480 \\ 16x_{31} + 81x_{32} + 10x_{33} \leq 300 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 0.2(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 0.4(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

□

*Formulazione generale di un problema di allocazione ottima di risorse*

Per costruire uno schema generale di formulazione per questo tipo di problemi si assuma di disporre di  $m$  risorse  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_m$  e di voler fabbricare  $n$  diversi prodotti  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ .

Le risorse possono essere sia umane (mano d'opera) sia materiali (disponibilità di macchinari o di materie prime). Il problema della pianificazione delle risorse consiste nel determinare le quantità da fabbricare di ciascun prodotto  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$  in modo da massimizzare il profitto rispettando i vincoli sulle risorse disponibili o sui livelli di produzione richiesti.

Si indichi con  $a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  la quantità della risorsa  $\mathbf{R}_i$  necessaria per fabbricare una unità del prodotto  $\mathbf{P}_j$ . Si può così costruire la seguente tabella

	$\mathbf{P}_1$	$\dots$	$\mathbf{P}_j$	$\dots$	$\mathbf{P}_n$
$\mathbf{R}_1$	$a_{11}$	$\dots$	$a_{1j}$	$\dots$	$a_{1n}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{R}_i$	$a_{i1}$	$\dots$	$a_{ij}$	$\dots$	$a_{in}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{R}_m$	$a_{m1}$	$\dots$	$a_{mj}$	$\dots$	$a_{mn}$

Supponiamo che ciascuna risorsa  $\mathbf{R}_i$  non possa superare un valore prefissato  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \dots & \mathbf{R}_m \\ b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{array}$$

e che nella vendita di ciascuna unità di prodotto  $\mathbf{P}_j$  si ricavi un profitto netto  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, n$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \dots & \mathbf{P}_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n. \end{array}$$

È utile ribadire le ipotesi già esposte in precedenza le quali devono valere in generale per la costruzione di modelli di Programmazione Lineare: *proporzionalità, additività, continuità* cioè i consumi delle risorse e i ricavi ottenibili sono proporzionali ai quantitativi di prodotto fabbricati; i consumi globali di risorse e i ricavi totali si ottengono come somma dei consumi e dei ricavi marginali; le variabili possono assumere valori frazionari.

**Formulazione 1: risorse concorrenti.**

Esaminiamo prima la situazione in cui il bene fabbricato per essere finito e pronto per la vendita deve utilizzare tutte le risorse, anche se in misura diversa.

– *Variabili di decisione.* Si introducono le variabili di decisione  $x_1, x_2, \dots, x_n$  rappresentanti (in un'opportuna unità di misura) la quantità di ciascun prodotto  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ . Queste saranno le incognite del problema. Tali variabili

di decisione sono i cosiddetti *livelli di attività*. Introducendo come spazio delle variabili lo spazio delle  $n$ -uple reali  $\mathbb{R}^n$  si può considerare un  $x \in \mathbb{R}^n$  definendo  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ .

– *Funzione obiettivo.* Per le ipotesi fatte la funzione obiettivo (da massimizzare) può essere scritta

$$z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j.$$

Introducendo  $c \in \mathbb{R}^n$ , definito  $c = (c_1, \dots, c_n)^T$  la funzione obiettivo può essere scritta in notazione vettoriale

$$z = c^T x.$$

– *Vincoli.* Si devono introdurre i seguenti vincoli:

- *Vincoli di capacità produttiva:*

tenendo conto delle limitazioni delle risorse si hanno i seguenti  $m$  vincoli

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + & \dots & + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n & \leq b_m. \end{array}$$

- *Vincoli di non negatività:*

le variabili devono essere non negative in quanto esse rappresentano livelli di produzione e quindi si hanno i vincoli

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Introducendo la matrice  $(m \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e il vettore  $b = (b_1, \dots, b_m)^T$  la formulazione completa del problema può essere scritta nella forma

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

È una formulazione generale (con solo vincoli di diseguaglianza e vincoli di non negatività) in cui si può porre un generico problema di allocazione ottima di risorse.

Nella pratica, potrebbe essere necessario imporre ulteriori vincoli:

- Vincoli di domanda

- limitazioni inferiori sulle variabili  $x_i$  cioè

$$x_i \geq l_i \quad i = 1, \dots, n$$

con  $l_i \geq 0$  per assicurare che i prodotti siano fabbricati in quantità significative. In questo caso, per ogni indice  $i$  per il quale  $l_i > 0$  il vincolo di non negatività  $x_i \geq 0$  è ridondante.

- limitazioni superiori sulle variabili, cioè

$$x_i \leq u_i \quad i = 1, \dots, n$$

dovute ad eventuali possibilità limitate di assorbimento dei prodotti da parte del mercato.

Introducendo le notazioni vettoriali  $l = (l_1, \dots, l_n)^T$  e  $u = (u_1, \dots, u_n)^T$  questi vincoli possono essere scritti nella forma  $l \leq x \leq u$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

- Vincoli di interezza.

Se inoltre non ha senso considerare i prodotti quantità divisibili allora si deve definire un modello di programmazione a numeri interi. Cioè nel caso in cui non si possa supporre che i livelli di attività siano frazionari (ad es. se i prodotti sono quantità indivisibili come motori, lavatrici etc.), allora si deve aggiungere il vincolo che le quantità  $x_i$  siano intere.

### Formulazione 2: risorse alternative.

Si consideri ora invece la situazione in cui il bene fabbricato per essere finito e pronto per la vendita necessita esclusivamente di una risorsa. Nella pratica questo può accadere se, ad esempio, ciascun reparto in cui può essere suddivisa un'industria è in grado di produrre autonomamente ciascuno dei prodotti, ovvero la lavorazione di un prodotto avviene esclusivamente in uno dei reparti disponibili.

- *Variabili di decisione.* Si introducono le variabili di decisione  $x_{ij}$  rappresentanti la quantità di prodotto  $\mathbf{P}_j$  da fabbricare utilizzando la risorsa  $\mathbf{R}_i$ .
- *Funzione obiettivo.* Per le ipotesi fatte la funzione obiettivo (da massimizzare) può essere scritta

$$c_1 \sum_{i=1}^m x_{i1} + c_2 \sum_{i=1}^m x_{i2} + \dots + c_n \sum_{i=1}^m x_{in} = \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^m x_{ij}.$$

- *Vincoli.* I vincoli di capacità produttiva sono della forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_{11} + & \dots + a_{1n}x_{1n} \leq b_1 \\ a_{21}x_{21} + & \dots + a_{2n}x_{2n} \leq b_2 \\ \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_{m1} + & \dots + a_{mn}x_{mn} \leq b_m. \end{aligned}$$

Infine si devono esplicitare i vincoli di non negatività della variabili cioè  $x_{ij} \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Come si può facilmente osservare la matrice  $A$  dei coefficienti delle disequazioni lineari che descrivono i vincoli è rimasta immutata rispetto alla matrice considerata nella formulazione del caso delle risorse concorrenti già vista, ma c'è una sostanziale differenza nelle variabili.

#### Modelli multi-plant

Si tratta di problemi di pianificazione della produzione in cui modelli di grandi dimensioni sono ottenuti come combinazione di modelli più piccoli. Tali modelli combinati sono sicuramente più efficaci dei sottomodelli dai quali essi sono costituiti. Esaminiamo un esempio di questa situazione.

**Esempio 3.4.5** *Un'industria manifatturiera possiede due impianti di produzione e fabbrica due tipi di prodotti  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  utilizzando due macchine utensili: una per la levigatura e una per la pulitura. Per avere un prodotto finito è necessaria l'utilizzazione di entrambe le macchine. Il primo impianto ha una disponibilità massima settimanale di 80 ore della macchina per la levigatura e di 60 ore della macchina per la pulitura. Le disponibilità massime orarie delle due macchine nel secondo impianto sono rispettivamente di 60 e 75 ore settimanali. La tabella che segue riporta, per ciascun prodotto, il numero di ore di lavorazione necessarie su ciascuna macchina per ottenere un prodotto finito (poiché le macchine possedute dal secondo impianto sono più vecchie, i tempi di utilizzo sono maggiori)*

	IMPIANTO 1		IMPIANTO 2	
	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2$	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2$
levigatura	4	2	5	3
pulitura	2	5	5	6

Inoltre ciascuna unità di prodotto utilizza 4 Kg di materiale grezzo. Il profitto netto ottenuto dalla vendita di una unità di prodotto  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  è rispettivamente di 10\$ e 15\$.

- Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti in ciascun impianto sapendo che settimanalmente l'industria dispone di 75 Kg di materiale grezzo nel primo impianto e di 45 Kg di materiale grezzo nel secondo impianto.
- Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti supponendo che l'industria non allochi a priori 75 Kg di materiale grezzo nel primo impianto e di 45 Kg di materiale grezzo nel secondo impianto, ma lasci al modello la decisione di come ripartire tra i due impianti 120 Kg complessivi disponibili di questo materiale grezzo.

### Formulazione

– *Variabili.* Si introducono le variabili  $x_1$  e  $x_2$  associate alla quantità di prodotto  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  fabbricato settimanalmente dal primo impianto e le variabili  $x_3$  e  $x_4$  associate alla quantità di prodotto  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  fabbricato settimanalmente dal secondo impianto.

### Formulazione del caso (a)

Questo caso, nella pratica, corrisponde a costruire due modelli indipendenti: uno riferito al primo impianto, uno riferito al secondo impianto. Una “risorsa” (il materiale grezzo) è già allocata a priori.

IMPIANTO 1: La formulazione relativa al primo impianto è:

$$\begin{cases} \max(10x_1 + 15x_2) \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

IMPIANTO 2: La formulazione relativa al secondo impianto è:

$$\begin{cases} \max(10x_3 + 15x_4) \\ 4x_3 + 4x_4 \leq 45 \\ 5x_3 + 3x_4 \leq 60 \\ 5x_3 + 6x_4 \leq 75 \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

### Formulazione del caso (b)

Questo caso corrisponde a costruire un unico modello comprendente entrambi gli impianti. L'allocazione della “risorsa” data dal materiale grezzo è lasciata al modello stesso.

La formulazione relativa a questo caso è:

$$\begin{cases} \max (10x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 15x_4) \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 120 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ 5x_3 + 3x_4 \leq 60 \\ 5x_3 + 6x_4 \leq 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

□

**Osservazione 3.4.6** Nel caso (b) si richiede al modello di ripartire i 120 Kg di materiale grezzo piuttosto che effettuare un'allocazione arbitraria a priori, quindi ci si può aspettare una maggiore efficienza nell'allocazione di queste risorse nel caso (b). Un confronto delle soluzioni ottime di questi problemi conferma questa intuizione: infatti nel caso (a), ottimizzando la produzione dell'impianto 1 e quella dell'impianto 2, si ottiene un guadagno complessivo di  $225\$ + 168.75\$ = 393.75\$$ , mentre nel caso (b) si ottiene un guadagno di 404.15\$.

**Osservazione 3.4.7** Si osservi la particolare struttura della matrice dei coefficienti dei vincoli che è tipica dei problemi di questo tipo

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Una matrice con questa struttura si chiama *matrice a blocchi*. Una siffatta struttura permette di utilizzare metodi particolari per la soluzione del problema. Infatti possono essere utilizzate *tecniche di decomposizione* che consentono di risolvere efficientemente anche problemi di questo tipo anche di dimensioni molto elevate. Si osservi che le tecniche di decomposizione non consistono nella suddivisione del problema in sottoproblemi, ma piuttosto con tale termine ci si riferisce a procedure computazionali specifiche che pur considerando il problema complessivo sfruttano la sua particolare struttura. L'importanza della decomposizione non è soltanto computazionale ma ha anche una significativa interpretazione economica; infatti essa corrisponde a considerare una pianificazione decentralizzata.

#### *Modelli multiperiodo*

Si tratta di problemi di allocazione ottima di risorse limitate analoghi a quelli già trattati, ma dove la pianificazione è effettuata su un orizzonte temporale composto da più periodi elementari; si richiede, cioè, di estendere la programmazione mensile della produzione di un'azienda in modo da ottenere un piano di produzione semestrale con possibilità di giacenze al termine di ciascun mese. L'esempio che segue riporta una semplice situazione di questo tipo.

**Esempio 3.4.8** *Si consideri l'industria manifatturiera vista nel precedente Esempio 3.4.5 nel caso in cui abbia solamente il primo impianto di produzione. In questo caso si deve programmare la produzione dei due prodotti  $P_1$  e  $P_2$  nelle due successive settimane sapendo che nella prima settimana si potranno vendere al più 12 prodotti  $P_1$  e 4 prodotti  $P_2$ , mentre nella seconda si potranno vendere al più 8 prodotti  $P_1$  e 12 prodotti  $P_2$ . Inoltre nella prima settimana c'è la*

possibilità di produrre più prodotti rispetto a quelli che si possono vendere, immagazzinando i prodotti in eccesso prevedendo un loro utilizzo nella settimana successiva. Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti nelle due settimane sapendo che settimanalmente l'industria dispone di 75 Kg di materiale grezzo e tenendo conto che il costo di immagazzinamento di un prodotto (sia di tipo  $\mathbf{P}_1$  sia di tipo  $\mathbf{P}_2$ ) è di 2 \$. Si ricorda che il profitto netto ottenuto dalla vendita di 1 unità di prodotto  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  è rispettivamente di 10\$ e 15\$.

### Formulazione

- *Variabili.* Si introducono le variabili  $x_1$  e  $x_2$  associate alla quantità di prodotti  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  fabbricati nella prima settimana, le variabili  $x_3$  e  $x_4$  associate alla quantità di prodotti  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  fabbricati nella seconda settimana e le variabili  $y_1$  e  $y_2$  che indicano le quantità di prodotti  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  fabbricati nella prima settimana ed immagazzinati per venderli nella seconda.
- *Funzione obiettivo.* Nella prima settimana saranno vendute le quantità  $(x_1 - y_1)$  di prodotto  $\mathbf{P}_1$  e  $(x_2 - y_2)$  di prodotto  $\mathbf{P}_2$ , nella seconda le quantità  $(x_3 + y_1)$  di prodotto  $\mathbf{P}_1$  e  $(x_4 + y_2)$  di prodotto  $\mathbf{P}_2$ . Tenendo conto dei costi di immagazzinamento si ottiene la seguente funzione obiettivo:

$$10(x_1 - y_1) + 15(x_2 - y_2) + 10(x_3 + y_1) + 15(x_4 + y_2) - 2(y_1 + y_2) = \\ 10(x_1 + x_3) + 15(x_2 + x_4) - 2(y_1 + y_2).$$

- *Vincoli.* In questo problema si hanno nuovamente quattro tipologie di vincoli:
  - i vincoli sulle capacità produttive nelle due settimane:

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + 4x_2 & \leq & 75 \\ 4x_1 + 2x_2 & \leq & 80 \\ 2x_1 + 5x_2 & \leq & 60 \\ \\ 4x_3 + 4x_4 & \leq & 75 \\ 4x_3 + 2x_4 & \leq & 80 \\ 2x_3 + 5x_4 & \leq & 60 \end{array}$$

- vincoli che rappresentano il fatto che, alla fine della prima settimana, una parte dei prodotti può essere immagazzinata

$$x_1 - y_1 \leq 12$$

$$x_2 - y_2 \leq 4$$

- vincoli che rappresentano il fatto che il numero dei prodotti disponibili nella seconda settimana non deve superare le richieste del mercato

$$y_1 + x_3 \leq 8$$

$$y_2 + x_4 \leq 12$$

- vincoli che rappresentano la non negatività delle variabili

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

La formulazione relativa a questo problema è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \left( 10(x_1 + x_2) + 15(x_3 + x_4) - 2(y_1 + y_2) \right) \\ \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ \\ 4x_3 + 4x_4 \leq 75 \\ 4x_3 + 2x_4 \leq 80 \\ 2x_3 + 5x_4 \leq 60 \\ \\ x_1 - y_1 \leq 12 \\ x_2 - y_2 \leq 4 \\ x_3 + y_1 \leq 8 \\ x_4 + y_2 \leq 12 \\ \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

**Osservazione 3.4.9** Se non si fosse prevista la possibilità di poter immagazzinare dei prodotti non venduti, si sarebbe dovuto massimizzare separatamente i profitti ottenuti dalla vendita dei prodotti fabbricati nella prima e nella seconda settimana risolvendo i seguenti problemi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(10x_1 + 15x_2) \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ 0 \leq x_1 \leq 12 \\ 0 \leq x_2 \leq 4, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max(10x_1 + 15x_2) \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ 0 \leq x_1 \leq 8 \\ 0 \leq x_2 \leq 12. \end{array} \right.$$

In questo caso si sarebbe ottenuto un guadagno complessivo di  $180\$ + 212\$ = 392\$$ . Mentre la soluzione ottima del modello di Programmazione Lineare, descritto precedentemente e che prevedeva anche la possibilità di poter immagazzinare i prodotti non venduti, porta ad un guadagno di  $429.1\$$ . Questo mette in evidenza la convenienza di effettuare una programmazione complessiva sulle due settimane, prevedendo la possibilità di produrre nella prima settimana di più di quanto si possa vendere e considerando anche le spese relative all'immagazzinamento dei prodotti non venduti.

**Osservazione 3.4.10** Si osservi che i primi sei vincoli del precedente modello multiperiodo presentano una struttura particolare. Infatti possono essere rappresentati da una matrice *a blocchi* (in particolare nell'esempio considerato tutti i blocchi sono uguali). Il fatto di avere la maggior parte dei vincoli con una struttura a blocchi è una caratteristica di tutti i modelli multiperiodo. Come detto per i modelli multi-plan, questa particolare struttura può essere sfruttata attraverso l'uso di tecniche di decomposizione in modo da risolvere efficientemente anche problemi di questo tipo di grosse dimensioni.

Esaminiamo ora un altro modello multiperiodo.

**Esempio 3.4.11** Una fabbrica produce due tipi di pneumatici *A* e *B* ed ha una gestione trimestrale della produzione. Per i prossimi tre mesi deve soddisfare il seguente ordine (espresso in numero di pneumatici richiesti ciascun mese)

	tipo A	tipo B
ottobre	16000	14000
novembre	7000	4000
dicembre	4000	6000

Per la produzione di questi pneumatici la fabbrica dispone di due linee di produzione **L1** e **L2**. Per avere un pneumatico finito e pronto per essere venduto, è necessaria la lavorazione di materiale grezzo su solo una delle due linee di produzione. Il numero di ore in cui le linee di produzione sono disponibili ciascun mese sono riportate nella seguente tabella

	L1	L2
ottobre	2000	3000
novembre	400	800
dicembre	200	1000

I tempi necessari per produrre questi pneumatici varia a seconda del tipo e della linea di produzione usata. Tali tempi sono riportati nella seguente tabella (in ore)

	L1	L2
tipo A	0.10	0.12
tipo B	0.12	0.18

Il costo di ogni ora di lavorazione su una linea di produzione è uguale per entrambe le linee ed è pari a 6 euro. Il costo del materiale grezzo necessario per produrre ciascun pneumatico è di euro 2.50 per il tipo *A* e di euro 4.00 per il tipo *B*.

Nel primo e nel secondo mese del trimestre è possibile produrre più di quanto richiesto nello stesso mese; la produzione in eccesso deve essere immagazzinata per essere usata nel mese successivo. Ogni mese, il costo di tale immagazzinamento

è di euro 0.35 per ciascun pneumatico immagazzinato. Si assume che all'inizio del trimestre non ci sia nessun prodotto immagazzinato e analogamente alla fine del trimestre non rimanga nessun prodotto immagazzinato.

Costruire un modello lineare che permetta di pianificare la produzione trimestrale minimizzando il costo complessivo trascurando l'interezza dei prodotti.

### Formulazione.

Si tratta di un problema di allocazione ottima di risorse nel quale si deve tenere presente la possibilità dell'immagazzinamento del prodotto in eccesso (allocazione ottima multiperiodo).

– *Variabili.* Si introducono le variabili  $A_{Li}^{ott}$ ,  $A_{Li}^{nov}$ ,  $A_{Li}^{dic}$  che indicano la quantità di pneumatici di tipo A prodotti dalla  $i$ –esima linea produzione ( $i = 1, 2$ ) rispettivamente nei mesi di ottobre, novembre e dicembre. Analogamente  $B_{Li}^{ott}$ ,  $B_{Li}^{nov}$ ,  $B_{Li}^{dic}$  indicheranno le quantità di pneumatici di tipo B prodotti dalla  $i$ –esima linea di produzione ( $i = 1, 2$ ) rispettivamente nei mesi di ottobre, novembre e dicembre. Si indichino inoltre con  $A_{im}^{ott}$ ,  $A_{im}^{nov}$ ,  $B_{im}^{ott}$ ,  $B_{im}^{nov}$  le quantità di pneumatici di tipo A e B da immagazzinare nei mesi di ottobre e novembre.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è data dal costo complessivo di produzione. Poiché un'ora di lavorazione su una linea di produzione costa 6 euro, e poiché i tempi di lavorazione cambiano a seconda della linea di produzione utilizzata, per produrre ciascun pneumatico di tipo A si spende euro 0.60 se si utilizza la linea **L1** e euro 0.72 se si utilizza la linea **L2**. Analogamente, il costo di ciascun pneumatico del tipo B è di euro 0.72 se si utilizza la macchina 1, e di euro 1.08 se si utilizza la linea **L2**. Quindi tenendo conto del costo del materiale grezzo e dell'immagazzinamento, il costo complessivo sarà

$$\begin{aligned}
 & 0.6(A_{L1}^{ott} + A_{L1}^{nov} + A_{L1}^{dic}) + 0.72(A_{L2}^{ott} + A_{L2}^{nov} + A_{L2}^{dic}) + \\
 & + 0.72(B_{L1}^{ott} + B_{L1}^{nov} + B_{L1}^{dic}) + 1.08(B_{L2}^{ott} + B_{L2}^{nov} + B_{L2}^{dic}) + \\
 & + 2.50(A_{L1}^{ott} + A_{L1}^{nov} + A_{L1}^{dic} + A_{L2}^{ott} + A_{L2}^{nov} + A_{L2}^{dic}) + \\
 & + 4.00(B_{L1}^{ott} + B_{L1}^{nov} + B_{L1}^{dic} + B_{L2}^{ott} + B_{L2}^{nov} + B_{L2}^{dic}) + \\
 & + 0.35(A_{im}^{ott} + A_{im}^{nov} + B_{im}^{ott} + B_{im}^{nov}).
 \end{aligned}$$

– *Vincoli.* I vincoli dovuti alla disponibilità limitata delle macchine sono

$$\begin{aligned}
 0.10A_{L1}^{ott} + 0.12B_{L1}^{ott} & \leq 2000 \\
 0.10A_{L1}^{nov} + 0.12B_{L1}^{nov} & \leq 400 \\
 0.10A_{L1}^{dic} + 0.12B_{L1}^{dic} & \leq 200
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0.12A_{L2}^{ott} + 0.18B_{L2}^{ott} &\leq 3000 \\
 0.12A_{L2}^{nov} + 0.18B_{L2}^{nov} &\leq 800 \\
 0.12A_{L2}^{dic} + 0.18B_{L2}^{dic} &\leq 1000.
 \end{aligned}$$

Si hanno inoltre i seguenti vincoli dovuti alla richiesta e all'immagazzinamento:

$$\begin{aligned}
 A_{L1}^{ott} + A_{L2}^{ott} &= 16000 + A_{im}^{ott} \\
 A_{L1}^{nov} + A_{L2}^{nov} + A_{im}^{ott} &= 7000 + A_{im}^{nov} \\
 A_{L1}^{dic} + A_{L2}^{dic} + A_{im}^{nov} &= 4000
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{L1}^{ott} + B_{L2}^{ott} &= 14000 + B_{im}^{ott} \\
 B_{L1}^{nov} + B_{L2}^{nov} + B_{im}^{ott} &= 4000 + B_{im}^{nov} \\
 B_{L1}^{dic} + B_{L2}^{dic} + B_{im}^{nov} &= 6000.
 \end{aligned}$$

Si hanno infine i vincoli di non negatività sulle variabili. Quindi il modello finale è:

$$\left\{
 \begin{aligned}
 &\min \left( 3.1(A_{L1}^{ott} + A_{L1}^{nov} + A_{L1}^{dic}) + 3.22(A_{L2}^{ott} + A_{L2}^{nov} + A_{L2}^{dic}) + \right. \\
 &\quad + 4.72(B_{L1}^{ott} + B_{L1}^{nov} + B_{L1}^{dic}) + 5.08(B_{L2}^{ott} + B_{L2}^{nov} + B_{L2}^{dic}) + \\
 &\quad \left. + 0.35(A_{im}^{ott} + A_{im}^{nov} + B_{im}^{ott} + B_{im}^{nov}) \right) \\
 &0.10A_{L1}^{ott} + 0.12B_{L1}^{ott} \leq 2000 \\
 &0.10A_{L1}^{nov} + 0.12B_{L1}^{nov} \leq 400 \\
 &0.10A_{L1}^{dic} + 0.12B_{L1}^{dic} \leq 200 \\
 &0.12A_{L2}^{ott} + 0.18B_{L2}^{ott} \leq 3000 \\
 &0.12A_{L2}^{nov} + 0.18B_{L2}^{nov} \leq 800 \\
 &0.12A_{L2}^{dic} + 0.18B_{L2}^{dic} \leq 1000 \\
 &A_{L1}^{ott} + A_{L2}^{ott} = 16000 + A_{im}^{ott} \\
 &A_{L1}^{nov} + A_{L2}^{nov} + A_{im}^{ott} = 7000 + A_{im}^{nov} \\
 &A_{L1}^{dic} + A_{L2}^{dic} + A_{im}^{nov} = 4000 \\
 &B_{L1}^{ott} + B_{L2}^{ott} = 14000 + B_{im}^{ott} \\
 &B_{L1}^{nov} + B_{L2}^{nov} + B_{im}^{ott} = 4000 + B_{im}^{nov} \\
 &B_{L1}^{dic} + B_{L2}^{dic} + B_{im}^{nov} = 6000 \\
 &A_{Li}^{ott} \geq 0, A_{Li}^{nov} \geq 0, A_{Li}^{dic} \geq 0, \quad i = 1, 2 \\
 &B_{Li}^{ott} \geq 0, B_{Li}^{nov} \geq 0, B_{Li}^{dic} \geq 0, \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}
 \right.$$

□

### 3.4.2 Modelli di miscelazione

Nei modelli di allocazione ottima le risorse devono essere ripartite mentre nei modelli di miscelazione le risorse devono essere combinate tra di loro. I modelli di miscelazione decidono come combinare (miscelare) tali risorse in maniera da soddisfare al meglio determinati obiettivi rispettando opportune richieste.

**Esempio 3.4.12** *Un'industria conserviera deve produrre succhi di frutta mescolando polpa di frutta e dolcificante ottenendo un prodotto finale che deve soddisfare alcuni requisiti riguardanti il contenuto di vitamina C, di sali minerali e di zucchero. La polpa di frutta e il dolcificante vengono acquistati al costo rispettivamente di 4 Euro e 6 Euro ogni ettagrammo. Inoltre dalle etichette si ricava che 100 grammi di polpa di frutta contengono 140 mg di vitamina C, 20 mg di sali minerali e 25 grammi di zucchero, mentre 100 grammi di dolcificante contengono 10 mg di sali minerali, 50 grammi di zucchero e non contengono vitamina C. I requisiti che il prodotto finale (cioè il succo di frutta pronto per la vendita) deve avere sono i seguenti: il succo di frutta deve contenere almeno 70 mg di vitamina C, almeno 30 mg di sali minerali e almeno 75 grammi di zucchero. Si devono determinare le quantità di polpa di frutta e di dolcificante da utilizzare nella produzione del succo di frutta in modo da minimizzare il costo complessivo dell'acquisto dei due componenti base.*

#### Formulazione.

Si vuole costruire un modello di Programmazione Lineare che rappresenti il problema in analisi tenendo presente i requisiti di qualità richiesti. Si verifica facilmente che le ipotesi fondamentali di un modello di Programmazione Lineare sono soddisfatte.

- *Variabili.* È naturale associare la variabili di decisione alle quantità di polpa di frutta e di dolcificante da utilizzare per la produzione del succo di frutta. Quindi siano  $x_1$  e  $x_2$  rispettivamente le quantità espresse in ettagrammi di polpa di frutta e di dolcificante che devono essere utilizzate.
- *Funzione obiettivo.* È rappresentata dal costo complessivo dell'acquisto dei due componenti base e quindi è data (in centesimi di Euro) da  $400x_1 + 600x_2$ . Questa espressione naturalmente deve essere minimizzata.
- *Vincoli.* Poiché un ettagrammo di polpa contiene 140 mg di vitamina C e il dolcificante non contiene vitamina C, il primo vincolo da considerare riguardante il contenuto di vitamina C del succo di frutta si può scrivere nella forma

$$140x_1 \geq 70.$$

Analogamente per rispettare il requisito sul contenuto di sali minerali del succo di frutta si dovrà imporre il vincolo

$$20x_1 + 10x_2 \geq 30.$$

Infine il vincolo sul contenuto di zucchero del succo di frutta si può esprimere nella forma

$$25x_1 + 50x_2 \geq 75.$$

Infine si deve esplicitare il vincolo di non negatività sulle variabili cioè

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Quindi la formulazione finale è

$$\begin{cases} \min(400x_1 + 600x_2) \\ 140x_1 \geq 70 \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

□

### Esempio 3.4.13 – IL PROBLEMA DELLA DIETA A COSTO MINIMO

Una dieta prescrive che giornalmente devono essere assimilate quantità predeterminate di calorie, proteine e calcio, intese come fabbisogni minimi giornalieri, disponendo di cinque alimenti base (pane, latte, uova, carne, dolce). Tali fabbisogni minimi sono di 2000 calorie, 50 g. di proteine, 700 mg. di calcio. Dalle tabelle dietetiche si ricavano i seguenti contenuti di calorie (in cal.), proteine (in g.), calcio (in mg.) per ogni singola porzione di ciascun alimento, intendendo come porzione una quantità espressa in grammi e quindi frazionabile.

	Pane	Latte	Uova	Carne	Dolce
calorie	110	160	180	260	420
proteine	4	8	13	14	4
calcio	2	285	54	80	22

I costi (in Euro) e il numero massimo di porzioni tollerate giornalmente sono i seguenti

	Pane	Latte	Uova	Carne	Dolce
costo	2	3	4	19	20
porz.	4	8	3	2	2

Determinare una dieta a costo minimo che soddisfi le prescrizioni richieste.

#### Formulazione.

Poiché si è supposto che le porzioni siano frazionabili ed inoltre valgono le ipotesi di linearità, si può costruire un modello di Programmazione Lineare per rappresentare il problema in analisi.

– *Variabili.* È ovvio introdurre le variabili  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  indicanti le quantità di porzioni dei singoli alimenti da includere giornalmente nella dieta.

– *Funzione obiettivo.* È rappresentata dal costo complessivo ed è quindi data da

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 19x_4 + 20x_5.$$

– *Vincoli.* Poiché sono prescritti i fabbisogni minimi giornalieri, si avranno i seguenti vincoli:

$$\begin{aligned} \text{calorie} &\rightarrow 110x_1 + 160x_2 + 180x_3 + 260x_4 + 420x_5 \geq 2000 \\ \text{proteine} &\rightarrow 4x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 14x_4 + 4x_5 \geq 50 \\ \text{calcio} &\rightarrow 2x_1 + 285x_2 + 54x_3 + 80x_4 + 22x_5 \geq 700 \end{aligned}$$

Inoltre i vincoli sul numero massimo di porzioni giornaliere di ciascun alimento e di non negatività

$$0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 8, 0 \leq x_3 \leq 3, 0 \leq x_4 \leq 2, 0 \leq x_5 \leq 2.$$

La formulazione completa sarà quindi

$$\begin{cases} \min (2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 19x_4 + 20x_5) \\ 110x_1 + 160x_2 + 180x_3 + 260x_4 + 420x_5 \geq 2000 \\ 4x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 14x_4 + 4x_5 \geq 50 \\ 2x_1 + 285x_2 + 54x_3 + 80x_4 + 22x_5 \geq 700 \\ 0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 8, 0 \leq x_3 \leq 3, 0 \leq x_4 \leq 2, 0 \leq x_5 \leq 2. \end{cases}$$

Se inoltre si vuole supporre, ad esempio, che nella dieta sia presente almeno una porzione di dolce e due di latte si dovranno imporre i vincoli  $x_5 \geq 1$  e  $x_2 \geq 2$  da aggiungere alla precedente formulazione. In questo caso, i vincoli già presenti  $x_5 \geq 0$  e  $x_2 \geq 0$  sono ridondanti.  $\square$

#### *Formulazione generale di un problema di miscelazione*

Formalmente, supponiamo di disporre di  $n$  sostanze diverse che indichiamo con  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n$  ciascuna delle quali contenga una certa quantità di ciascuno degli  $m$  componenti utili che indichiamo con  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_m$ . Supponendo che ogni sostanza  $\mathbf{S}_j$  abbia costo unitario  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, n$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \dots & \mathbf{S}_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{array}$$

si desidera ottenere la miscela più economica che soddisfi alcuni requisiti qualitativi, cioè contenga una quantità non inferiore a  $b_i$  di ciascun  $\mathbf{C}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \dots & \mathbf{C}_m \\ b_1 & b_2 & \dots & b_m. \end{array}$$

Si indichi con  $a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  la quantità di componente  $\mathbf{C}_i$  presente nella sostanza  $\mathbf{S}_j$ . Si può così costruire la seguente tabella

	$\mathbf{S}_1$	$\dots$	$\mathbf{S}_j$	$\dots$	$\mathbf{S}_n$
$\mathbf{C}_1$	$a_{11}$	$\dots$	$a_{1j}$	$\dots$	$a_{1n}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{C}_i$	$a_{i1}$	$\dots$	$a_{ij}$	$\dots$	$a_{in}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{C}_m$	$a_{m1}$	$\dots$	$a_{mj}$	$\dots$	$a_{mn}$

### Formulazione.

Supponendo che valgano le ipotesi di proporzionalità, additività ed inoltre assumendo che le quantità di sostanze da utilizzare siano frazionabili, si può formulare questo problema in termini di un problema di Programmazione Lineare.

– *Variabili.* È naturale introdurre le variabili di decisione  $x_1, x_2, \dots, x_n$  rappresentanti la quantità di ciascuna sostanza  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n$  da utilizzare nella miscela. Queste saranno le incognite del problema. Introducendo come spazio delle variabili lo spazio delle  $n$ -uple reali  $\mathbb{R}^n$  si può considerare un  $x \in \mathbb{R}^n$  definendo  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ .

– *Funzione obiettivo.* Per le ipotesi fatte, la funzione obiettivo può essere scritta

$$z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

Introducendo  $c \in \mathbb{R}^n$ , definito  $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ , la funzione obiettivo può essere scritta in notazione vettoriale

$$z = c^T x.$$

– *Vincoli.* Si devono introdurre i seguenti vincoli:

- *Vincoli di qualità.*

Tenendo conto del fatto che la miscela deve contenere una quantità non inferiore a  $b_i$  di ciascun componente  $\mathbf{C}_i$  si dovrà avere

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

- *Vincoli di non negatività.*

Si devono infatti considerare i vincoli di non negatività sulle variabili cioè  $x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$ .

Introducendo la matrice  $(m \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e il vettore  $b = (b_1, \dots, b_m)^T$  la formulazione completa del problema può essere scritta nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Nella pratica, potrebbe essere necessario introdurre ulteriori vincoli:

- possono essere presenti limitazioni superiori o inferiori sulle variabili cioè  $x_j \geq L, x_j \leq M, j = 1, \dots, n$ ;
- se è richiesto anche che la miscela contenga una quantità non superiore ad un valore  $d_i$  di ciascun componente  $\mathbf{C}_i$  si dovrà aggiungere alla formulazione un altro vincolo di qualità:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq d_i, \quad i = 1, \dots, m;$$

- in alcuni casi si richiede che una certa sostanza appartenga alla miscela solo se un'altra sostanza vi appartiene (o non vi appartiene). Questi vincoli richiedono l'uso di variabili booleane come descritto in seguito.

□

**Esempio 3.4.14** *Il prodotto finale di una fabbrica è ottenuto raffinando materie prime grezze e miscelandole insieme. Queste materie prime possono essere di due categorie: naturali e sintetizzate. In particolare, sono disponibili tre materie prime naturali (**N1**, **N2**, **N3**) e due materie prime sintetizzate (**S1**, **S2**). Le materie prime naturali e quelle sintetizzate richiedono differenti linee di produzione. Ogni settimana è possibile raffinare non più di 500 quintali di materie prime naturali e non più di 300 quintali di materie prime sintetizzate. Si assume che non ci sia perdita di peso durante la raffinazione e che si possa trascurare il costo di raffinazione. Inoltre esiste una restrizione tecnologica sulla gradazione del prodotto finale: nell'unità di misura in cui questa gradazione è misurata, essa deve essere tra 2 e 7; si assume che tale gradazione nella miscela finale dipenda linearmente dalle singole gradazioni delle materie prime componenti. Nella tabella che segue è riportato il costo (in euro) per quintale e la gradazione delle materie prime grezze.*

	N1	N2	N3	S1	S2
<b>costo</b>	300	190	250	200	230
<b>grad.</b>	6.0	1.9	8.5	5.0	3.5

Il prodotto finale viene venduto a 350 euro per quintale. Determinare come va pianificata la produzione settimanale per massimizzare il profitto netto.

### Formulazione.

– *Variabili.* Introduciamo le variabili di decisione  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  rappresentanti le quantità (in quintali) di **N1**, **N2**, **N3**, **S1**, **S2** che devono essere comprate e raffinate in una settimana. Inoltre introduciamo una ulteriore variabile  $y$  che indica la quantità di prodotto finale che deve essere fabbricato.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da massimizzare sarà data dal profitto netto cioè da

$$350y - 300x_1 - 190x_2 - 250x_3 - 200x_4 - 230x_5.$$

– *Vincoli.* Sono presenti tre tipi di vincoli

- capacità di raffinamento

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$$

$$x_4 + x_5 \leq 300;$$

- limitazioni sulla gradazione

$$6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 \leq 7y$$

$$6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 \geq 2y;$$

- vincolo di continuità

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = y.$$

Questo vincolo di continuità esprime il fatto che il peso finale del prodotto deve essere uguale alla somma dei pesi degli ingredienti.

Inoltre si devono esplicitare i vincoli di non negatività delle variabili.

La formulazione finale risulta quindi

$$\begin{cases} \max (-300x_1 - 190x_2 - 250x_3 - 200x_4 - 230x_5 + 350y) \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ x_4 + x_5 \leq 300 \\ 6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 - 7y \leq 0 \\ 6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 - 2y \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - y = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

□

**Osservazione 3.4.15** Un errore comune è quello di scrivere i vincoli sulla gradazione

$$6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 \leq 7$$

$$6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 \geq 2.$$

Queste relazioni sono evidentemente dimensionalmente errate: il primo membro ha le dimensioni di *gradazione*  $\times$  *quantità* mentre il secondo membro ha le dimensioni della *gradazione*. Tuttavia, invece delle variabili  $x_i$  in queste due diseguaglianze si potevano usare le variabili  $x_i/y$  per rappresentare le *proporzioni degli ingredienti*, piuttosto che le *quantità assolute*  $x_i$ ; ovviamente, in questo caso si dovevano modificare anche le altre espressioni. Comunque, l'uso delle variabili  $x_i/y$  è ovviamente possibile solo nel caso in cui la quantità di prodotto fabbricato è non nulla, cioè  $y \neq 0$ .

#### *Modelli di input–output*

I modelli di miscelazione possono essere visti come modelli più generali in cui le sostanze  $\mathbf{S}_j$  e i componenti utili  $\mathbf{C}_i$  sono genericamente definiti come “*input*” e “*output*”; per ogni input  $j$  si deve decidere la quantità  $x_j$  da utilizzare incorrendo in un costo  $c_j x_j$  e creando  $a_{ij} x_j$  unità di output  $i$ . Lo scopo è quello di determinare la combinazione a più basso costo di input che fornisce, per ogni output  $i$ , una quantità di unità di output compresa tra valori prefissati. Nei modelli di miscelazione analizzati fino ad ora, gli input sono dati dalle sostanze che devono essere mescolate, gli output sono dati dalle qualità della miscela risultante.

Un esempio di questa generalizzazione è dato dai problemi di *assegnazione di personale a turni* che rappresentano problemi di fondamentale importanza in diversi settori applicativi; in questo caso gli output possono corrispondere alle ore lavorate in un certo giorno  $i$  e, per ogni turno lavorativo  $j$ ,  $a_{ij}$  rappresenta il numero di ore che una persona assegnata al turno  $j$  lavorerà il giorno  $i$  (ponendo  $a_{ij} = 0$  se la persona assegnata al turno  $j$  non lavora il giorno  $i$ ); le  $c_j$  rappresentano il salario di una persona assegnata al turno  $j$  e  $x_j$  il numero di persone assegnate a quel turno. In questo contesto, la funzione obiettivo diventa il costo totale dei salari mensile, mentre i vincoli diventano quelli dovuti al fatto che ogni giorno  $i$ , il numero totale di ore lavorative fornite dalle persone che lavorano quel giorno deve essere pari ad almeno un valore prefissato  $b_i$ . Supponendo di voler considerare  $n$  giorni e  $m$  possibili turni, un modello di Programmazione Lineare che rappresenti questa situazione è dato da

$$\min \quad c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\
 a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\
 \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\
 a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &\geq b_m \\
 x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

In questo caso però, a differenza degli altri casi di miscelazione visti fino ad ora, l'assunzione di continuità delle variabili non è molto plausibile e potrebbe risultare necessario introdurre il vincolo di interezza sulle variabili.

Il concetto di modello di “input–output” fu una delle prime applicazioni della Programmazione Lineare nelle analisi economiche.

Si riporta, di seguito, un semplice esempio di assegnamento di personale a turni di lavoro.

**Esempio 3.4.16** *Un catena di ristoranti opera sette giorni alla settimana e richiede il seguente numero minimo di camerieri:*

Lun.	Mar.	Mer.	Giov.	Ven.	Sab.	Dom.
52	50	47	55	70	40	40

Ciascun cameriere lavora seguendo turni così definiti: cinque giorni lavorativi ogni settimana e due di riposo; inoltre sono possibili al più quattro giorni consecutivi di lavoro seguiti da uno di riposo; inoltre uno solo dei due giorni del fine settimana (sabato o domenica) deve far parte del turno di lavoro. I turni risultanti sono sei e sono schematizzati nella tabella che segue (dove “L” indica giornata lavorativa e “R” riposo):

TURNI:	1 <sup>o</sup>	2 <sup>o</sup>	3 <sup>o</sup>	4 <sup>o</sup>	5 <sup>o</sup>	6 <sup>o</sup>	7 <sup>o</sup>	8 <sup>o</sup>
<b>Lun.</b>	L	R	L	L	L	L	L	L
<b>Mar.</b>	L	L	R	L	L	R	L	L
<b>Mer.</b>	L	L	L	R	L	L	R	L
<b>Giov.</b>	L	L	L	L	R	L	L	R
<b>Ven.</b>	R	L	L	L	L	L	L	L
<b>Sab.</b>	L	R	L	R	L	R	L	R
<b>Dom.</b>	R	L	R	L	R	L	R	L

Il salario settimanale di un cameriere è pari a 250 Euro se assegnato ad un turno che non comprende la domenica, mentre è pari a 270 Euro se il turno comprende anche la domenica. Il gestore di questa catena di ristoranti vuole minimizzare il costo che deve sostenere per retribuire i camerieri in modo da soddisfare le richieste giornaliere.

### Formulazione.

– *Variabili.* Si associano le variabili di decisione  $x_j$  al numero di camerieri assegnati al turno  $j$ ,  $j = 1, \dots, 8$ .

– *Funzione obiettivo.* È data dal salario complessivo dei camerieri e quindi può essere espressa nella forma

$$250x_1 + 270x_2 + 250x_3 + 270x_4 + 250x_5 + 270x_6 + 250x_7 + 270x_8.$$

– *Vincoli.* I vincoli sono dovuti al fatto che ogni giorno c'è una richiesta minima di camerieri. Osservando ogni giorno quale turno prevede il lavoro o il riposo si ottengono i seguenti vincoli

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &\geq 52 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_7 + x_8 &\geq 50 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 &\geq 47 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 &\geq 55 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &\geq 70 \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_7 &\geq 40 \\ x_2 + x_4 + x_6 + x_8 &\geq 40 \end{aligned}$$

Si deve inoltre esplicitare la non negatività delle variabili  $x_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, 8$  e l'interezza  $x_j \in \mathbf{Z}$ ,  $j = 1, \dots, 8$ .

La formulazione completa sarà quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} \min (250x_1 + 270x_2 + 250x_3 + 270x_4 + 250x_5 + 270x_6 + 250x_7 + 270x_8) \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 52 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_7 + x_8 \geq 50 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 \geq 47 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 \geq 55 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 70 \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_7 \geq 40 \\ x_2 + x_4 + x_6 + x_8 \geq 40 \\ x_j \geq 0, x_j \in \mathbf{Z}, \quad i = 1, \dots, 8 \end{array} \right.$$

□

È chiaramente riconoscibile questa formulazione come un modello di miscelazione; è sufficiente, infatti, introdurre la matrice  $A$  che definisce i vincoli di un problema di miscelazione nel seguente modo:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se nel posto } (i, j) \text{ della tabella c'è la lettera "L"} \\ 0 & \text{se nel posto } (i, j) \text{ della tabella c'è la lettera "R".} \end{cases}$$

### 3.4.3 Modelli di trasporto

Si tratta di problemi in cui si hanno un certo numero di località (origini) ciascuna delle quali ha una quantità fissata di merce disponibile e un certo numero di clienti residenti in altre località (destinazioni) i quali richiedono quantitativi precisi di merce. Quindi conoscendo il costo unitario del trasporto della merce da ciascuna località origine a ciascuna località destinazione è necessario pianificare i trasporti, cioè la quantità di merce che deve essere trasportata da ciascuna località origine a ciascuna località destinazione in modo da soddisfare l'ordine dei clienti minimizzando il costo complessivo derivante dai trasporti.

**Esempio 3.4.17** *Un'industria dell'acciaio dispone di due miniere  $M_1$  e  $M_2$  e di tre impianti di produzione  $P_1$   $P_2$   $P_3$ . Il minerale estratto deve essere giornalmente trasportato agli impianti di produzione soddisfacendo le rispettive richieste. Le miniere  $M_1$  e  $M_2$  producono giornalmente rispettivamente 130 e 200 tonnellate di minerale. Gli impianti richiedono giornalmente le seguenti quantità (in tonnellate) di minerale*

$P_1$	$P_2$	$P_3$
80	100	150

*Il costo (in euro) del trasporto da ciascuna miniera a ciascun impianto di produzione di una tonnellata di minerale è riportato nella seguente tabella*

	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$M_1$	10	8	21
$M_2$	12	20	14

*Formulare un modello che descriva il trasporto dalle miniere agli impianti di produzione in modo da minimizzare il costo globale del trasporto.*

#### Analisi del problema.

È un problema di trasporti con 2 origini ( $M_1$ ,  $M_2$ ) e 3 destinazioni ( $P_1$   $P_2$   $P_3$ ). Si noti che risulta  $130 + 200 = 330$  e  $80 + 100 + 150 = 330$ , ovvero la somma delle disponibilità uguaglia la somma delle richieste.

#### Formulazione.

– *Variabili.* Associamo le variabili di decisione alle quantità di minerale che deve essere trasportato; indichiamo con  $x_{ij}$   $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, 3$ , le quantità (in tonnellate) di minerale da trasportare giornalmente da ciascuna miniera  $M_i$  a ciascun impianto di produzione  $P_j$ .

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è data dalla somma dei costi dei trasporti cioè da

$$z = 10x_{11} + 8x_{12} + 21x_{13} + 12x_{21} + 20x_{22} + 14x_{23}.$$

– *Vincoli.* I vincoli di origine esprimono il fatto che la somma della quantità di minerale trasportato dalla miniera  $\mathbf{M}_i$  deve essere uguale alla disponibilità giornaliera della miniera stessa:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 130 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 200. \end{aligned}$$

I vincoli di destinazione esprimono il fatto che la somma delle quantità di minerale trasportato all'impianto di produzione  $\mathbf{P}_j$  deve essere pari alla richiesta giornaliera di tale impianto:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 80 \\ x_{12} + x_{22} &= 100 \\ x_{13} + x_{23} &= 150. \end{aligned}$$

Infine si devono considerare i vincoli di non negatività  $x_{ij} \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

La formulazione completa è quindi

$$\begin{cases} \min (10x_{11} + 8x_{12} + 21x_{13} + 12x_{21} + 20x_{22} + 14x_{23}) \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 130 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 200 \\ x_{11} + x_{21} = 80 \\ x_{12} + x_{22} = 100 \\ x_{13} + x_{23} = 150 \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

□

#### Formulazione generale di un problema di trasporti

Sono definite  $m$  località *origini* indicate con  $\mathbf{O}_1, \dots, \mathbf{O}_m$ , e  $n$  località *destinazioni* indicate con  $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_n$ . Ogni origine  $\mathbf{O}_i$ , ( $i = 1, \dots, m$ ) può fornire una certa disponibilità  $a_i \geq 0$  di merce che deve essere trasferita dalle origini alle destinazioni

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{O}_1 & \dots & \mathbf{O}_m \\ a_1 & \dots & a_m. \end{array}$$

Ad ogni destinazione  $\mathbf{D}_j$ , ( $j = 1, \dots, n$ ) è richiesta una quantità  $b_j \geq 0$  di merce.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D}_1 & \dots & \mathbf{D}_n \\ b_1 & \dots & b_n. \end{array}$$

Supponiamo che il costo del trasporto di una unità di merce da  $\mathbf{O}_i$  a  $\mathbf{D}_j$  sia pari a  $c_{ij}$ . Tali costi nella realtà sono spesso collegati alle distanze tra origini e destinazioni.

Il problema consiste nel pianificare i trasporti in modo da soddisfare le richieste delle destinazioni minimizzando il costo del trasporto complessivo nella seguente ipotesi:

- la disponibilità complessiva uguaglia la richiesta complessiva, cioè

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j; \quad (3.4.1)$$

si escludono possibilità di giacenze nelle origini, cioè tutta la merce prodotta in una origine deve essere trasportata in una delle destinazioni; si escludono possibilità di giacenze nelle destinazioni, cioè la quantità totale che arriva in una destinazione  $\mathbf{D}_j$  deve uguagliare la richiesta  $b_j$ .

### Formulazione.

Si vuole dare una formulazione del problema in esame in termini di un problema di programmazione lineare supponendo quindi che siano verificate le ipotesi di linearità e continuità.

– *Variabili.* Per ogni coppia di origine e destinazione  $\mathbf{O}_i$ ,  $\mathbf{D}_j$  si introducono le variabili di decisione  $x_{ij}$  rappresentanti la quantità di merce da trasportare da  $\mathbf{O}_i$  a  $\mathbf{D}_j$ . Si tratta di  $mn$  variabili

	$\mathbf{D}_1$	...	$\mathbf{D}_j$	...	$\mathbf{D}_n$
$\mathbf{O}_1$	$x_{11}$	...	$x_{1j}$	...	$x_{1n}$
⋮	⋮		⋮		⋮
$\mathbf{O}_i$	$x_{i1}$	...	$x_{ij}$	...	$x_{in}$
⋮	⋮		⋮		⋮
$\mathbf{O}_m$	$x_{m1}$	...	$x_{mj}$	...	$x_{mn}$

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare sarà data da costo totale del trasporto e quindi da

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

– *Vincoli.* Per le ipotesi fatte, si avranno due tipi di vincoli:

- vincoli di origine

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m; \quad (3.4.2)$$

impongono che tutta la merce prodotta in una origine sia trasportata alle destinazioni; si tratta di  $m$  vincoli;

- vincoli di destinazione

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n; \quad (3.4.3)$$

impongono che la quantità totale di merce che arriva in ciascuna delle destinazioni uguaglia la richiesta; si tratta di  $n$  vincoli.

Si devono infine considerare i vincoli di non negatività delle variabili

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m.$$

Si è così ottenuta una formulazione del problema dei trasporti con  $mn$  variabili e  $m + n + mn$  vincoli:

$$\begin{cases} \min \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \right) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.4.4)$$

**Osservazione 3.4.18** È chiaro che per le ipotesi fatte dovrà risultare

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Esaminiamo, ora, un risultato che è una condizione necessaria e sufficiente affinché un generico problema dei trasporti scritto nella forma (3.4.4) con  $a_i \geq 0$  e  $b_j \geq 0$  abbia soluzione; tale risultato chiarisce perché nella formulazione classica del problema dei trasporti si adotta l'ipotesi (3.4.1) cioè che la disponibilità complessiva uguaglia la richiesta complessiva.

**Teorema 3.4.1** Condizione necessaria e sufficiente affinché esista una soluzione ammissibile per problema (3.4.4), è che risulti

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (3.4.5)$$

*Dimostrazione:* Dimostriamo innanzitutto la necessità, cioè che se esiste una soluzione ammissibile che denotiamo con  $\bar{x}_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , allora la condizione (3.4.5) deve essere verificata; poiché  $\bar{x}_{ij}$  deve soddisfare i vincoli, dalle equazioni dei vincoli nella (3.4.4) si ottiene

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j,$$

e sottraendo membro a membro si ha

$$\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j = 0$$

che è la (3.4.5).

Dimostriamo ora la sufficienza; supponiamo quindi che valga la (3.4.5) e poniamo

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = A.$$

Si vuole allora dimostrare che esiste una soluzione ammissibile; infatti, sia  $\bar{x}_{ij} := \frac{a_i b_j}{A}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ; allora  $\bar{x}_{ij}$  ora definito è una soluzione ammissibile per il problema dei trasporti. Infatti risulta innanzitutto  $\bar{x}_{ij} \geq 0$  per ogni  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$  per la non negatività degli  $a_i$  e dei  $b_j$ ; inoltre

$$\sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i \sum_{j=1}^n b_j}{A} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j \sum_{i=1}^m a_i}{A} = b_j$$

e quindi  $\bar{x}_{ij}$  soddisfando i vincoli del problema è una soluzione ammissibile.  $\square$

Il teorema appena dimostrato garantisce quindi che, se è soddisfatta l'ipotesi (3.4.1) allora il problema dei trasporti ammette sempre soluzione.

**Osservazione 3.4.19** La soluzione ammissibile del teorema, ovviamente, *non è l'unica soluzione* ammissibile del problema.

Riportiamo di seguito, senza dimostrazione, un altro risultato di fondamentale importanza nella trattazione del problema dei trasporti.

**Teorema 3.4.2** *Se nel problema dei trasporti le  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  e le  $b_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  sono intere e se il problema ammette soluzione ottima, allora ha una soluzione ottima intera.*

Passiamo, ora, ad analizzare alcune varianti della formulazione classica del problema dei trasporti; può infatti accadere che non tutte le rotte di trasporto siano disponibili: se non è possibile il trasporto da una certa origine  $\mathbf{O}_i$  ad una destinazione  $\mathbf{D}_j$  si pone, per convenzione,  $c_{ij} = \infty$ . Oppure possono esistere rotte di trasporto in cui vi sono limitazioni sulle quantità massima di merci trasportabili. Infine, si può supporre che la disponibilità complessiva possa essere superiore alla domanda cioè

$$\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j. \quad (3.4.6)$$

In tal caso, possono essere ammesse giacenze nelle origini e/o nelle destinazioni; se si accetta di avere giacenze nelle origini, allora i vincoli di origine diventano

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, m;$$

se si accetta di avere giacenze nelle destinazioni, allora i vincoli di destinazione diventano

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad j = 1, \dots, n.$$

nel caso in cui vale la (3.4.6), per porre il problema dei trasporti nella sua formulazione classica, cioè con vincoli di uguaglianza, si può introdurre una destinazione fittizia che abbia una richiesta pari a

$$\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

ponendo uguale a zero il costo per raggiungere questa destinazione fittizia da qualsiasi origine.

# 4

## *Introduzione alla Programmazione Lineare*

In questo capitolo esaminiamo in modo dettagliato la struttura di un problema di Programmazione Lineare fornendo, in particolare, la rappresentazione geometrica di un problema di Programmazione Lineare in due variabili e quindi rappresentabile sul piano cartesiano. Grazie ad essa, dedurremo, per via geometrica, alcune importanti caratteristiche sia dell'insieme ammissibile, sia della soluzione ottima che suggeriranno anche i primi rudimenti per un metodo di soluzione. Queste caratteristiche saranno poi oggetto di una rigorosa formalizzazione nel caso di un generale problema di Programmazione Lineare in  $n$  variabili nei capitoli che seguono.

### 4.1 INTRODUZIONE

La Programmazione Lineare è indubbiamente l'argomento centrale dell'Ottimizzazione e fra i vari modelli della Ricerca Operativa, la Programmazione Lineare è quello che viene più ampiamente utilizzato. Infatti, la PL non solo si applica a numerosi problemi reali che hanno di per sé una struttura lineare, ma è anche un importante strumento di supporto nell'analisi e nella risoluzione di problemi di programmazione matematica più complessi.

Il padre della PL viene comunemente, e giustamente, indicato in George Dantzig che per primo ne ideò, nel 1947, un algoritmo risolutivo (il metodo del Simplex, che verrà esaminato nel seguito). Tuttavia, alcuni dei concetti fondamentali della programmazione lineare possono essere fatti risalire molto più indietro nel tempo. Già Fourier, nel 1827, aveva studiato come trovare soluzioni ammissibili di un sistema di diseguaglianze lineari; un metodo di calcolo destinato a minimizzare

gli errori d'osservazione e dovuto a Vallée Poussin (1910) presenta lati simili al metodo del simplesso; infine lavori di von Neumann degli anni venti e trenta, sulla teoria dei giochi e su alcuni modelli economici, sono antecedenti diretti del lavoro di Dantzig. Nel 1939, poi, il matematico sovietico Kantorovich aveva pubblicato (in russo) una monografia sulla programmazione della produzione che anticipa, sotto molti aspetti importanti, i temi trattati da Dantzig. Purtroppo questo lavoro fu a lungo ignorato in Occidente essendo riscoperto solo venti anni dopo, quando la PL aveva avuto un grande sviluppo.

Ancora prima della pubblicazione dello studio di Kantorovich, Leontief (1932) aveva presentato il suo lavoro fondamentale, in cui si proponeva una struttura matriciale (*Interindustry Input-Output model*) per lo studio dell'economia americana. Per questo modello Leontief vinse il Premio Nobel per l'Economia nel 1976.

La caratteristica di tutti i lavori antecedenti quelli di Dantzig era uno scarso interesse verso l'applicabilità pratica, dovuta principalmente all'impossibilità di effettuare i calcoli necessari. Il metodo del Simplex proposto da Dantzig si rivelò invece efficiente in pratica e questo, unitamente al simultaneo avvento dei calcolatori elettronici, decretò il successo della Programmazione Lineare e, con esso, l'inizio dello sviluppo rigoglioso della Ricerca Operativa.

## 4.2 STRUTTURA DI UN PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Come abbiamo già visto nel paragrafo 3.1 un problema di Programmazione Lineare è caratterizzato da una funzione obiettivo lineare (da minimizzare o massimizzare) della forma

$$f(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j$$

e da un numero finito  $m$  di vincoli lineari della forma

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + & \dots & + a_{2n}x_n & \geq b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n & \geq b_m. \end{array} \quad (4.2.1)$$

Ricordiamo inoltre che, introducendo il vettore  $c \in \mathbb{R}^n$ , definito  $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  definito  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ , il vettore  $b = (b_1, \dots, b_m)^T$  e la matrice  $(m \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

un generico problema di Programmazione Lineare può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases}$$

Si osservi che, indicando con  $a_i^T$ ,  $i = 1, \dots, m$ , le righe della matrice  $A$ , ciascun vincolo del problema, ovvero ciascuna diseguaglianza della (4.2.1) può essere scritto nella forma  $a_i^T x \geq b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

### 4.3 INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DI UN PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

In questo paragrafo si vuole fornire una interpretazione geometrica di un problema di Programmazione Lineare. In particolare, quando un problema di Programmazione Lineare contiene solamente due variabili, si può rappresentare efficacemente il problema sul piano cartesiano e si può determinare una sua soluzione in maniera elementare con semplici deduzioni geometriche. Le situazioni che verranno presentate nel seguito vogliono rappresentare un punto di partenza intuitivo per la trattazione di problemi di Programmazione Lineare in  $n$  variabili; i risultati che verranno dedotti per via elementare nel caso bidimensionale trovano, infatti, una generalizzazione consistente nel caso di un generico problema di Programmazione Lineare.

A questo scopo verranno considerati due esempi di problemi di Programmazione Lineare già ottenuti come formulazione di un semplice problema di allocazione ottima di risorse (Esempio 3.4.1) e di un semplice problema di miscelazione (Esempio 3.4.12).

#### 4.3.1 Rappresentazione di vincoli lineari

Preliminarmente, si richiama il fatto che sul piano cartesiano  $Ox_1x_2$  l'equazione

$$a_1x_1 + a_2x_2 = c \quad (4.3.1)$$

rappresenta una retta che partiziona il piano in due semipiani. Ciascun semipiano è caratterizzato da punti  $P(x_1, x_2)$  che soddisfano la disequazione  $a_1x_1 + a_2x_2 \geq c$  oppure la disequazione  $a_1x_1 + a_2x_2 \leq c$ . Quindi ogni disequazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq c \quad \text{oppure} \quad a_1x_1 + a_2x_2 \leq c$$

individua univocamente un semipiano. Si riporta, ora, un semplice risultato geometrico che verrà utilizzato nel seguito.

**Lemma 4.3.1** *Si considera una famiglia di rette parallele*

$$a_1x_1 + a_2x_2 = c \quad (4.3.2)$$

*con  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  fissati e con  $c \in \mathbb{R}$ . Il vettore  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  individua una direzione ortogonale alle rette della famiglia (4.3.2) ed è orientato dalla parte in cui sono le rette della famiglia ottenute per valori crescenti della  $c$ , cioè verso il semipiano in cui risulta  $a_1x_1 + a_2x_2 \geq c$ .*

*Dimostrazione:* Sia  $x$  un vettore di componenti  $x_1$  e  $x_2$ . La famiglia di rette (4.3.2) può essere scritta in forma vettoriale

$$a^T x = c.$$

Siano ora  $\bar{x}$  e  $\bar{z}$  due punti appartenenti alla retta  $a^T x = c$ . Risulta quindi

$$a^T \bar{z} = c \quad \text{e} \quad a^T \bar{x} = c$$

e sottraendo membro a membro queste due uguaglianze si ottiene

$$a^T (\bar{z} - \bar{x}) = 0.$$

Quindi il vettore  $a$  è ortogonale al vettore  $\bar{z} - \bar{x}$  che individua la direzione della famiglia di rette cioè il vettore  $a$  rappresenta una direzione ortogonale alla famiglia di rette (4.3.2).

Si consideri ora un punto  $\bar{x} = (x_1, x_2)^T$  appartenente alla retta  $a^T x = c$  e un punto  $\bar{y} = (y_1, y_2)^T$  tale che  $a^T y \geq c$ . Si vuole dimostrare che il punto  $\bar{y}$  appartiene al semipiano individuato dalla retta  $a^T x = c$  verso il quale è orientato il vettore  $a$ . Infatti, per le ipotesi fatte, si ha

$$a^T \bar{y} \geq c \quad \text{e} \quad a^T \bar{x} = c$$

e sottraendo membro a membro queste due relazioni si ottiene

$$a^T (\bar{y} - \bar{x}) \geq 0$$

e questo significa che l'angolo  $\theta$  che il vettore  $\bar{y} - \bar{x}$  forma con il vettore  $a$  deve essere acuto e quindi il vettore  $a$  deve essere orientato verso il semipiano ove si trova il punto  $\bar{y}$ , cioè il semipiano individuato dalla diseguaglianza  $a^T x \geq c$ . (Figura 4.3.1)  $\square$

Come esempio del risultato riportato dal lemma appena dimostrato, si consideri la diseguaglianza lineare  $3x_1 + x_2 \geq 6$ . Il vettore  $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  individua una direzione

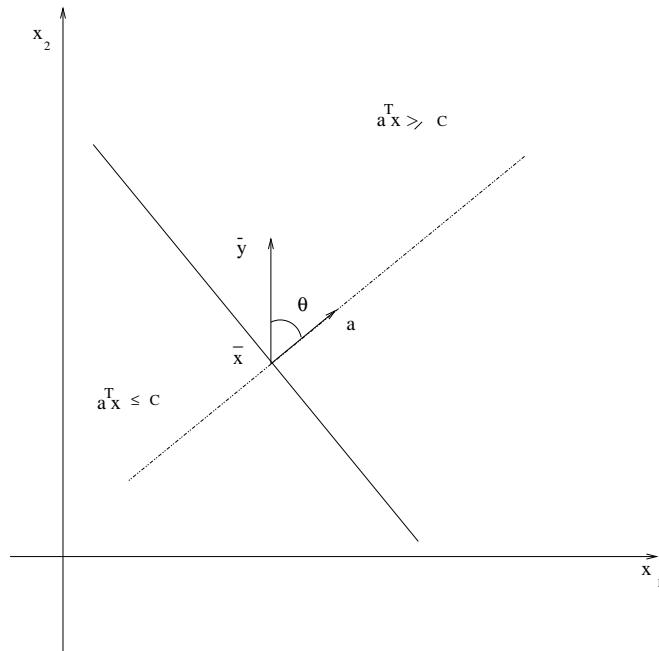


Figura 4.3.1 Interpretazione geometrica del Lemma 4.3.1

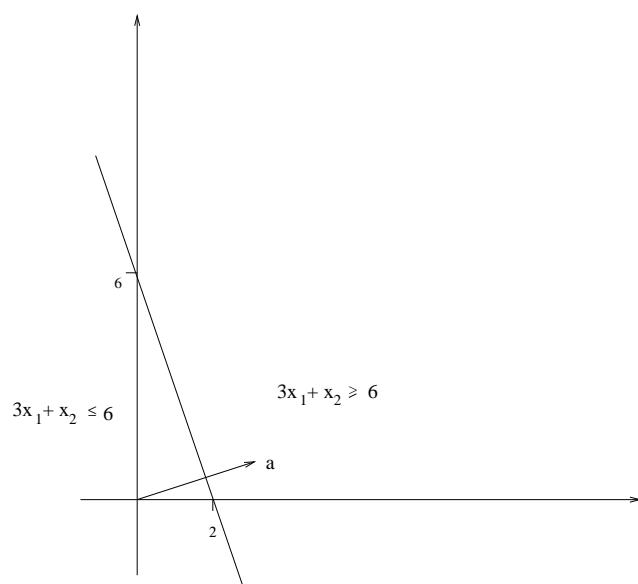


Figura 4.3.2 Rappresentazione del vincolo lineare  $3x_1 + x_2 \geq 6$

ortogonale alla retta  $3x_1 + x_2 = 6$  ed è orientato verso il semipiano individuato dalla disuguaglianza  $3x_1 + x_2 \geq 6$  (Figura 4.3.2).

Nella pratica, per determinare quale dei due semipiani è individuato dalla disuguaglianza lineare  $a_1x_1 + a_2x_2 \geq c$  si può procedere semplicemente in questo modo: dopo aver rappresentato la retta  $a_1x_1 + a_2x_2 = c$  per individuare qual è il semipiano di interesse, si può scegliere un punto  $P$  del piano (l'origine degli assi è il più semplice) e valutare l'espressione  $a_1x_1 + a_2x_2$  in questo punto; se il valore così ottenuto è maggiore o uguale di  $c$  allora il semipiano individuato dalla disuguaglianza lineare  $a_1x_1 + a_2x_2 \geq c$  è quello contenente il punto  $P$ ; in caso contrario è quello opposto.

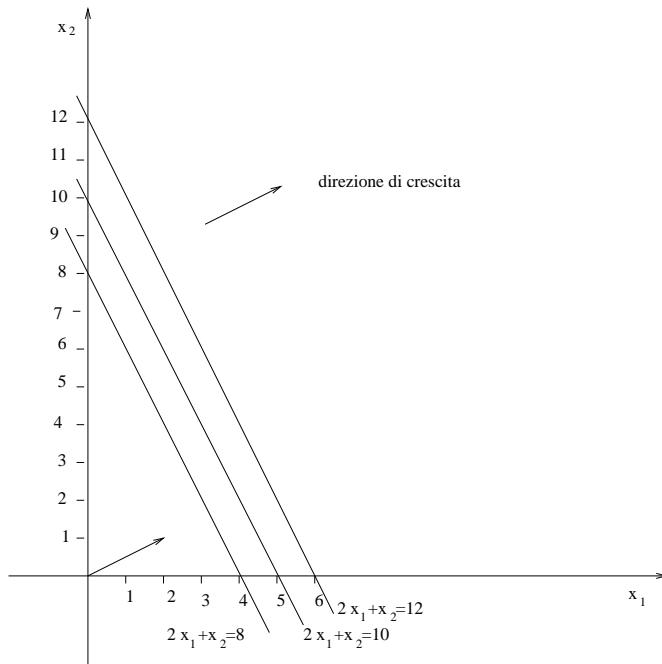
### 4.3.2 Rappresentazione di funzioni obiettivo lineari

Quanto esposto nel paragrafo precedente è utile anche per esaminare la variazione di una funzione lineare che rappresenta la funzione obiettivo di un problema di Programmazione Lineare. In due variabili, la funzione obiettivo di un problema di Programma Lineare è un'espressione del tipo  $c_1x_1 + c_2x_2$  da massimizzare o da minimizzare. Per rappresentare questa funzione obiettivo su un piano cartesiano  $Ox_1x_2$  si considera la famiglia di rette parallele

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C \quad (4.3.3)$$

ottenuta al variare di  $C$ , che rappresentano le *curve di livello* della funzione  $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$  che ovviamente in questo caso sono rette. Se il problema è di minimizzazione, si cercherà di ottenere un valore più basso possibile per la  $C$  in corrispondenza di valori ammissibili per  $x_1$  e  $x_2$ ; viceversa, se il problema è di massimizzazione, si cercherà ottenere un valore più alto possibile per la  $C$ . Sulla base di quanto esposto nel paragrafo precedente, valori superiori della  $C$  si determinano traslando le rette nel verso individuato dal vettore  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  che rappresenta, quindi, una *direzione di crescita* per la funzione  $c_1x_1 + c_2x_2$ . Ovviamente, la direzione opposta sarà una *direzione di decrescita*.

Quindi, geometricamente, un problema di massimizzazione consisterà nel considerare la traslazione nel verso della direzione di crescita della funzione obiettivo, mentre in un problema di minimizzazione si considera la traslazione nel verso opposto (Figura 4.3.3)

Figura 4.3.3 Rette di livello della funzione  $2x_1 + x_2$ 

### 4.3.3 Esempi di risoluzione grafica

#### Esempio 4.3.2

Si consideri ora il problema di allocazione ottima di risorse dell'Esempio 3.4.1 che è rappresentato dal seguente problema di Programazione Lineare:

$$\begin{cases} \max (7x_1 + 10x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 750 \\ x_1 + 2x_2 \leq 1000 \\ x_2 \leq 400 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Sul piano cartesiano  $Ox_1x_2$  ciascun vincolo individua un semipiano. In particolare, in Figura 4.3.4 è evidenziato il semipiano individuato dal primo vincolo  $x_1 + x_2 \leq 750$ .

In Figura 4.3.5 è evidenziato il semipiano individuato dal secondo vincolo  $x_1 + 2x_2 \leq 1000$ .

Infine in Figura 4.3.6 è evidenziato il semipiano individuato dal terzo vincolo  $x_2 \leq 400$ .

Ovviamente i vincoli di non negatività delle variabili  $x_1 \geq 0$  e  $x_2 \geq 0$  rappresentano rispettivamente il semipiano delle ascisse non negative e il semipiano delle ordinate non negative.

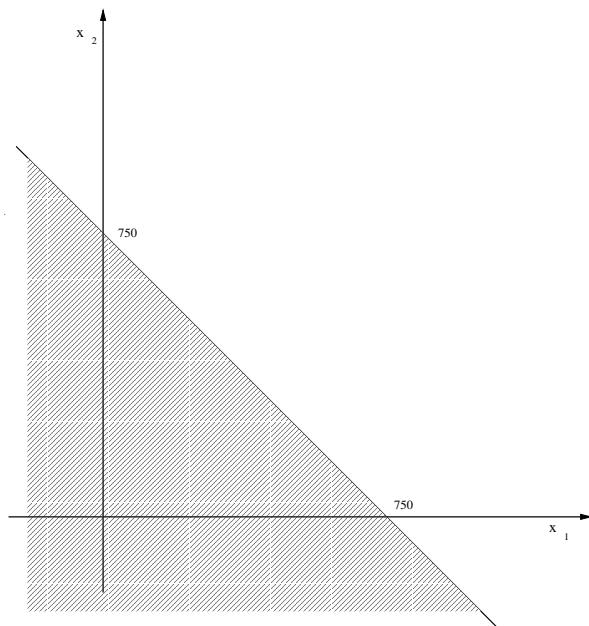


Figura 4.3.4 Semipiano individuato dal vincolo  $x_1 + x_2 \leq 750$

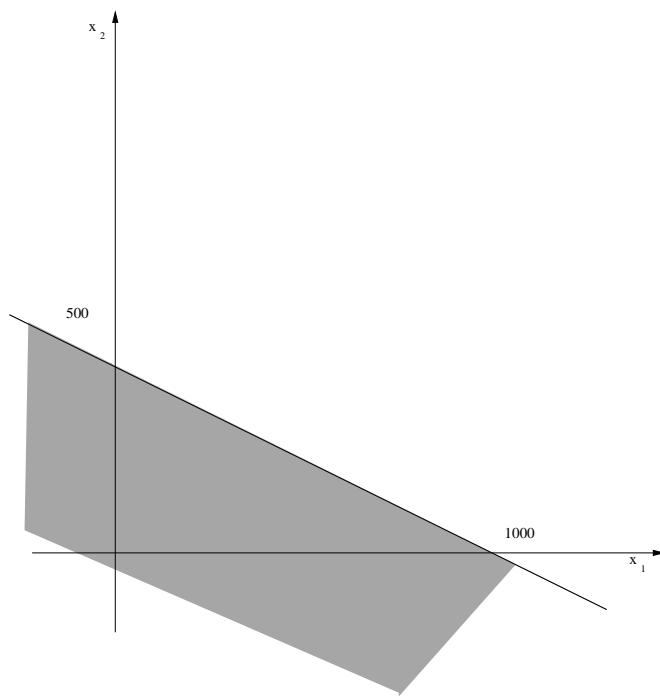


Figura 4.3.5 Semipiano individuato dal vincolo  $x_1 + 2x_2 \leq 1000$

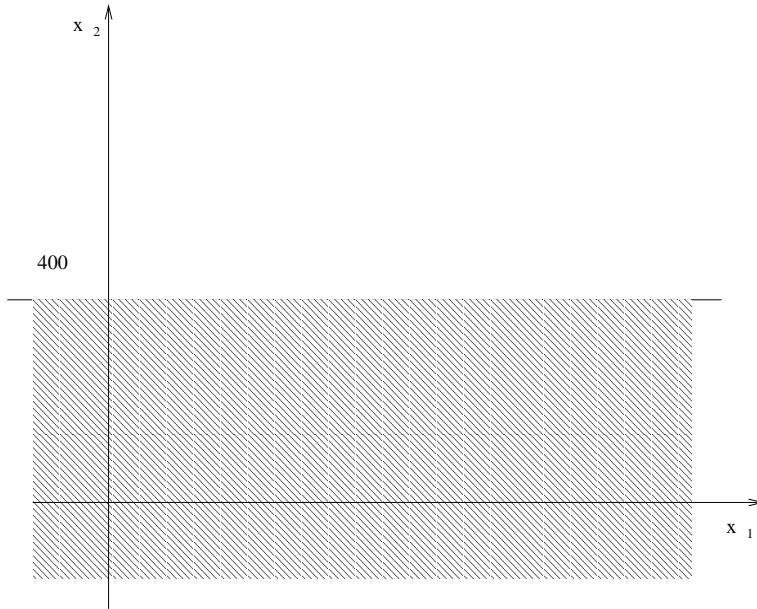


Figura 4.3.6 Semipiano individuato dal vincolo  $x_2 \leq 400$

L'insieme ammissibile del problema di Programmazione Lineare che stiamo esaminando è dato quindi dall'intersezione di tali semipiani e si può indicare con

$$S = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 750, x_1 + 2x_2 \leq 1000, x_2 \leq 400, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}.$$

Tale regione di piano prende nome di *regione ammissibile*, è un insieme convesso ed è rappresentato in Figura 4.3.7.

Tutti i punti  $P(x_1, x_2)$  appartenenti a questa regione sono punti dell'insieme ammissibile del problema e quindi tutti i punti di questa regione costituiscono soluzioni ammissibili del problema.

Si consideri ora la funzione obiettivo  $7x_1 + 10x_2$  e si consideri la famiglia di rette

$$7x_1 + 10x_2 = C$$

ottenute al variare del parametro  $C$ . Esse costituiscono le curve di livello della funzione in due variabili  $f(x_1, x_2) = 7x_1 + 10x_2$  che sono ovviamente delle rette come rappresentato in Figura 4.3.8.

In riferimento al problema di allocazione ottima rappresentato dal problema di Programmazione Lineare che stiamo esaminando, il parametro  $C$  rappresenta il profitto totale che deve essere massimizzato. Per  $C = 0$  si ottiene la linea di livello passante per l'origine del piano  $Ox_1x_2$ . Ovviamente, scegliendo  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$  (che è un punto ammissibile in quanto  $(0, 0) \in S$ ) si ottiene il profitto

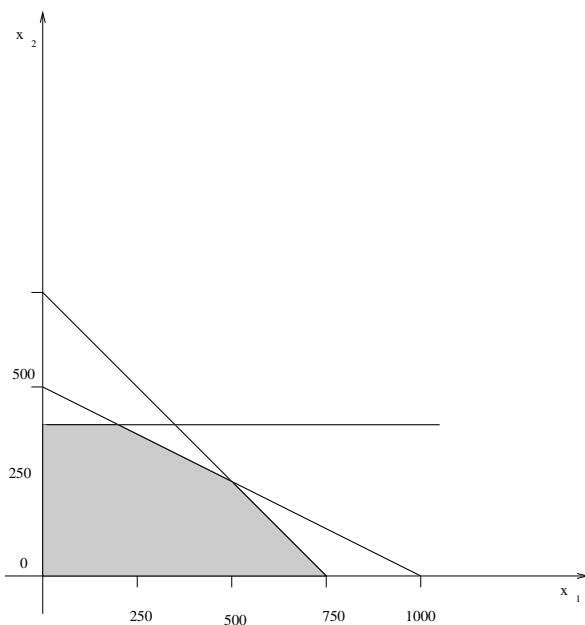


Figura 4.3.7 La regione ammissibile  $S$

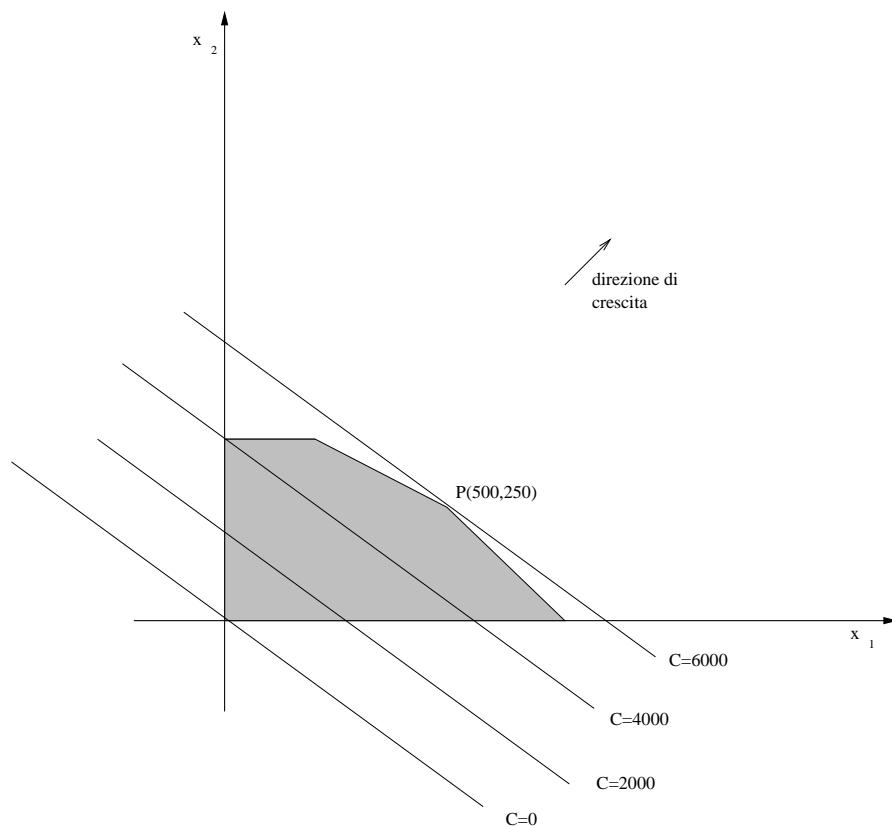


Figura 4.3.8 Curve di livello della funzione  $f(x_1, x_2) = 7x_1 + 10x_2$  e punto di ottimo

totale nullo. All'aumentare del valore di tale profitto, cioè all'aumentare del valore della costante  $C$ , graficamente si ottengono rette parallele alla retta di livello passante per l'origine traslate nella direzione di crescita della funzione  $7x_1 + 10x_2$  data dal vettore  $\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$  (Figura 4.3.8). Poiché si desidera massimizzare la funzione obiettivo, si cercherà di raggiungere il valore più alto per la  $C$  ottenuto scegliendo per  $x_1$  e  $x_2$  valori ammissibili cioè tali che  $(x_1, x_2) \in S$ . Osservando la rappresentazione grafica della regione ammissibile  $S$  si deduce che all'aumentare di  $C$ , le rette di livello della funzione obiettivo intersecano la regione ammissibile finché  $C \leq 6000$ . Tale valore è ottenuto per  $x_1 = 500$  e  $x_2 = 250$  e non esistono altri punti della regione ammissibile in cui la funzione obiettivo assume valori maggiori. Il valore 6000 è, quindi, il massimo valore che la funzione obiettivo può raggiungere soddisfacendo i vincoli. Tale soluzione ottima è raggiunta in corrispondenza del punto  $P$  di coordinate  $(x_1, x_2) = (500, 250)$ ; tale punto non è un punto qualsiasi, ma costituisce quello che nella geometria piana viene detto vertice del poligono convesso che delimita la regione ammissibile. Il fatto che l'ottimo del problema è raggiunto in corrispondenza di un vertice della regione ammissibile non è casuale, ma come si vedrà in seguito, è una caratteristica fondamentale di un generico problema di Programmazione Lineare. Si osservi fin d'ora che la frontiera della regione ammissibile è definita dalle rette

$$x_1 + x_2 = 750, \quad x_1 + 2x_2 = 1000, \quad x_2 = 400, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

e che ogni intersezione di due di queste rette è un vertice della regione ammissibile; il numero di queste possibili intersezioni (non tutte necessariamente appartenenti alla regione ammissibile) è ovviamente pari al più a 10. Si osservi, infine, che nel punto di ottimo sono attivi i vincoli  $x_1 + x_2 \leq 750$  e  $x_1 + 2x_2 \leq 1000$  mentre non è attivo il vincolo  $x_2 \leq 400$ .

Nel caso particolare che abbiamo esaminando, la soluzione ottima determinata è unica, ma in generale può accadere che le rette di livello della funzione obiettivo siano parallele ad un segmento del perimetro del poligono che delimita la regione ammissibile; in questo caso potrebbe accadere che esistano più punti ammissibili in cui la funzione assume lo stesso valore ottimo e quindi la soluzione non sarebbe più unica; nel problema in esame, ciò accadrebbe, ad esempio, se la funzione obiettivo fosse  $cx_1 + 2cx_2$  con  $c$  costante reale positiva (Figura 4.3.9); infatti, tutti i punti del segmento  $\overline{AB}$  rappresentano soluzioni ottime. Tuttavia, anche in questo caso si può sempre trovare un vertice che costituisce una soluzione ottima.

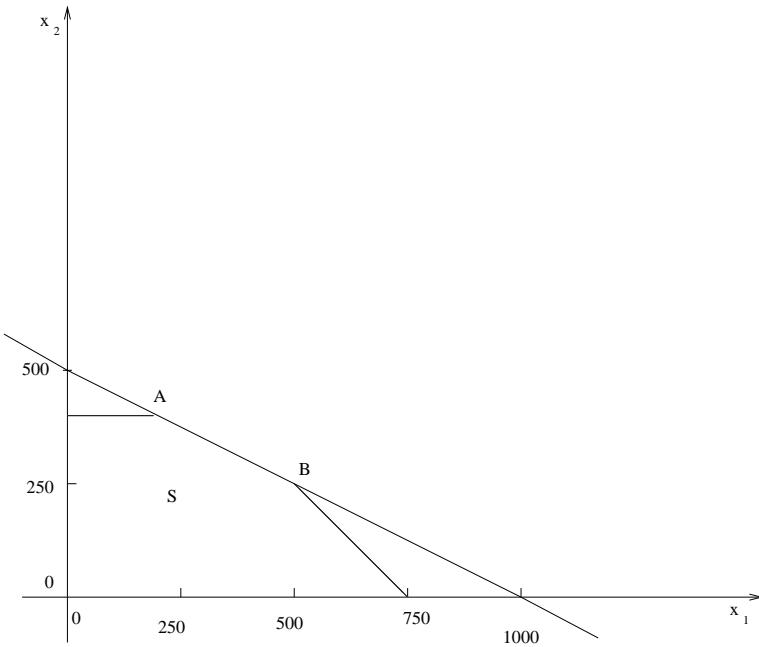


Figura 4.3.9 Esempio di soluzione non unica

**Esempio 4.3.3**

Consideriamo ora il problema di miscelazione dell'Esempio 3.4.12 che è rappresentato dal seguente problema di Programma Lineare:

$$\begin{cases} \min(400x_1 + 600x_2) \\ 140x_1 \geq 70 \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Nelle figure che seguono rappresentati i vincoli lineari di questo problema; In particolare nella Figura 4.3.10 è evidenziato il semipiano individuato dal vincolo  $140x_1 \geq 70$ . Nella Figura 4.3.11 e nella Figura 4.3.12 sono evidenziati rispettivamente i semipiani individuati dai vincoli  $20x_1 + 10x_2 \geq 30$  e  $25x_1 + 50x_2 \geq 75$ .

Ovviamente i vincoli di non negatività delle variabili  $x_1 \geq 0$  e  $x_2 \geq 0$  rappresentano rispettivamente il semipiano delle ascisse non negative e il semipiano delle ordinate non negative.

L'insieme ammissibile del problema di Programmazione Lineare che stiamo esaminando è dato quindi dall'intersezione di tali semipiani e si può indicare con

$$\tilde{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 140x_1 \geq 70, 20x_1 + 10x_2 \geq 30, 25x_1 + 50x_2 \geq 75, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

L'insieme  $\tilde{S}$  rappresenta la regione ammissibile del problema di Programmazione Lineare in esame ed è rappresentata in Figura 4.3.13.

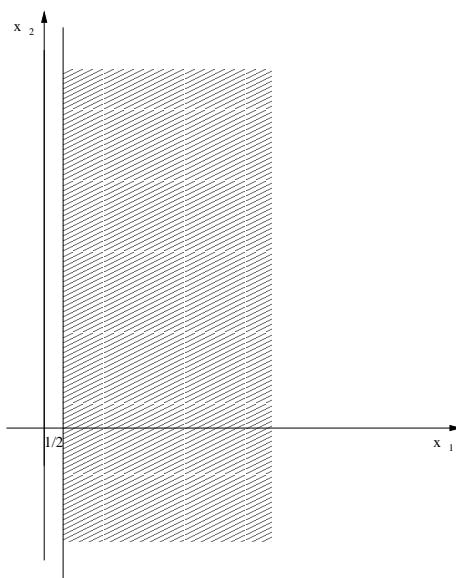


Figura 4.3.10 Semipiano individuato dal vincolo  $140x_1 \geq 70$

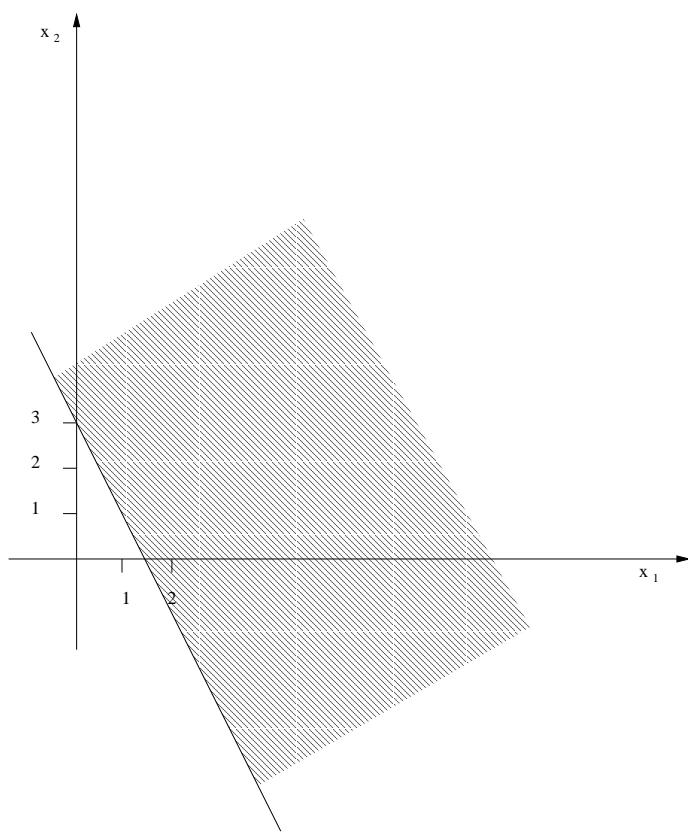


Figura 4.3.11 Semipiano individuato dal vincolo  $20x_1 + 10x_2 \geq 30$

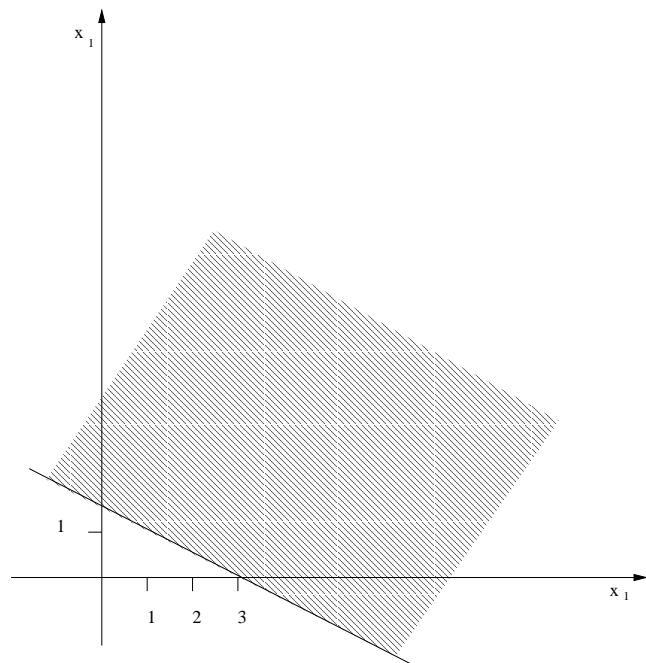


Figura 4.3.12 Semipiano individuato dal vincolo  $25x_1 + 50x_2 \geq 75$

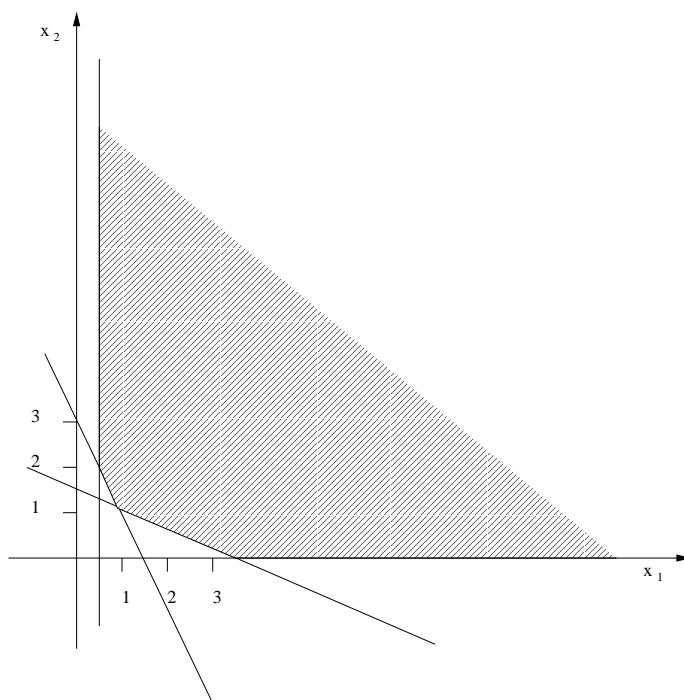


Figura 4.3.13 La regione ammissibile  $\tilde{S}$

Tutti i punti  $P(x_1, x_2)$  appartenenti a questa regione sono punti dell'insieme ammissibile del problema e quindi tutti i punti di questa regione costituiscono soluzioni ammissibili del problema. Si osservi che, a differenza della regione ammissibile del problema considerato nell'esempio precedente, la regione ammissibile  $\tilde{S}$  è illimitata.

Ora, tracciando le curve di livello della funzione obiettivo  $400x_1 + 600x_2$  si ottiene la famiglia di rette

$$400x_1 + 600x_2 = C.$$

Trattandosi di un problema di minimizzazione si vuole determinare il valore più basso di  $C$  ottenuto scegliendo per  $x_1$  e  $x_2$  valori ammissibili cioè tali che  $(x_1, x_2) \in \tilde{S}$ . Osservando la rappresentazione grafica della regione ammissibile  $\tilde{S}$  e osservando che la direzione di decrescita è quella opposta al vettore  $\begin{pmatrix} 400 \\ 600 \end{pmatrix}$ , si deduce che al diminuire di  $C$ , le rette di livello della funzione obiettivo intersecano la regione ammissibile finché  $C \geq 1000$  (Figura 4.3.14)

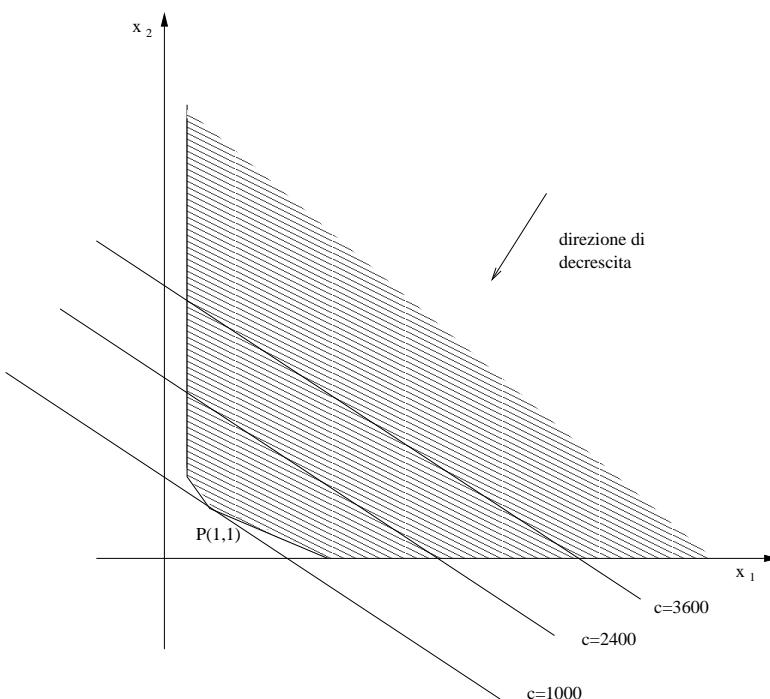


Figura 4.3.14 Curve di livello della funzione  $400x_1 + 600x_2$  e punto di ottimo

Tale valore è ottenuto per  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 1$  e non esistono altri punti della regione ammissibile in cui la funzione obiettivo assume valori minori. Il valore 1000 è, quindi, il minimo valore che la funzione obiettivo può raggiungere soddisfacendo i vincoli. Tale soluzione ottima è raggiunta in corrispondenza del punto  $P$  di coordinate  $(x_1, x_2) = (1, 1)$ ; si osservi che anche in questo caso tale punto è un

punto particolare della regione ammissibile. Si osservi, infine che in questo punto sono attivi i vincoli  $20x_1 + 10x_2 \geq 30$  e  $25x_1 + 50x_2 \geq 75$  mentre risulta non attivo il vincolo  $140x_1 \geq 70$ .

Abbiamo esaminato due esempi di interpretazione geometrica e soluzione grafica di problemi di Programmazione Lineare in due variabili. In entrambe i problemi è stato possibile determinare una soluzione ottima. Tuttavia è facile dedurre, sempre per via geometrica, che un problema di Programmazione Lineare può non ammettere soluzione ottima. Ad esempio, se nell'Esempio 4.3.2 sostituiamo il vincolo  $x_2 \leq 400$  con il vincolo  $x_2 \geq 1000$ , la regione ammissibile sarebbe vuota nel senso che non esisterebbe nessun punto del piano che soddisfa tutti i vincoli. In questo caso il problema risulterebbe inammissibile e questo indipendentemente dalla funzione obiettivo e dal fatto che il problema è in forma di minimizzazione o massimizzazione.

Un altro esempio di problema di Programmazione Lineare che non ammette soluzione ottima si può ottenere considerando il problema dell'Esempio 4.3.3 e supponendo che la funzione obiettivo debba essere massimizzata anziché minimizzata. In questo caso nella regione ammissibile (che è illimitata) la funzione obiettivo può assumere valori arbitrariamente grandi cioè tali che comunque scelto un valore  $M > 0$  esiste un punto in cui la funzione obiettivo assume valore maggiore di  $M$ ; questo significa che il problema è illimitato superiormente e quindi non può esistere una soluzione ottima.

Sulla base di queste considerazioni sulla geometria di un problema di Programmazione Lineare in due variabili si può intuire che le situazioni che si possono verificare sono le seguenti:

- *il problema ammette soluzione ottima* (che può essere o non essere unica) in un vertice del poligono convesso che delimita la regione ammissibile;
- *il problema non ammette soluzione ottima* perché
  - la regione ammissibile è vuota
  - la regione ammissibile è illimitata e la funzione obiettivo è illimitata superiormente (se il problema è di massimizzazione) o illimitata inferiormente (se il problema è di minimizzazione).

Quindi se si suppone che esiste un punto ammissibile, cioè che la regione ammissibile sia non vuota, allora sembrerebbe di poter dedurre che o il problema di Programmazione Lineare ammette soluzione ottima in un vertice del poligono convesso che delimita la regione ammissibile oppure è illimitato.

Questi asserti, ora semplicemente dedotti intuitivamente per via geometrica, hanno in effetti una validità generale e verranno enunciati e dimostrati in maniera rigorosa nel prossimo capitolo. Come ultima considerazione intuitiva si vuole ci-

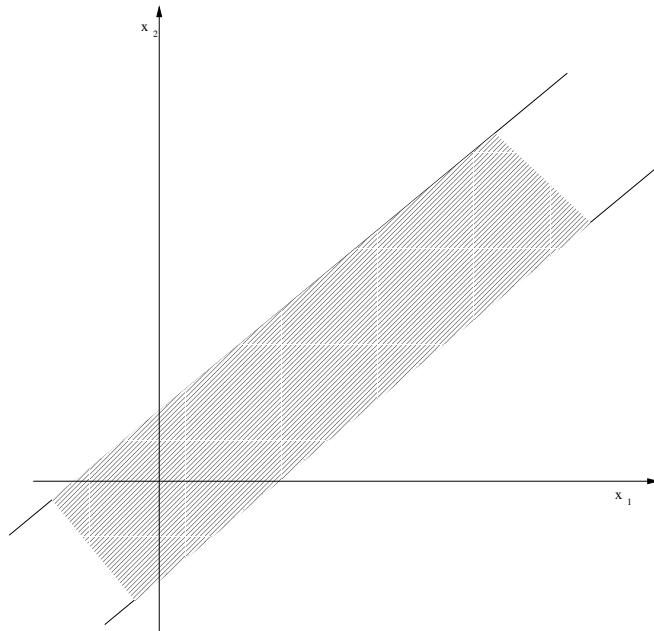


Figura 4.3.15 Regione ammissibile costituita da una striscia di piano

tare la possibilità che la regione ammissibile sia costituita da una striscia di piano, cioè dalla porzione di piano compresa tra due rette parallele (Figura 4.3.15). In questo caso non esistono vertici per la regione ammissibile e il problema risulta illimitato ad eccezione del caso particolare in cui le rette di livello della funzione obiettivo sono parallele alle rette che delimitano la striscia di piano; in questo caso si hanno infinite soluzioni.

La non esistenza di vertici in questo caso si intuisce essere legata al fatto che la regione ammissibile costituita da una striscia di piano *contiene rette*. Infatti nei casi delle regioni ammissibili  $S$  e  $\tilde{S}$  dei problemi di Programmazione Lineare dell'Esempio 4.3.2 e dell'Esempio 4.3.3 non esistono rette contenute in  $S$  o in  $\tilde{S}$ . Anche la regione illimitata  $\tilde{S}$  può contenere semirette, ma non rette.

Ad eccezione del caso particolare della regione ammissibile rappresentata da una striscia di piano, il caso in cui sembrerebbe essere possibile garantire l'esistenza di almeno una soluzione ottima è quello della regione ammissibile che non contiene nemmeno semirette (che è il caso della regione  $S$  dell'Esempio 4.3.2). Anche questa intuizione è vera in generale e verrà formalizzata e dimostrata in maniera rigorosa nel prossimo capitolo.



# 5

## Teoria della Programmazione Lineare

In questo capitolo iniziamo lo studio formale dei problemi di Programmazione Lineare e, in particolare, dimostriamo il *Teorema fondamentale della Programmazione Lineare*. A tale fine è necessario approfondire lo studio di alcune proprietà geometriche dell'insieme ammissibile di un problema di Programmazione Lineare. Le nozioni introdotte in questo capitolo, oltre ad essere di interesse autonomo, costituiscono anche la base del metodo risolutivo che verrà analizzato nel prossimo capitolo.

### 5.1 ELEMENTI DI GEOMETRIA IN $\mathbb{R}^N$

#### 5.1.1 Rette, semirette, segmenti

**Definizione 5.1.1** Siano dati un punto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  ed una direzione  $d \in \mathbb{R}^n$ . L'insieme dei punti di  $\mathbb{R}^n$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \bar{x} + \lambda d, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

è una retta passante per  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  e avente come direzione  $d \in \mathbb{R}^n$ . L'insieme dei punti di  $\mathbb{R}^n$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \bar{x} + \lambda d, \lambda \geq 0\}$$

è una semiretta avente origine in  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  e direzione  $d \in \mathbb{R}^n$ .

**Definizione 5.1.2** Siano  $x$  e  $y$  due punti in  $\mathbb{R}^n$ . L'insieme dei punti di  $\mathbb{R}^n$  ottenuti come

$$\{z \in \mathbb{R}^n \mid z = (1 - \lambda)x + \lambda y, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

è un segmento (chiuso) di estremi  $x$  e  $y$  e viene sinteticamente indicato con la notazione  $[x, y]$ .

**Esempio 5.1.3** Nella Figura 5.1.1 è rappresentato il segmento in  $\mathbb{R}^2$  avente per estremi i punti  $x = (1, 1)^T$  e  $y = (8, 5)^T$ . Rappresentando i punti di questo segmento nella forma  $z = (1 - \beta)x + \beta y$ ,  $\beta \in [0, 1]$ , per  $\beta = 0$  ritroviamo il punto  $x$ , mentre per  $\beta = 1$  ritroviamo il punto  $y$ ; i punti segnati nella figura come  $x_a$ ,  $x_b$  e  $x_c$  corrispondono rispettivamente a valori di  $\beta$  pari a 0.25, 0.5 e 0.75.

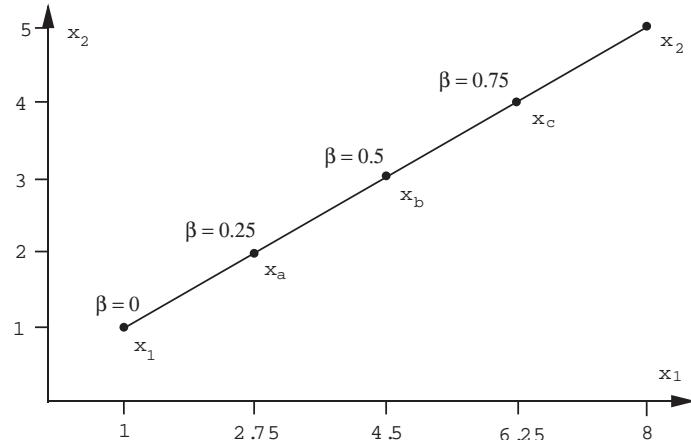


Figura 5.1.1 Esempio di segmento.

Dalla Figura 5.1.1 risulta ovvio che il concetto di segmento è la generalizzazione, al caso di  $\mathbb{R}^n$  del usuale concetto di segmento valido nel piano.

Notiamo anche come, nel caso in cui gli estremi appartengano ad  $\mathbb{R}$ , e sono quindi due numeri (scalari), diciamo  $a$  e  $b$ , il concetto di segmento (chiuso) di estremi  $a$  e  $b$  coincida con quello di intervallo  $[a, b]$ , fatto che giustifica la notazione  $[x, y]$  impiegata per indicare il segmento.

### 5.1.2 Insiemi Convessi

**Definizione 5.1.4** Un insieme  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  è convesso se per ogni coppia di punti appartenenti all'insieme, appartiene all'insieme anche tutto il segmento che li congiunge.

Utilizzando il concetto di segmento chiuso, la definizione di insieme convesso può essere riformulata nel modo seguente:

Un insieme  $X$  è convesso se per ogni coppia di vettori  $x, y \in X$  si ha  $[x, y] \subseteq X$ .

Dalla definizione segue che l'insieme vuoto e l'insieme costituito da un solo vettore sono insiemi convessi (banali). Il più semplice insieme convesso non banale è il segmento di estremi  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

**Esempio 5.1.5** In  $\mathbb{R}^2$  gli insiemi (a), (b) della Figura 5.1.2 sono convessi, mentre gli insiemi (c), (d) della stessa figura non lo sono. Infatti agli insiemi (c), (d) appartengono coppie di punti, quali quelle segnate nella figura, tali che il segmento che li congiunge presenta dei punti non appartenenti all'insieme; ciò non avviene invece comunque si prendano coppie di punti negli insiemi (a) e (b).

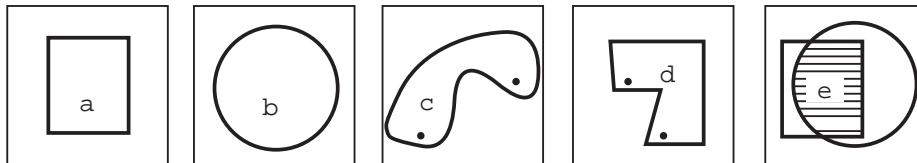


Figura 5.1.2 Insiemi convessi e non convessi.

Una importante proprietà degli insiemi convessi è espressa dal seguente teorema.

**Teorema 5.1.1** L'intersezione di due insiemi convessi è un insieme convesso.

**Dimostrazione:** Siano  $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  due insiemi convessi e sia  $X = X_1 \cap X_2$  la loro intersezione. Siano  $x$  ed  $y$  due vettori in  $X$ , allora  $x, y \in X_1$  ed  $x, y \in X_2$ . Poiché  $X_1$  ed  $X_2$  sono insiemi convessi abbiamo che  $[x, y] \subseteq X_1$  e che  $[x, y] \subseteq X_2$ . Ma allora  $[x, y] \subseteq X$  e l'insieme  $X$  è convesso  $\square$

**Esempio 5.1.6** L'insieme (e) della Figura 5.1.2 è dato dall'intersezione di due insiemi convessi ed è convesso.

Dal Teorema 5.1.1 si può derivare, con un semplice ragionamento induttivo, il seguente corollario.

**Corollario 5.1.7** *L'intersezione di un numero finito di insiemi convessi è un insieme convesso.*

Passiamo ora a considerare dei particolari insiemi convessi che rivestono un ruolo importante nella teoria della programmazione lineare.

**Definizione 5.1.8** *Sia  $a$  un vettore di  $\mathbb{R}^n$  e  $b$  un numero reale. L'insieme*

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$$

*è detto iperpiano definito dall'equazione  $a^T x = b$ . Gli insiemi*

$$\begin{aligned} S^{\leq} &= \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\} \\ S^{\geq} &= \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq b\} \end{aligned}$$

*sono detti semispazi chiusi definiti dalle disequazioni  $a^T x \leq b$  e  $a^T x \geq b$ .*

Nel caso dello spazio  $\mathbb{R}^2$  il concetto di iperpiano coincide con quello di retta, mentre nel caso dello spazio  $\mathbb{R}^3$  il concetto di iperpiano coincide con quello di piano. In maniera intuitiva, i semispazi possono essere pensati come l'insieme dei punti che “giacciono” da una stessa parte rispetto all'iperpiano.

**Esempio 5.1.9** Con riferimento alla Figura 5.1.3, l'iperpiano (= retta)  $10x_1 + 5x_2 = 25$  divide lo spazio (= piano) in due semispazi:  $S^{\geq} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 10x_1 + 5x_2 \geq 25\}$ , indicato in grigio nella figura, e  $S^{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 10x_1 + 5x_2 \leq 25\}$ , indicato in bianco nella figura.

Notiamo che l'iperpiano  $H$  fa parte di tutti e due i semispazi e che l'intersezione dei due semispazi coincide con l'iperpiano. In termini insiemistici abbiamo che

$$H \subset S^{\geq}, \quad H \subset S^{\leq}, \quad S^{\geq} \cap S^{\leq} = H.$$

I semispazi e gli iperpiani sono insiemi convessi.

**Teorema 5.1.2** *Un semispazio chiuso è un insieme convesso.*

**Dimostrazione:** Dimostreremo il teorema per un semispazio  $S^{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$ , la dimostrazione per il semispazio  $S^{\geq}$  ottenuto invertendo il verso della

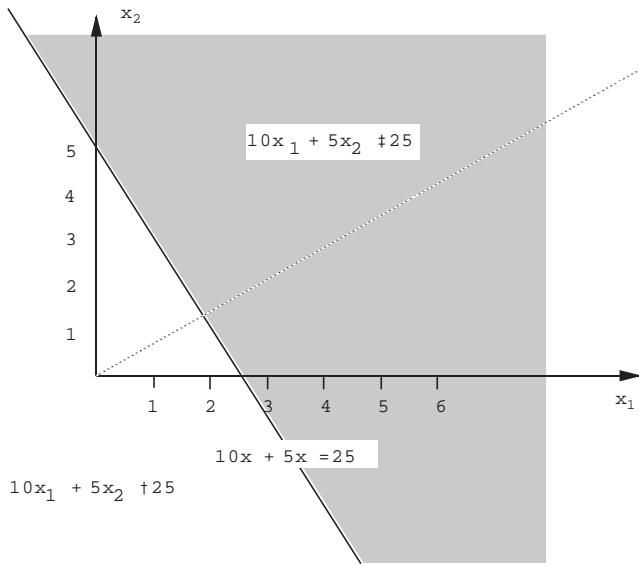


Figura 5.1.3 Retta e semipiani individuati da un'equazione lineare.

disequazione è analoga. Consideriamo due generici vettori  $x$  ed  $y$  appartenenti ad  $S^{\leq}$ , vogliamo dimostrare che ogni vettore  $z \in [x, y]$  appartiene ad  $S^{\leq}$ , ovvero soddisfa la relazione  $a^T z \leq b$ .

Sia  $z = \beta x + (1 - \beta)y$  con  $0 \leq \beta \leq 1$ . Poiché  $x$  ed  $y$  appartengono ad  $S^{\leq}$  abbiamo che  $a^T x \leq b$  e  $a^T y \leq b$ . Inoltre, poiché  $\beta$  ed  $1 - \beta$  sono reali non negativi abbiamo che

$$a^T(\beta x + (1 - \beta)y) = \beta a^T x + (1 - \beta)a^T y \leq \beta b + (1 - \beta)b = b$$

e quindi che  $a^T z \leq b$  □

Utilizzando il Teorema 5.1.2 e il Teorema 5.1.1 è ora facile dimostrare che anche un iperpiano è un insieme convesso.

**Corollario 5.1.10** *Un iperpiano è un insieme convesso.*

*Dimostrazione:* Un iperpiano è l'intersezione di due semispazi chiusi ( $S^{\leq}$  e  $S^{\geq}$ ). Per il Teorema (5.1.2) un semispa $z$ zio chiuso è un insieme convesso mentre, per il Teorema (5.1.1), l'intersezione di due insiemi convessi è un insieme convesso. □

Notiamo ora che l'insieme ammissibile di un problema di Programmazione Lineare è definito come l'insieme di punti che soddisfa i vincoli, cioè un insieme di equazioni e disequazioni lineari. Usando la terminologia appena introdotta, possiamo anche dire che l'insieme dei punti ammissibili di un problema di Programmazione Lineare è dato dall'intersezione di un numero finito di *semispazi*

*chiusi* (disequazioni lineari) e *iperpiani* (equazioni lineari). Quindi, applicando il Teorema 5.1.2, il Corollario 5.1.10 e il Teorema 5.1.1 abbiamo il seguente risultato.

**Teorema 5.1.3** *L'insieme ammissibile di un problema di programmazione lineare è un insieme convesso.*

In particolare è usuale introdurre la seguente definizione (dove si farà uso della nozione di insieme limitato<sup>1</sup>):

**Definizione 5.1.11** *Un insieme  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  è un poliedro se è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi e iperpiani. Un poliedro limitato viene detto polìtopo.*

Usando un punto di vista più algebrico possiamo parafrasare la precedente definizione e dire che un poliedro è l'insieme di soluzioni di un qualunque sistema di equazioni e disequazioni lineari. In particolare, notiamo che l'insieme vuoto è un poliedro (è l'insieme di soluzioni di un sistema di equazioni inconsistente) e che anche  $\mathbb{R}^n$  è un poliedro ( $\mathbb{R}^n$  è, per esempio, l'insieme di soluzioni dell'equazione lineare  $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$ ). Naturalmente, poiché un poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  può essere sempre descritto nella forma  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$  dove  $A$  è una matrice  $m \times n$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ , una caratterizzazione alternativa (algebrica) di poliedro è la seguente:

*un insieme  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice poliedro se esiste una matrice  $A$ ,  $m \times n$  e  $b \in \mathbb{R}^m$  tale che risulti*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}.$$

Risulta quindi ovvio il risultato che segue.

**Teorema 5.1.4** *L'insieme ammissibile di un problema di Programmazione Lineare è un poliedro.*

---

<sup>1</sup>Un insieme  $P \subset \mathbb{R}^n$  si dice *limitato* se esiste una costante  $M > 0$  tale che, per ogni punto  $x$  appartenente a  $P$  risulti  $|x_i| \leq M$  per ogni  $i = 1, \dots, n$

### 5.1.3 Vertici

In questa sezione formalizziamo il concetto intuitivo di *vertice*. Questo concetto riveste un ruolo fondamentale nella teoria della Programmazione Lineare<sup>2</sup>.

**Definizione 5.1.12** Un vettore  $x$  appartenente ad un insieme convesso  $C$  è detto vertice di  $C$  se non esistono due punti distinti  $x_1, x_2 \in C$  tali che  $x \neq x_1$ ,  $x \neq x_2$  ed  $x \in [x_1, x_2]$ .

Nell'insieme di Figura 5.1.4 il punto A non è un vertice, in quanto è interno al segmento che congiunge i punti B e C, anch'essi appartenenti all'insieme; lo stesso vale per il punto D, interno al segmento [E,F]. Sono invece vertici dell'insieme i punti E, F, G, H.

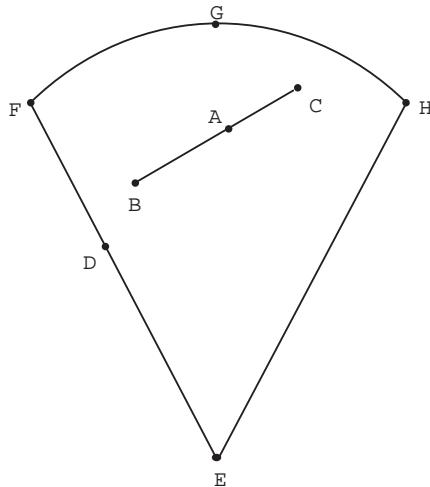


Figura 5.1.4 Vertici di un insieme.

La Figura 5.1.5 fornisce un esempio di poliedro in cui il punto  $\bar{x}$  è vertice mentre il punto  $v$  non è vertice in quanto è interno al segmento che congiunge due punti  $u$  e  $w$  appartenenti al poliedro ed entrambi diversi da  $v$ .

<sup>2</sup>Per precisione notiamo che nella letteratura la Definizione 5.1.12 che segue è la definizione di *punto estremo*, mentre viene normalmente indicato con vertice un punto che soddisfa una proprietà più complessa, che qui non riportiamo. Nel caso però di poliedri, che saranno gli unici insiemi convessi che prenderemo in considerazione in questo corso, le due definizioni coincidono, cioè un punto appartenente a un poliedro è un vertice del poliedro stesso se e solo se è un suo punto estremo.

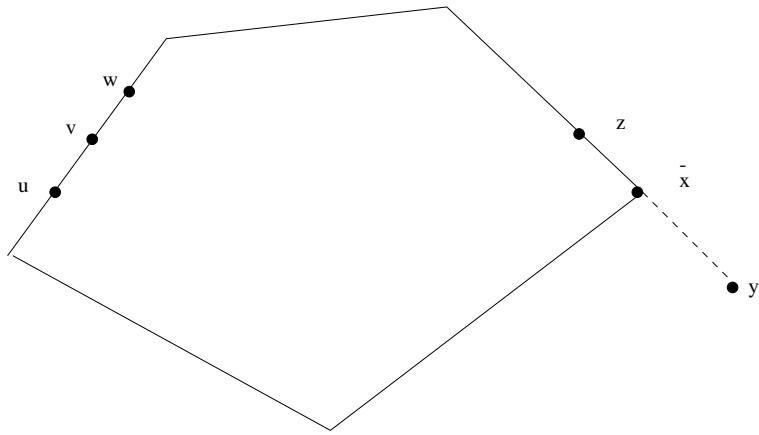


Figura 5.1.5 Esempio di vertice di un poliedro

#### 5.1.4 Caratterizzazione dei vertici dell'insieme ammissibile di un problema di PL

Il problema che ci proponiamo di affrontare ora è quello di *caratterizzare* i vertici dell'insieme dei punti ammissibili di un problema di PL. Una risposta è fornita dal teorema che segue che mette in relazione l'esistenza di un vertice con l'esistenza di  $n$  vincoli attivi linearmente indipendenti. Si consideri quindi un generico problema di Programmazione Lineare scritto nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases}$$

dove  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Denotando con  $a_i^T$ ,  $i = 1, \dots, m$  le righe della matrice  $A$  possiamo introdurre la seguente definizione:

**Definizione 5.1.13** VINCOLI ATTIVI

Se un vettore  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  soddisfa  $a_i^T \bar{x} = b_i$  per qualche  $i \in \{1, \dots, m\}$  si dice che il corrispondente vincolo è attivo in  $\bar{x}$ . Inoltre, dato  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  si indica con  $I(\bar{x})$  l'insieme degli indici dei vincoli attivi, cioè:

$$I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid a_i^T \bar{x} = b_i\}.$$

Per brevità, nel seguito, chiameremo spesso *vincoli linearmente indipendenti* quei vincoli per i quali risultano linearmente indipendenti i vettori  $a_i^T$  corrispondenti.

**Teorema 5.1.5** Siano dati un poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$  e un punto  $\bar{x} \in P$ . Il punto  $\bar{x}$  è un vertice di  $P$  se e solo se esistono  $n$  righe  $a_i^T$  della matrice  $A$  con  $i \in I(\bar{x})$  che sono linearmente indipendenti.

*Dimostrazione:* Dimostriamo innanzitutto la condizione necessaria, cioè che se esiste un vertice del poliedro allora esistono  $n$  vincoli attivi nel vertice linearmente indipendenti. Supponiamo che  $\bar{x}$  sia un vertice del poliedro  $P$  e che, per assurdo, il numero dei vincoli attivi in  $\bar{x}$  linearmente indipendenti sia  $k < n$ . Allora esiste un vettore  $d \in \mathbb{R}^n$  non nullo tale che

$$a_i^T d = 0, \quad \text{per ogni } i \in I(\bar{x}). \quad (5.1.1)$$

Poiché per ogni vincolo non attivo in  $\bar{x}$ , cioè per ogni  $i \notin I(\bar{x})$  si ha

$$a_i^T \bar{x} > b_i,$$

allora esiste  $\epsilon > 0$  sufficientemente piccolo tale che i vettori

$$\begin{aligned} y &= \bar{x} - \epsilon d \\ z &= \bar{x} + \epsilon d \end{aligned}$$

soddisfano  $a_i^T y \geq b_i$ ,  $a_i^T z \geq b_i$  per ogni  $i \notin I(\bar{x})$ . Inoltre per la (5.1.1), per ogni  $i \in I(\bar{x})$  si ha

$$\begin{aligned} a_i^T y &= a_i^T \bar{x} - \epsilon a_i^T d = b_i \\ a_i^T z &= a_i^T \bar{x} + \epsilon a_i^T d = b_i \end{aligned}$$

e quindi i vettori  $y$  e  $z$  soddisfano tutti i vincoli  $a_i^T x \geq b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  e quindi appartengono al poliedro  $P$ . Ora poiché risulta

$$\bar{x} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z,$$

con  $y$  e  $z$  vettori di  $P$  entrambi diversi da  $\bar{x}$ , allora  $\bar{x}$  non è un vertice e questa è una contraddizione.

Dimostriamo ora la condizione sufficiente, cioè che se esistono  $n$  vincoli attivi in uno stesso punto linearmente indipendenti allora tale punto è un vertice di  $P$ . Supponiamo quindi che esistano  $n$  righe  $a_i^T$  con  $i \in I(\bar{x})$  linearmente indipendenti e che per assurdo  $\bar{x}$  non sia vertice di  $P$ . Innanzitutto osserviamo che se  $\bar{x}$  non è un vertice, allora necessariamente  $P \supset \{\bar{x}\}$  (cioè  $\bar{x}$  non è l'unico punto di  $P$ ) ed inoltre esistono due vettori  $y$  e  $z$  entrambi diversi da  $\bar{x}$  appartenenti a  $P$ , cioè che soddisfano

$$a_i^T y \geq b_i, \quad a_i^T z \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

tali che

$$\bar{x} = \lambda y + (1 - \lambda)z \quad \text{con } \lambda \in (0, 1).$$

Ora, se per qualche  $i \in I(\bar{x})$  risultasse  $a_i^T y > b_i$  oppure  $a_i^T z > b_i$  allora si avrebbe

$$a_i^T \bar{x} = \lambda a_i^T y + (1 - \lambda) a_i^T z > \lambda b_i + (1 - \lambda) b_i = b_i$$

e questo contraddice il fatto che  $i \in I(\bar{x})$ . Allora deve necessariamente essere

$$a_i^T y = b_i, \quad a_i^T z = b_i, \quad \text{per ogni } i \in I(\bar{x})$$

ma questo implica che il sistema

$$a_i^T x = b_i, \quad i \in I(\bar{x})$$

ammette più di una soluzione (cioè  $\bar{x}$ ,  $y$  e  $z$ ) contraddicendo l'ipotesi che esistano  $n$  righe  $a_i^T$  con  $i \in I(\bar{x})$  linearmente indipendenti nel qual caso, come è noto, la soluzione è unica.  $\square$

**Osservazione 5.1.14** La condizione necessaria e sufficiente espressa del Teorema 5.1.5 può essere facilmente riformulata in maniera equivalente richiedendo che *il rango della matrice formata dalle righe di  $A$  corrispondenti ai vincoli attivi sia massimo*, cioè pari a  $n$ , ovvero

$$\text{rango}\{a_i^T, i \in I(\bar{x})\} = n. \quad (5.1.2)$$

Seguono tre corollari che discendono in maniera immediata dal teorema appena dimostrato.

**Corollario 5.1.15** *Sia dato un poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ . Se la matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ha un numero di righe linearmente indipendenti minore di  $n$ , allora  $P$  non ha vertici. In particolare se  $m < n$  allora  $P$  non ha vertici.*

**Corollario 5.1.16** *Siano dati un poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$  e un punto  $\bar{x} \in P$ . Il punto  $\bar{x}$  è un vertice di  $P$  se e solo se è soluzione unica del sistema*

$$a_i^T x = b_i \quad i \in I(\bar{x}).$$

**Corollario 5.1.17** *Un poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$  ha al più un numero finito di vertici.*

*Dimostrazione:* Se  $m < n$  il poliedro ovviamente non ha vertici. Se  $m \geq n$ , per il Corollario 5.1.16 ogni vertice del poliedro corrisponde ad un sottoinsieme di  $n$  righe linearmente indipendenti della matrice  $A$ . Ora poiché la matrice  $A$  ha al più  $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$  sottoinsiemi distinti di  $n$  righe, allora il poliedro ha al più  $\frac{m!}{n!(m-n)!}$  vertici.  $\square$

**Esempio 5.1.18** *Determinare i vertici del poliedro descritto dalle diseguaglianze*

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -30 \\ 2x_1 - x_2 \geq -12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

*e rappresentarlo geometricamente su un sistema di assi cartesiani  $Ox_1x_2$ .*

Si osservi innanzitutto che in questo esempio la dimensione  $n$  è pari a 2 e il numero dei vincoli  $m$  pari a 4. Si devono determinare tutte le possibili intersezioni delle rette  $3x_1 - 2x_2 = -30$ ,  $2x_1 - x_2 = -12$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  che costituiscono il poliedro; si osservi che tali intersezioni sono  $\binom{4}{2} = 6$ . Per ogni punto così ottenuto si deve verificare innanzitutto l'appartenenza del punto al poliedro, e poi, affinché sia un vertice, l'indipendenza lineare dei vincoli attivi in quel punto.

1. Il sistema  $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -30 \\ 2x_1 - x_2 = -12 \end{cases}$  corrispondente al primo e al secondo vincolo ha come unica soluzione il punto  $P_1 = (6, 24)$  che si verifica immediatamente appartenere al poliedro; in questo punto ovviamente risultano attivi il primo e il secondo vincolo e quindi  $I(P_1) = \{1, 2\}$  e poiché i vettori  $a_1^T = (3, -2)$  e  $a_2^T = (2, -1)$  corrispondenti a questi due vincoli sono linearmente indipendenti, allora il punto  $P_1$  è un vertice del poliedro.

2. Il sistema  $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -30 \\ x_1 = 0 \end{cases}$  corrispondente al primo e al terzo vincolo ha come unica soluzione il punto  $P_2 = (0, 15)$  che non appartiene al poliedro.
3. Il sistema  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -30 \\ x_2 = 0 \end{cases}$  corrispondente al primo e al quarto vincolo ha come unica soluzione il punto  $P_3 = (-10, 0)$  che non appartiene al poliedro.
4. Il sistema  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -12 \\ x_1 = 0 \end{cases}$  corrispondente al secondo e al terzo vincolo ha come unica soluzione il punto  $P_4 = (0, 12)$  che si verifica immediatamente appartenere al poliedro; in questo punto ovviamente risultano attivi il secondo e il terzo vincolo e quindi  $I(P_4) = \{2, 3\}$  e poiché i vettori  $a_2^T = (2, -1)$  e  $a_3^T = (1, 0)$  corrispondenti a questi due vincoli sono linearmente indipendenti, allora il punto  $P_4$  è un vertice del poliedro.
5. Il sistema  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -12 \\ x_2 = 0 \end{cases}$  corrispondente al secondo e al quarto vincolo ha come unica soluzione il punto  $P_5 = (-6, 0)$  che non appartiene al poliedro.
6. Il sistema  $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$  corrispondente al terzo e al quarto vincolo ha come unica soluzione il punto  $P_6 = (0, 0)$  che si verifica immediatamente essere appartenente al poliedro; in questo punto ovviamente risultano attivi il terzo e il quarto vincolo e quindi  $I(P_6) = \{3, 4\}$  e poiché i vettori  $a_3^T = (1, 0)$  e  $a_4^T = (0, 1)$  corrispondenti a questi due vincoli sono linearmente indipendenti, allora il punto  $P_6$  è un vertice del poliedro.

La rappresentazione geometrica di questo poliedro è riportata in Figura 5.1.6. □

**Esempio 5.1.19** *Dato il poliedro descritto dalle seguenti disuguaglianze*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

*verificare se i punti  $P_1 = (0, 0, 0)$ ,  $P_2 = (0, 0, 1/2)$  e  $P_3 = (0, 0, 1)$  sono vertici del poliedro.*

In questo esempio la dimensione  $n$  è pari a 3 e il numero dei vincoli  $m$  è pari a 5. Riscrivendo i primi due vincoli nella forma di disuguaglianza di maggiore o

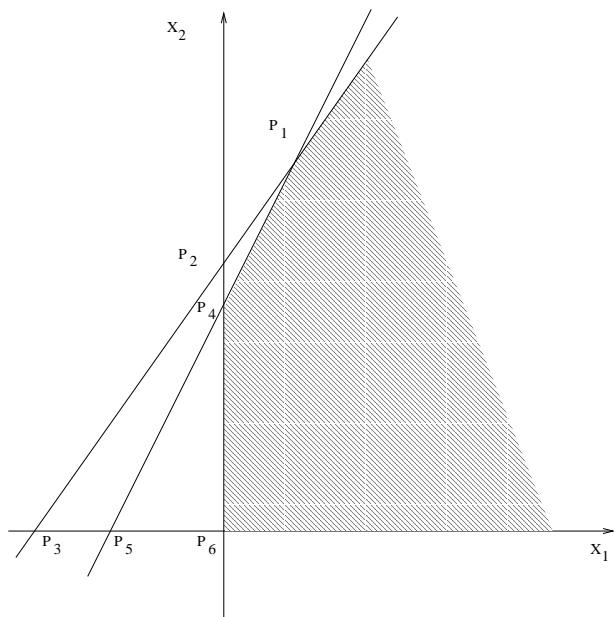


Figura 5.1.6 Poliedro dell'Esempio 5.1.18

uguale, la matrice  $A$  dei coefficienti delle diseguaglianze che descrivono il poliedro è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per ogni punto dato, dopo aver verificato l'appartenenza del punto al poliedro, si deve verificare se esistono tre vincoli attivi in quel punto linearmente indipendenti. Nel punto  $P_1 = (0, 0, 0)$  (che appartiene al poliedro) sono attivi il terzo, il quarto e il quinto vincolo e quindi  $I(P_1) = \{3, 4, 5\}$  e poiché le righe  $a_3^T, a_4^T$  e  $a_5^T$  della matrice  $A$  sono linearmente indipendenti, il punto  $P_1$  è vertice del poliedro.

Nel punto  $P_2 = (0, 0, 1/2)$  (che appartiene al poliedro) sono attivi solamente due vincoli (il terzo e il quarto) e quindi il punto  $P_2$  non può essere un vertice del poliedro.

Nel punto  $P_3 = (0, 0, 1)$  (che appartiene al poliedro) si hanno tre vincoli attivi; in particolare risulta  $I(P_3) = \{1, 3, 4\}$  e le corrispondenti righe  $a_1^T, a_3^T$  e  $a_4^T$  della matrice  $A$  sono linearmente indipendenti e quindi il punto  $P_3$  è un vertice del poliedro.  $\square$

**Esempio 5.1.20** Determinare i vertici del poliedro descritto dalle seguenti disuguaglianze

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4. \end{cases}$$

In questo caso si ha  $n = 3$  e  $m = 4$  e quindi si devono determinare punti del poliedro in cui sono attivi tre vincoli linearmente indipendenti. Si devono quindi considerare  $\binom{4}{3} = 4$  sistemi di equazioni in tre variabili:

1. il sistema ottenuto dai primi tre vincoli ha come unica soluzione il punto  $P_1(1, 1, 0)$  che non è ammissibile;
2. si consideri ora il sistema ottenuto dal primo, dal secondo e dal quarto vincolo; la matrice dei coefficienti di questo sistema ha rango 2 in quanto i tre vincoli considerati (il primo, il secondo e il quarto) non sono linearmente indipendenti (il vettore corrispondente al quarto vincolo si può ottenere come somma dei vettori corrispondenti al primo e al secondo vincolo). Quindi non si può avere un vertice.
3. il sistema ottenuto dal primo, dal terzo e dal quarto vincolo ha come unica soluzione il punto  $P_2 = (2, 2, -3)$  che appartiene al poliedro e poiché i tre vincoli attivi in  $P_3$  sono linearmente indipendenti,  $P_2$  è un vertice del poliedro.
4. il sistema ottenuto dal secondo, dal terzo e dal quarto vincolo ha come unica soluzione il punto  $P_3 = (3, 2, -5)$  che appartiene al poliedro e poiché i tre vincoli attivi in  $P_3$  sono linearmente indipendenti,  $P_3$  è un vertice del poliedro.

□

**Osservazione 5.1.21** Se tra vincoli che descrivono un poliedro è presente un vincolo di uguaglianza, nella determinazione dei vertici ci si può limitare a considerare solo i sistemi che contengono questo vincolo di uguaglianza, facendo diminuire considerevolmente il numero dei sistemi da prendere in considerazione. L'esempio che segue mostra una situazione di questo tipo.

**Esempio 5.1.22** Calcolare tutti i vertici del seguente poliedro:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 4 \\ x_1 & - & x_3 = 1 \\ x & \geq & 0. \end{array}$$

Bisogna analizzare tutti i possibili sistemi di tre equazioni “estraibili” dal sistema dato, che ha cinque vincoli. Riportiamo il sistema per esteso:

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 \leq 4 \\ x_1 & & - & x_3 = & 1 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ x_2 & & & \geq & 0 \\ x_3 & & & \geq & 0. \end{array}$$

Siccome è presente un vincolo di uguaglianza, ci si può limitare ad analizzare solo i sistemi che contengono il vincolo di uguaglianza.

I vertici sono 2:

$$v_1 = (5/3, 0, 2/3)^T,$$

corrispondente al sistema formato dal primo, secondo e quarto vincolo e

$$v_2 = (1, 0, 0)^T,$$

corrispondente al sistema formato dal secondo, quarto e quinto vincolo.

Per quanto riguarda gli altri sistemi “estraibili” risulta che per il sistema formato dai vincoli

- primo, secondo e terzo: la soluzione corrispondente non è ammissibile;
- primo, secondo e quinto: la soluzione corrispondente non è ammissibile;
- secondo, terzo e quarto: la soluzione corrispondente non è ammissibile;
- secondo, terzo e quinto: il rango è minore di tre. □

Come è facile osservare, non tutti i poliedri hanno almeno un vertice. Un controesempio banale di poliedro che non ha vertici è un semispazio in  $\mathbb{R}^n$  con  $n > 1$ . Se la matrice  $A$  ha un numero di righe strettamente minore di  $n$ , allora il poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$  non ha vertici perché è ovvio che in questo caso non è possibile trovare  $n$  vincoli attivi né, tantomeno,  $n$  vincoli attivi linearmente indipendenti (vedi il Corollario 5.1.15).

Il fatto che un poliedro abbia o non abbia vertici è basato sulla possibilità di un poliedro di contenere o meno rette. Questo concetto verrà ora formalizzato introducendo innanzitutto la seguente definizione.

**Definizione 5.1.23** Si dice che un poliedro  $P$  contiene una retta se esiste un punto  $\tilde{x} \in P$  e un vettore non nullo  $d \in \mathbb{R}^n$  tale che  $\tilde{x} + \lambda d \in P$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si dice che un poliedro  $P$  contiene una semiretta se esiste un punto  $\tilde{x} \in P$  e un vettore non nullo  $d \in \mathbb{R}^n$  tale che  $\tilde{x} + \lambda d \in P$  per ogni  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Riportiamo quindi, senza dimostrazione, il seguente risultato, che non verrà utilizzato nel seguito, ma che aiuta a capire la relazione tra vertici e poliedri che non contengono rette.

**Teorema 5.1.6** Sia  $P$  un poliedro non vuoto.  $P$  possiede almeno un vertice se e solo se  $P$  non contiene rette.

## 5.2 IL TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE

Quanto fino ad ora esaminato permette di enunciare e dimostrare un risultato di fondamentale importanza che caratterizza i problemi di Programmazione Lineare.

**Teorema 5.2.1** – TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE

*Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases} \quad (\text{PL})$$

*Supponiamo che il poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$  non contenga rette. Allora una e una sola delle seguenti tre affermazioni è vera:*

1. *Il problema (PL) è inammissibile, ovvero il poliedro  $P$  è vuoto;*
2. *Il problema (PL) è illimitato inferiormente;*
3. *Il problema (PL) ammette soluzioni ottime e almeno una di queste soluzioni è un vertice del poliedro  $P$ .*

Prima di dimostrare questo teorema enunciamo e dimostriamo un lemma che sarà alla base della dimostrazione del Teorema fondamentale.

**Lemma 5.2.1** *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases}$$

*Supponiamo che il poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$  sia non vuoto e non contenga rette. Supponiamo inoltre che il problema non sia illimitato inferiormente. Allora se  $\tilde{x}$  è un punto di  $P$  che non è un vertice di  $P$ , è possibile trovare un punto  $\hat{x}$  appartenente a  $P$  tale che  $c^T \hat{x} \leq c^T \tilde{x}$  e il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in  $\hat{x}$  è maggiore che in  $\tilde{x}$ .*

*Dimostrazione:* Sia  $\tilde{x}$  un punto qualunque di  $P$  e indichiamo con  $k$  il numero dei vincoli attivi in  $\tilde{x}$  che sono linearmente indipendenti. Siccome  $\tilde{x}$  non è un vertice, ne segue che  $k < n$ . Sia  $I(\tilde{x})$  l'insieme degli indici dei vincoli attivi in  $\tilde{x}$ ; poiché  $k < n$ , si può trovare un vettore  $d \in \mathbb{R}^n$  non nullo tale che  $a_i^T d = 0$  per ogni  $i \in I(\tilde{x})$ . Inoltre, si può assumere che  $c^T d \leq 0$ ; infatti se questo non

si verificasse (cioè se fosse  $c^T d > 0$ ) sarebbe sufficiente prendere  $-d$  e ottenere comunque  $c^T d \leq 0$ .

Ora possono verificarsi due casi:  $c^T d < 0$  e  $c^T d = 0$ .

- Primo caso:  $c^T d < 0$ . Consideriamo la semiretta  $x(\lambda) = \tilde{x} + \lambda d$  con  $\lambda \geq 0$ . Per ogni punto di tale semiretta, ovvero per ogni  $\lambda \geq 0$ , e per  $i \in I(\tilde{x})$  si ha

$$a_i^T x(\lambda) = a_i^T \tilde{x} + \lambda a_i^T d = a_i^T \tilde{x} = b_i. \quad (5.2.1)$$

Quindi tutti i vincoli che erano attivi in  $\tilde{x}$  rimangono attivi in tutti i punti della semiretta. Ora, se l'intera semiretta è contenuta nel poliedro  $P$  si può far tendere  $\lambda$  a  $+\infty$  e poiché  $c^T d < 0$  si ha

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} c^T(\tilde{x} + \lambda d) = c^T \tilde{x} + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda c^T d = -\infty.$$

Il problema sarebbe quindi illimitato inferiormente, ma ciò è stato escluso per ipotesi e quindi la semiretta non è interamente contenuta in  $P$ . Se la semiretta  $x(\lambda)$  non è interamente contenuta in  $P$ , devono esistere valori di  $\lambda$  per i quali i punti  $x(\lambda)$  non appartengono al poliedro  $P$ , ovvero deve esistere almeno un indice  $j \notin I(\tilde{x})$  tale che, per tali valori di  $\lambda$ , il  $j$ -esimo vincolo è violato, cioè risulta  $a_j^T x(\lambda) < b_j$ . Tra questi indici  $j$  deve esistere un indice  $j_0$  tale che possa essere scelto un  $\hat{\lambda} > 0$  in modo che risulti

$$\begin{aligned} a_{j_0}^T x(\hat{\lambda}) &= b_{j_0} \\ a_j^T x(\hat{\lambda}) &\geq b_j, \quad \text{per ogni } j \notin I(\tilde{x}). \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Poiché per la (5.2.1) per ogni  $\lambda \geq 0$  risulta  $a_j^T x(\lambda) = b_j$  quando  $j \in I(\tilde{x})$ , il punto  $\hat{x} = x(\hat{\lambda})$  appartiene al poliedro  $P$ . Dalla (5.2.2), ricordando che  $j_0 \notin I(\tilde{x})$ , si ha che il vincolo  $j_0$ -esimo non era attivo in  $\tilde{x}$  ed è attivo in  $\hat{x} = x(\hat{\lambda})$  che è un punto del poliedro. Quindi, spostandosi da  $\tilde{x}$  a  $\tilde{x} + \hat{\lambda}d$ , il numero dei vincoli attivi aumenta di almeno uno.

Dobbiamo ora dimostrare che  $a_{j_0}^T$  (ovvero la riga della matrice  $A$  corrispondente al vincolo che è divenuto attivo passando da  $\tilde{x}$  a  $\tilde{x} + \hat{\lambda}d$ ) non può essere ottenuta come combinazione lineare delle righe  $a_i^T$ ,  $i \in I(\tilde{x})$  (ovvero delle righe corrispondenti ai vincoli attivi in  $\tilde{x}$ ). Infatti, se per assurdo fosse

$$a_{j_0} = \sum_{i \in I(\tilde{x})} \mu_i a_i \quad \text{con } \mu_i \in \mathbb{R}, \quad \mu_i \text{ non tutti nulli,} \quad (5.2.3)$$

moltiplicando scalarmente per il vettore  $d$  entrambe i membri della (5.2.3) e tenendo conto che  $a_i^T d = 0$  per ogni  $i \in I(\tilde{x})$ , si avrebbe

$$a_{j_0}^T d = \sum_{i \in I(\tilde{x})} \mu_i a_i^T d = 0 \quad (5.2.4)$$

e questo è assurdo perché  $j_0 \notin I(\tilde{x})$  ed invece dalla (5.2.2) risulterebbe

$$b_{j_0} = a_{j_0}^T x(\hat{\lambda}) = a_{j_0}^T (\tilde{x} + \hat{\lambda}d) = a_{j_0}^T \tilde{x}.$$

Perciò, spostandosi da  $\tilde{x}$  a  $\tilde{x} + \hat{\lambda}d$ , il numero dei vincoli attivi linearmente indipendenti è almeno pari a  $k + 1$ . Inoltre, ricordando che  $c^T d < 0$  e  $\hat{\lambda} > 0$ , si ha che  $c^T \hat{x} = c^T \tilde{x} + \hat{\lambda}c^T d < c^T \tilde{x}$ . Possiamo quindi concludere che nel caso  $c^T d < 0$  l'affermazione del lemma è verificata.

- Secondo caso:  $c^T d = 0$ . Consideriamo la retta  $x(\lambda) = \tilde{x} + \lambda d$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Poiché si è supposto che il poliedro  $P$  non contenga rette, ragionando nello stesso modo del caso precedente, ci si può spostare da  $\tilde{x}$  lungo la direzione  $d$  e determinare un punto  $\hat{x}$  in cui il numero dei vincoli attivi linearmente indipendenti è maggiore del numero dei vincoli attivi linearmente indipendenti in  $\tilde{x}$ . Inoltre, poiché  $c^T d = 0$  si ha  $c^T \hat{x} = c^T \tilde{x} + \hat{\lambda}c^T d = c^T \tilde{x}$ . Quindi, anche in questo caso, l'affermazione del lemma risulta verificata.

□

Utilizzando il Lemma precedente, possiamo ora dimostrare il Teorema 5.2.1.

#### **Dimostrazione Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare.**

*Dimostrazione:* Le tre affermazioni 1, 2 e 3 sono ovviamente mutuamente escludentesi (cioè al più una di esse può essere vera). Per dimostrare il teorema è allora sufficiente far vedere che almeno una di esse è vera. A questo fine basta mostrare che se né l'affermazione 1 né quella 2 sono verificate allora l'affermazione 3 è verificata. Supponiamo dunque che  $P$  sia non vuoto e che il problema di Programmazione Lineare (PL) non sia illimitato inferiormente.

Se  $P$  è costituito da un solo punto  $\bar{x}$ , cioè  $P = \{\bar{x}\}$ , allora  $\bar{x}$  è un vertice ed è anche, ovviamente, una soluzione ottima del problema; il teorema è quindi vero in questo caso.

Consideriamo allora il caso non banale in cui  $P$  è costituito da infiniti punti<sup>3</sup>. Per dimostrare che l'affermazione 3 è vera dimostriamo utilizziamo il risultato del Lemma 5.2.1, ovvero che se  $\tilde{x}$  è un punto di  $P$  che non è un vertice, è possibile trovare un punto  $\hat{x}$  appartenente a  $P$  tale che  $c^T \hat{x} \leq c^T \tilde{x}$  e il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in  $\hat{x}$  è maggiore che in  $\tilde{x}$ . Il punto  $\hat{x}$  appartiene a  $P$  e sono possibili allora due casi: o  $\hat{x}$  è un vertice di  $P$  o è possibile applicare di nuovo il risultato del Lemma 5.2.1 e concludere che esiste un ulteriore punto  $\check{x}$  in  $P$  in cui il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti è strettamente maggiore del numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in  $\hat{x}$  e  $c^T \check{x} \leq c^T \hat{x}$ . Iterando

<sup>3</sup>Se il poliedro  $P$  contiene almeno due punti distinti deve contenere, in quanto insieme convesso, tutto il segmento che congiunge questi due punti. Siccome questo segmento contiene infiniti punti possiamo concludere che un poliedro non vuoto o contiene un singolo punto o ne contiene infiniti

questo procedimento, e tenendo conto che il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in un punto può essere al più  $n$ , un semplice ragionamento induttivo mostra che dal Lemma 5.2.1 possiamo dedurre che

Se  $\tilde{x}$  è un punto di  $P$  che non è un vertice,  
allora è possibile trovare un vertice  $\hat{v}$  di  $P$  tale che (5.2.5)  
 $c^T \hat{v} \leq c^T \tilde{x}.$

Siano, ora,  $\{v_1, \dots, v_p\}$  i vertici di  $P$  (ricordiamo che i vertici sono sicuramente in numero finito, si veda il Corollario 5.1.17); indichiamo con  $v^*$  uno di questi vertici per cui  $c^T v^* \leq c^T v_h$  per ogni  $h = 1, \dots, p$ . Dalla definizione di  $v^*$  e dalla (5.2.5) segue immediatamente che per ogni punto  $\tilde{x} \in P$  possiamo scrivere, per un qualche vertice  $\hat{v}$ :

$$c^T v^* \leq c^T \hat{v} \leq c^T \tilde{x}.$$

Questo mostra che il vertice  $v^*$  è una soluzione ottima del problema di Programmazione Lineare (PL) e che l'affermazione 3 è vera. □

Un'immediata conseguenza del Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare è che se il poliedro è un politopo non vuoto, allora il problema ammette soluzione ottima in un vertice del politopo. Questo risultato è formalizzato nel seguente corollario.

**Corollario 5.2.2** *Sia dato il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases}$$

*Se il poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$  è un politopo non vuoto, allora il problema di Programmazione Lineare ammette soluzione ottima (finita) in un vertice del poliedro  $P$ .*

**Osservazione 5.2.3** La struttura lineare di un problema di Programmazione Lineare è l'elemento chiave che permette di ottenere un risultato così forte <sup>4</sup> circa la possibile soluzione di un problema di ottimizzazione. Infatti, come controesempio si consideri il problema in una variabile reale

$$\begin{cases} \min \frac{1}{x} \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Questo problema non ammette soluzione ottima pur non essendo illimitato inferiormente. L'alternativa espressa dal Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare in questo caso non vale proprio perché viene meno l'ipotesi fondamentale di linearità della funzione obiettivo.

**Osservazione 5.2.4** Se un problema di Programmazione Lineare, come accade spesso nei problemi provenienti da modelli reali, presenta limitazioni inferiori e superiori sulle variabili cioè è del tipo

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ l \leq x \leq u \end{cases}$$

---

<sup>4</sup>In effetti è possibile ottenere risultati ancora più forti di quelli fin qui elencati. Usando il Teorema 5.1.6 possiamo sostituire l'ipotesi che il poliedro “non contenga rette” con quella che “possieda almeno un vertice”. È possibile mostrare che in effetti questa ipotesi (che il poliedro “non contenga rette” o, equivalentemente “possieda almeno un vertice”) è necessaria solo per dimostrare che nel caso 3 del Teorema 5.2.1 se esistono vertici allora c'è almeno una soluzione ottima che cade su un vertice. La dimostrazione di questo risultato più forte richiede però strumenti analitici più complessi di quelli usati in questo corso. Vogliamo comunque riportare, per completezza, questa versione del Teorema 5.2.1.

**Teorema 5.2.2** *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases} \quad (\text{PL})$$

*Una e una sola delle seguenti tre affermazioni è vera:*

1. *Il problema (PL) è inammissibile, ovvero il poliedro  $P$  è vuoto;*
2. *Il problema (PL) è illimitato inferiormente;*
3. *Il problema (PL) ammette soluzioni ottime.*

*Nel caso in cui il problema ammetta soluzioni ottime e se  $P$  ammette almeno un vertice, allora almeno una soluzione ottima cade su un vertice.*

dove  $l \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}^n$  sono rispettivamente una limitazione inferiore e superiore delle variabili, allora il poliedro che descrive l'insieme ammissibile è un politopo e quindi vale la caratterizzazione delle soluzioni data dal Corollario 5.2.2.

È interessante approfondire un poco la natura dell'insieme delle soluzioni di un problema di PL. Nello studio della risoluzione grafica di problemi di PL (cfr. paragrafo 4.3) si sarà notato che sembra essere vero che se un problema di PL ha più di una soluzione ottima, allora ne ammette infinite. Ci proponiamo qui di precisare questa affermazione.

Sia dato un poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  e un corrispondente problema di PL:

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P. \end{cases}$$

Supponiamo che questo problema abbia (almeno) una soluzione ottima  $x^*$ . Indichiamo con  $z^* = c^T x^*$  il *valore ottimo*, cioè il valore assunto dalla funzione obiettivo all'ottimo. È evidente che se  $\hat{x}^*$  è una qualunque altra soluzione ottima, risulta  $z^* = c^T \hat{x}^*$ . Vice versa, se un punto  $x$  è ammissibile, cioè se  $x \in P$  e risulta  $c^T x = z^*$ , allora  $x$  è una soluzione ottima per definizione. Riassumendo possiamo affermare che l'insieme delle soluzioni ottime del problema di PL dato è

$$P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = z^*\}.$$

Questo mostra immediatamente che l'insieme delle soluzioni ottime di un problema di Programmazione Lineare è un poliedro contenuto in  $P$ , in quanto intersezione di  $P$ , definito da un insieme di equazioni e disequazioni lineari con l'iperpiano

$$\{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = z^*\}.$$

Quindi vale il seguente teorema.

**Teorema 5.2.3** *Sia dato un problema di PL*

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P. \end{cases}$$

*L'insieme delle soluzioni ottime di questo problema è un poliedro contenuto in  $P$ .*

# 6

---

## *Il metodo del simplexso*

Dato un problema di Programmazione Lineare è ovviamente necessario, se il modello fatto deve essere di qualche utilità, essere capaci di “risolverlo”. Nel caso della programmazione lineare si dice che un algoritmo *risolve* un problema di Programmazione Lineare se esso è capace di determinare correttamente se il problema dato ha insieme ammissibile vuoto oppure è illimitato oppure, se nessuno di questi due casi risulta verificato, sia capace di individuare una soluzione ottima. Esistono molti algoritmi per la risoluzione di problemi di Programmazione Lineare, spesso implementati in pacchetti software molto diffusi e utilizzati. In questo capitolo forniamo una descrizione della struttura logica del *Metodo del Simplexso* senza però entrare nei suoi dettagli implementativi. Come già accennato, il Metodo del Simplexso è stato il primo algoritmo pratico per la risoluzione di problemi di Programmazione Lineare ed è tuttora il più usato e uno dei più efficienti in pratica.

Per introdurre il modo di operare del Metodo del Simplexso iniziamo con il ricordare che *un poliedro ha sempre un numero finito di vertici* (eventualmente il numero dei vertici, come abbiamo già avuto modo di osservare, può essere zero; in questa analisi introduttiva, supponiamo per semplicità che ciò non si verifichi). Comunque, benchè finito, il numero di vertici di un poliedro può essere arbitrariamente alto. Basta pensare all’area racchiusa da un poligono nel piano. All’aumentare del numero dei lati cresce il numero di vertici. Per fare un altro esempio, consideriamo il poliedro

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Se  $n = 1$  abbiamo ovviamente un segmento, con 2 vertici ( $2 = 2^1$ ). Se  $n = 2$  abbiamo un quadrato, con 4 vertici ( $4 = 2^2$ ). Se  $n = 3$  abbiamo un cubo con 8

vertici ( $8 = 2^3$ ). In generale, per  $n > 3$  l'insieme  $I$  è noto come ipercubo di dimensione  $n$  e ha un numero di vertici pari a  $2^n$ , che quindi cresce *esponenzialmente* con la dimensione dello spazio.

Supponiamo di avere un problema di Programmazione Lineare

$$\min c^T x$$

$$x \in P,$$

dove  $P$  è un poliedro che non contiene rette, e di sapere che il problema ammette (almeno) una soluzione ottima. Allora, il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare ci autorizza a limitare la ricerca di una soluzione ottima ai vertici del poliedro  $P$ . Una procedura teorica per la ricerca dell'ottimo, potrebbe essere quindi:

1. Calcola tutti i vertici  $v_1, v_2, \dots, v_q$  del poliedro  $P$ .
  2. Valuta la funzione obiettivo in tutti i vertici e denota con  $v^*$  il vertice per cui si raggiunge il valore minimo:
- $$c^T v^* \leq c^T v_i \quad i = 1, 2, \dots, q.$$
3.  $v^*$  è una soluzione ottima del problema.

Ovviamente questa strategia deve essere completata da procedure in grado di determinare se  $P$  è vuoto o se il problema è illimitato. Inoltre bisogna essere in grado di calcolare i vertici. Ma concettualmente questa è una procedura teoricamente valida. Il problema principale di questo modo di procedere è che siccome il numero di vertici può, ed in generale è, altissimo, essa può diventare computazionalmente così oneroso da risultare impraticabile. Il Metodo del Simplex, nella sostanza, è un modo un po' più raffinato di realizzare lo schema precedente e può, molto grossolanamente, essere schematizzato come segue:

1. Determina un vertice iniziale  $v$  di  $P$ ;
2. Decidi se  $v$  è una soluzione ottima;
3. Se  $v$  non è una soluzione ottima allora determina “in modo intelligente” un nuovo vertice  $v$  di  $P$  e torna al passo 2.

Il cuore del metodo è racchiuso nella frase “in modo intelligente”. Questo modo intelligente di determinare un nuovo vertice, una volta stabilito che quello corrente non è ottimo, deve essere tale da garantire che, almeno nella maggioranza dei casi

pratici, il metodo non debba visitare che una “piccola” frazione dei vertici di  $P$  prima di trovare un vertice ottimo.

Il Metodo del Simplex si applica a problemi di Programmazione Lineare “*in forma standard*”, ovvero a problemi che presentano una particolare struttura adatta ad essere sfruttata da un punto di vista algoritmico. Quindi, questo capitolo è strutturato nel seguente modo: nel prossimo paragrafo 6.1 viene introdotta la “*forma standard*”; nel paragrafo 6.2 analizziamo in dettaglio i vertici della regione ammissibile di un problema in forma standard; nei successivi paragrafi di questo capitolo studiamo il metodo del simplex.

## 6.1 LA FORMA STANDARD

Fino ad ora abbiamo scritto un generico problema di Programmazione Lineare nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases} \quad (6.1.1)$$

Un problema di Programmazione Lineare in questa forma viene detto problema in *forma generale*. Il Metodo del Simplex assume che il problema di Programmazione Lineare sia nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (6.1.2)$$

che viene chiamata *forma standard*. Come vedremo un problema scritto in forma standard presenta importanti proprietà che possono essere sfruttate nella risoluzione di un problema di Programmazione Lineare. Osserviamo innanzitutto che il poliedro di un problema di Programmazione Lineare in forma standard (che d’ora in poi chiameremo “poliedro in forma standard”), è contenuto nell’ortante positivo e quindi non può contenere rette. Di conseguenza, ad un problema in forma standard si applica sempre il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare. Inoltre, la struttura dell’insieme ammissibile di un problema in forma standard permette di caratterizzare i vertici dell’insieme ammissibile stesso.

Preliminarmente dimostriamo che assumere che un problema di Programmazione Lineare sia in forma standard non fa perdere di generalità in quanto qualunque problema di Programmazione Lineare può essere trasformato in un problema equivalente in forma standard. Infatti se si ha un problema di Programmazione Lineare nella forma (6.1.1) si può passare ad un problema equivalente con soli vincoli di uguaglianza introducendo un vettore  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \geq 0$ , e riscrivendo il problema nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax - u = b \\ u \geq 0. \end{cases}$$

Le variabili  $u$  vengono chiamate *variabili di surplus* e rappresentano la differenza non negativa tra il primo e il secondo membro dei vincoli di disuguaglianza. È immediato ricondurre ad un problema con soli vincoli di uguaglianza anche un problema di Programmazione Lineare scritto nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \leq b. \end{cases} \quad (6.1.3)$$

Infatti sarà sufficiente introdurre un vettore  $w \in \mathbb{R}^m$ ,  $w \geq 0$ , e riscrivere il problema nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax + w = b \\ w \geq 0. \end{cases}$$

Le variabili  $w$  vengono chiamate *variabili di slack*.

È inoltre sempre possibile ricondurre un qualsiasi problema di Programmazione Lineare ad un problema equivalente che presenti tutte le variabili vincolate ad essere non negative. Questo può essere facilmente ottenuto attraverso la trasformazione di variabili

$$x = x^+ - x^- \quad (6.1.4)$$

dove  $x^+ \geq 0$  e  $x^- \geq 0$ . Se infatti consideriamo un problema di Programmazione Lineare nella forma (6.1.1), la trasformazione (6.1.4) permette di riscrivere il problema nella forma

$$\begin{cases} \min c^T(x^+ - x^-) \\ A(x^+ - x^-) \geq b \\ x^+ \geq 0, \quad x^- \geq 0 \end{cases} \quad (6.1.5)$$

in cui tutte le variabili sono non negative. Si osservi che l'insieme ammissibile di un tale problema con tutte le variabili non negative, è un poliedro che non contiene rette.

**Osservazione 6.1.1** Ovviamente il problema (6.1.5) può essere posto nella seguente forma vettoriale

$$\begin{cases} \min \tilde{c}^T \tilde{x} \\ \tilde{A}\tilde{x} \geq b \\ \tilde{x} \geq 0 \end{cases} \quad (6.1.6)$$

dove  $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{c} = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}$  e  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & -A \end{pmatrix}$ . Da questa rappresentazione dell'insieme ammissibile, riscrivendo i vincoli in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ I_n \end{pmatrix} \tilde{x} \geq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.1.7)$$

si vede immediatamente che i coefficienti delle ultime  $n$  righe della matrice dei vincoli formano un insieme di vettori linearmente indipendenti (sono i versori degli assi coordinati).

Da queste considerazioni si deduce immediatamente che si può passare da un problema di Programmazione Lineare in forma generale (6.1.1) ad uno in forma standard (6.1.2) semplicemente introducendo i vettori  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y, z, u \geq 0$  e riscrivendo il problema nella forma

$$\begin{cases} \min c^T(y - z) \\ A(y - z) - u = b \\ y \geq 0, z \geq 0, u \geq 0. \end{cases}$$

Viceversa, avendo un problema di Programmazione Lineare in forma standard,

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

si può passare facilmente trasformarlo in uno in forma generale riscrivendolo

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ -Ax \geq -b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \min c^T x \\ \bar{A}x \geq \bar{b} \end{cases}$$

dove

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ I_{n \times n} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0_n \end{pmatrix}$$

**Esempio 6.1.2** Si consideri il problema

$$\begin{cases} \min (12x_1 + x_2 + 5x_3) \\ x_2 - 2x_3 \geq 7 \\ 2x_1 + x_3 \leq 10 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Questo problema può essere trasformato in un problema equivalente con vincoli di sola uguaglianza mediante l'introduzione di una variabile di surplus  $x_4$  e una variabile di slack  $x_5$  e scrivendo il problema

$$\begin{cases} \min (12x_1 + x_2 + 5x_3) \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_3 + x_5 = 10 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Questo problema può essere ulteriormente trasformato in un problema equivalente con tutte le variabili vincolate in segno. È sufficiente rappresentare la variabile  $x_2$  che non è vincolata in segno nella forma  $x_2 = x_2^+ - x_2^-$  e scrivere il problema nella forma equivalente

$$\begin{cases} \min (12x_1 + x_2^+ - x_2^- + 5x_3) \\ x_2^+ - x_2^- - 2x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_3 + x_5 = 10 \\ 3x_1 - x_2^+ + x_2^- - 2x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

□

## 6.2 VERTICI E SOLUZIONI DI BASE

Come abbiamo visto nell'introduzione di questo capitolo, un punto centrale del metodo del simplex è la visita dei vertici del poliedro ammissibile. È quindi molto importante disporre di metodi efficaci per l'individuazione e l'analisi dei vertici di un poliedro. Uno dei vantaggi di considerare i problemi di programmazione lineare in forma standard è la particolare caratterizzazione che si può dare per i vertici dei loro insiemi ammissibili.

Per descrivere tale caratterizzazione, consideriamo un generico poliedro in forma standard

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}, \quad (6.2.1)$$

dove  $A$  è una matrice  $m \times n$  e dove supponiamo che valga la seguente assunzione.

**Assunzione:** *il poliedro  $P$  è non vuoto e  $\text{rango}(A) = m$ .*

Notiamo che l'assunzione fatta implica  $m \leq n$  e garantisce l'esistenza di almeno una sottomatrice  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  non singolare. Notiamo inoltre che, come vedremo successivamente, tale assunzione non è limitativa.

**Teorema 6.2.1** *Sia  $\bar{x}$  un punto appartenente al poliedro  $P$  definito come in (6.2.1). Allora  $\bar{x}$  è un vertice di  $P$  se e solo se le colonne di  $A$  relative alle componenti positive di  $\bar{x}$  sono linearmente indipendenti.*

**Dimostrazione:** Riscrivendo le equazioni  $Ax = b$  nella definizione del poliedro (6.2.1) come coppia di disequazioni abbiamo che  $P$  è definito dal sistema di

disequazioni

$$\begin{aligned} Ax &\geq b \\ -Ax &\geq -b \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

È ovvio che, siccome il punto  $\bar{x}$  è ammissibile, soddisfa le prime  $2m$  disequazioni all'uguaglianza. Supponiamo inoltre, senza perdita di generalità, che le prime  $r$  variabili siano strettamente positive, mentre le ultime  $n - r$  sono nulle. Perciò si ha:

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= b \\ -A\bar{x} &= -b \\ \bar{x}_{r+1} &= 0 \\ &\vdots \\ \bar{x}_n &= 0. \end{aligned}$$

Ora, indicando con  $e_i$  un vettore di  $\mathbb{R}^n$  con tutte componenti nulle ad eccezione della  $i$ -esima che è pari ad 1, ovvero  $e_i^T = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , ricordando che  $\bar{x}_i = e_i^T \bar{x}$  ed il Teorema 5.1.5 (in particolare la (5.1.2)), abbiamo che  $\bar{x}$  è un vertice se e solo se il rango della matrice dei vincoli attivi è  $n$ , cioè se e solo se

$$\begin{aligned} \text{rango} \begin{pmatrix} A \\ -A \\ e_{r+1}^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{pmatrix} &= \text{rango} \begin{pmatrix} A \\ 0_{(n-r) \times r} & I_{(n-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} = \\ &= \text{rango} \begin{pmatrix} a_1 \cdots a_r & a_{r+1} \cdots a_n \\ 0_{(n-r) \times r} & I_{(n-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} = n. \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Usando la definizione di rango, l'ultima uguaglianza della (6.2.2) è equivalente al fatto che

$$\begin{pmatrix} a_1 \cdots a_r & a_{r+1} \cdots a_n \\ 0_{(n-r) \times r} & I_{(n-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \text{implica} \quad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 0. \quad (6.2.3)$$

Sfruttando la sua particolare struttura, l'implicazione (6.2.3) può essere riscritta nella forma:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \cdots a_r \\ z \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} a_{r+1} \cdots a_n \\ 0_{(n-r) \times r} \end{pmatrix} z &= 0 & \text{implica} & y = 0 \quad \text{e} \quad z = 0, \\ & & & z = 0 \end{aligned}$$

che, ovviamente, è equivalente al fatto che

$$\begin{pmatrix} a_1 \cdots a_r \\ z \end{pmatrix} y = 0 \quad \text{implica} \quad y = 0, \quad (6.2.4)$$

cioè all'indipendenza lineare delle colonne  $a_1, \dots, a_r$  corrispondenti alle componenti positive di  $\bar{x}$ .  $\square$

Un conseguenza immediata del precedente teorema è il seguente corollario.

**Corollario 6.2.1** *Sia  $\bar{x}$  un punto appartenente al poliedro  $P$  definito come in (6.2.1). Se  $\bar{x}$  è un vertice di  $P$  allora almeno  $n - m$  componenti di  $\bar{x}$  sono nulle.*

**Esempio 6.2.2** Consideriamo il sistema

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 4x_6 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 2x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 5 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 & = & 7 \\ & & x \geq 0 \end{array} \quad (6.2.5)$$

e il punto  $x = (2, 1, 1, 1, 0, 0)^T$ . Si verifica facilmente per sostituzione che il punto  $x$  è una soluzione ammissibile del sistema considerato, ma non è un suo vertice. Infatti le colonne di  $A$  relative alle componenti di  $x$  positive

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

non sono linearmente indipendenti (cfr. Corollario 6.2.1)  $\square$

**Esempio 6.2.3** Consideriamo il poliedro  $P$  definito dal seguente sistema

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & 2 \\ & & x \geq 0, \end{array}$$

e i due punti  $(1, 1, 0, 0)^T$  e  $(0, 0, 0, 1)^T$ . Si verifica immediatamente che i due punti sono ammissibili o, in altri termini, appartengono al poliedro  $P$ . Inoltre, applicando il Teorema 6.2.1, si può constatare che i due punti sono vertici di  $P$ . Nel primo caso infatti

$$\det(a_1 a_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

e quindi l'insieme costituito dalla prima e seconda colonna, corrispondenti alle componenti del punto maggiori di 0, è linearmente indipendente. Nel secondo

caso il risultato è ancora più ovvio perché l'insieme costituito dalla sola quarta colonna (diversa da zero) è banalmente linearmente indipendente. Notiamo che per tutti e due i punti il numero di componenti maggiore di zero è minore o uguale a  $m = 2$ .  $\square$

Introduciamo ora alcune definizioni che permetteranno di dare una importante caratterizzazione dei vertici di un poliedro in forma standard. Il punto di partenza è la definizione di sottomatrice di matrice base della matrice  $A$

**Definizione 6.2.4** *Sia  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  la matrice dei coefficienti di un poliedro in forma standard (6.2.1), e siano  $\{a_1, \dots, a_n\}$  l'insieme delle sue colonne. Una sottomatrice  $B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_m}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  di  $A$  non singolare è detta matrice di base di  $A$ .*

Scelta una particolare matrice di base  $B$  di  $A$ , si possono introdurre le seguenti definizioni.

**Definizioni 6.2.5** *Data una matrice di base  $B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_m})$  di  $A$ :*

- *la sottomatrice  $N = (a_{j_{m+1}}, \dots, a_{j_n}) \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$  di  $A$  è detta matrice delle colonne fuori base di  $A$ ;*
- *l'insieme  $I_B = \{j_1, \dots, j_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$  viene detto insieme degli indici di base;*
- *l'insieme  $I_N = \{j_{m+1}, \dots, j_n\} \subseteq \{1, \dots, n\}$  viene detto insieme degli indici fuori base;*
- *le componenti  $x_i$ ,  $i \in I_B$  vengono dette variabili di base;*
- *le componenti  $x_i$ ,  $i \in I_N$  vengono dette variabili fuori base;*
- *ogni vettore  $x \in \mathbb{R}^n$  può essere partizionato in due sottovettori*

$$x_B = \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad x_N = \begin{pmatrix} x_{j_{m+1}} \\ \vdots \\ x_{j_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-m},$$

*detti vettore delle variabili di base ( $x_B$ ) e vettore delle variabili fuori base ( $x_N$ ).*

**Esempio 6.2.6** Sia dato il seguente sistema

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & + & x_6 & = & 7 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & + & 2x_6 & = & 8 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & + & x_6 & = & 2 \\ & & & & & & & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

Consideriamo la sottomatrice di  $A$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ottenuta considerando nell'ordine la sesta, prima e quarta colonna della matrice  $A$  del sistema. In questo caso

$$I_B = \{j_1 = 6, j_2 = 1, j_3 = 4\},$$

e, poiché si verifica facilmente che  $\det B = -3$ , abbiamo che  $B$  è una matrice di base di  $A$ , le colonne  $a_6$ ,  $a_1$  e  $a_4$  sono colonne di base e gli indici 6, 1 e 4 sono indici di base.

Consideriamo ora, invece, la sottomatrice di  $A$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ottenuta considerando nell'ordine la seconda, quinta e quarta colonna della matrice  $A$  del sistema. In questo caso

$$I_B = \{j_1 = 2, j_2 = 5, j_3 = 4\},$$

e, poiché si verifica facilmente che  $\det B = 0$ , abbiamo che  $B$  non una matrice di base di  $A$ .  $\square$

Utilizzando gli insiemi di indici  $I_B$  e  $I_N$  si può riscrivere il sistema  $Ax = b$  nella seguente maniera:

$$\sum_{i \in I_B} a_{j_i} x_{j_i} + \sum_{i \in I_N} a_{j_i} x_{j_i} = b. \quad (6.2.6)$$

Utilizzando i sottovettori  $x_B$  e  $x_N$ , il sistema (6.2.6) può essere posto nella forma:

$$Bx_B + Nx_N = b \quad (6.2.7)$$

oppure nella forma:

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b. \quad (6.2.8)$$

Data una matrice di base  $B$ , anche il vettore  $c$  dei coefficienti della funzione obiettivo può essere decomposto nei due sottovettori:

$$c_B = \begin{pmatrix} c_{j_1} \\ \vdots \\ c_{j_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad c_N = \begin{pmatrix} c_{j_{m+1}} \\ \vdots \\ c_{j_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-m},$$

che rappresentano i coefficienti di costo delle variabili di base e quelli delle variabili fuori base.

Un problema in forma standard può quindi essere riscritto nella forma equivalente:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N & (6.2.9) \\ & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}, \end{aligned}$$

oppure nella forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N & (6.2.10) \\ & x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\ & x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}, \end{aligned}$$

**Osservazione 6.2.7** Un problema di Programmazione Lineare in forma standard può essere scritto nella forma equivalente (6.2.9) in tanti modi diversi quante sono le matrici di base di  $A$ .

Utilizzando delle particolari matrici di base del sistema  $Ax = b$  è possibile caratterizzare delle particolari soluzioni ammissibili del problema in forma standard (6.2.9) (oppure (6.2.10)), a questo scopo sono necessarie altre definizioni.

I sistemi (6.2.7) e (6.2.8) mettono in evidenza che il sistema  $Ax = b$  può essere risolto esprimendo il vettore delle variabili base  $x_B$  in funzione del vettore delle variabili fuori base. La particolare soluzione del sistema  $Ax = b$  che si ottiene annullando il vettore delle variabili fuori base viene caratterizzata dalla seguente definizione.

**Definizione 6.2.8** *Data una matrice di base  $B$  di  $A$ . Un vettore  $\bar{x}$  è detto Soluzione di Base del sistema  $Ax = b$  se i suoi sottovettori  $\bar{x}_B$  e  $\bar{x}_N$  sono tali che:*

$$\begin{aligned}\bar{x}_B &= B^{-1}b, \\ \bar{x}_N &= 0_{n-m}\end{aligned}$$

**Definizione 6.2.9** *Dato un problema in forma standard (6.2.9), una matrice di base  $B$  di  $A$  è detta matrice di base ammissibile se risulta*

$$B^{-1}b \geq 0_m.$$

**Definizione 6.2.10** *Dato un problema in forma standard (6.2.9) e data una matrice di base ammissibile  $B$  di  $A$ . Un vettore  $\bar{x}$  è detto Soluzione di Base Ammissibile (SBA) del problema (6.2.9) se i suoi sottovettori  $\bar{x}_B$  e  $\bar{x}_N$  sono tali che:*

$$\begin{aligned}\bar{x}_B &= B^{-1}b, \\ \bar{x}_N &= 0_{n-m}\end{aligned}$$

**Esempio 6.2.11** Consideriamo il sistema dell'Esempio 6.2.6 e la prima delle basi ivi presa in considerazione.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

con

$$I_B = \{j_1 = 6, j_2 = 1, j_3 = 4\},$$

Sappiamo già che  $B$  è una matrice di base, verifichiamo se è una matrice di base ammissibile. Risulta

$$B^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{e quindi} \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Quindi  $B$  è una base ammissibile. La soluzione di base ammissibile associata è

$$\begin{aligned}\bar{x}_B &= \begin{pmatrix} x_6 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \bar{x}_N &= \begin{pmatrix} x_6 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ovvero

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora una matrice di base diversa, più precisamente

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

corrispondente a

$$I_B = \{j_1 = 1, j_2 = 2, j_3 = 6\}.$$

È facile verificare che  $B$  è una matrice di base (il suo determinante è diverso da 0), e che la soluzione di base ad essa associata è

$$\begin{aligned}\bar{x}_B &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1 \\ 16/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \bar{x}_N &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ovvero

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16/3 \end{pmatrix}.$$

che, ovviamente, non è ammissibile perché la prima e seconda componente sono negative.  $\square$

Possiamo ora studiare la relazione tra SBA e vertici. Vale il seguente teorema.

**Teorema 6.2.2** *Sia  $\bar{x}$  un punto appartenente al poliedro  $P$  definito come in (6.2.1). Allora  $\bar{x}$  è un vertice di  $P$  se e solo se è una SBA.*

*Dimostrazione:* Se  $\bar{x}$  è una SBA, abbiamo, per la definizione stessa di SBA, che  $n - m$  variabili sono sicuramente nulle, quindi vale l'inclusione  $\{i : \bar{x}_i > 0\} \subseteq I_B$ . Quindi abbiamo che le colonne della matrice  $A$  corrispondenti a variabili positive sono un sottoinsieme delle colonne della matrice di base  $B$ . Ma per la definizione di matrice di base, le colonne di  $B$  sono linearmente indipendenti e quindi saranno linearmente indipendenti anche le colonne di qualunque suo sottoinsieme di colonne. Ma allora  $\bar{x}$  è un vertice per il Teorema 6.2.1.

Supponiamo ora che  $\bar{x}$  sia un vertice e mostriamo che esiste una base la cui soluzione di base associata coincide con  $\bar{x}$ . Supponiamo, senza perdita di generalità, che le prime  $r$  componenti di  $\bar{x}$  siano positive e che le restanti componenti siano nulle, supponiamo, cioè, che  $\{i : \bar{x}_i > 0\} = \{1, \dots, r\}$ . Per il Teorema 6.2.1 abbiamo che le colonne  $a_1 \dots a_r$  sono linearmente indipendenti. Siccome il rango di  $A$  è  $m$ , si ha che  $r \leq m$ . Per il teorema del completamento possiamo trovare  $m - r$  colonne di  $A$  tra le ultime  $n - r$  colonne (supponiamo, senza perdita di generalità, che siano le colonne  $a_{r+1} \dots a_m$ ), tali che le colonne

$$a_1 \dots a_r, a_{r+1} \dots a_m$$

siano linearmente indipendenti. Posto

$$B = (a_1 \dots a_r, a_{r+1} \dots a_m),$$

abbiamo ovviamente che  $B$  è una matrice non singolare. Per far vedere che  $\bar{x}$  è una soluzione di base, sarà ora sufficiente mostrare che

$$\begin{aligned} \bar{x}_B &= B^{-1}b, \\ \bar{x}_N &= 0_{n-m}. \end{aligned}$$

Ricordando che  $r \leq m$ , abbiamo ovviamente che  $\bar{x}_N = 0_{n-m}$ . Quindi per concludere basta mostrare che  $\bar{x}_B = B^{-1}b$  o, equivalentemente, visto che  $B$  è non singolare,  $B\bar{x}_B = b$ . Ma, tenendo conto che  $\bar{x}$  appartiene al poliedro (6.2.1), possiamo scrivere

$$b = A\bar{x} = B\bar{x}_B + N\bar{x}_N = B\bar{x}_B + N0_m = B\bar{x}_B.$$

□

È facile convincersi che il numero di SBA (e quindi il numero di vertici) è finito ed è pari, al massimo, al numero di possibili modi diversi di prendere  $m$  colonne di  $A$  fra  $n$ . Vale cioè il seguente teorema.

**Teorema 6.2.3** Il numero di SBA (cioè di vertici) è finito e pari, al più, a  $\binom{n}{m}$ .

Notiamo che in effetti il numero di SBA può essere inferiore al limite massimo di  $\binom{n}{m}$  perché una volta fissate  $m$  colonne di  $A$  queste potrebbero non essere linearmente indipendenti o, anche nel caso lo fossero, la soluzione di base associata può non essere ammissibile.

**Esempio 6.2.12** Si dato il seguente sistema.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + \frac{5}{2}x_4 &= 4 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= 2 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Esaminiamo tutte le possibili coppie ( $m = 2$ ) di colonne della matrice  $A$ . Applicando le definizioni di base, soluzione di base e soluzione di base ammissibile, otteniamo i risultati riportati qui di seguito.

Indici delle colonne	Base	Soluzione di base	Ammissibile
$\{1, 2\}$	Sì	$(2, 1, 0, 0)^T$	Sì
$\{1, 3\}$	No	—	—
$\{1, 4\}$	Sì	$(-1, 0, 0, 2)^T$	No
$\{2, 3\}$	Sì	$(0, 1, -1, 0)^T$	No
$\{2, 4\}$	Sì	$(0, 1/3, 0, 4/3)^T$	Sì
$\{3, 4\}$	Sì	$(0, 0, 1/2, 2)^T$	Sì

Come si vede su  $\binom{n}{m} = \binom{4}{2} = 6$  possibili combinazioni abbiamo 5 basi di cui solo tre sono ammissibili.  $\square$

Dal Teorema 6.2.1 e dal Teorema 6.2.2 segue immediatamente il seguente corollario.

**Corollario 6.2.13** Una soluzione  $\bar{x} \neq 0_n$  appartenente a  $P$  è una SBA se e solo se le colonne di  $A$  corrispondenti alle componenti di  $\bar{x}$  positive sono linearmente indipendenti.

Il significato del Teorema 6.2.2 e del Corollario 6.2.13 è che i concetti di vertice di  $P$  e quello di soluzione di base ammissibile sono assolutamente equivalenti. In effetti noi siamo partiti da una formalizzazione *geometrica* del concetto di vertice che si presta bene ai ragionamenti intuitivi (si vedano gli esempi di risoluzione grafica presentati nel paragrafo 4.3) e siamo poi arrivati al concetto algebrico (equivalente) di SBA che si presta meglio al tipo di manipolazione che dovremo introdurre per studiare un algoritmo risolutivo di tipo generale per i problemi di Programmazione Lineare. Nel seguito ci riferiremo principalmente al concetto di SBA, ma, al fine di avere un'idea più intuitiva del significato dei risultati cui perverremo, conviene tenere sempre presente anche il suo aspetto geometrico di vertice, così come introdotto in precedenza.

**Osservazione 6.2.14** La corrispondenza tra basi ammissibili e soluzioni di base ammissibili non è biunivoca. Infatti, mentre a ciascuna base ammissibile  $B$  di  $A$  corrisponde una sola soluzione di base ammissibile  $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_{n-m} \end{pmatrix}$ , è possibile che una soluzione di base ammissibile sia associata a due basi ammissibili diverse.

**Esempio 6.2.15** Sia dato il seguente sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Compiliamo una tabella analoga a quella dell'Esempio 6.2.12.

<i>Indici delle colonne</i>	<i>Base</i>	<i>Soluzione di base</i>	<i>Ammissibile</i>
$\{1, 2\}$	Sì	$(-1, 1, 0, 0)^T$	No
$\{1, 3\}$	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì
$\{1, 4\}$	No	—	—
$\{2, 3\}$	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì
$\{2, 4\}$	Sì	$(0, 1, 0, 1)^T$	Sì
$\{3, 4\}$	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì

Si vede che abbiamo 4 basi ammissibili, ma solo 2 soluzioni di base ammissibili (ovvero solo due vertici). Infatti tre basi diverse,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{3, 4\}$ , danno origine ad un'unica soluzione di base,  $(0, 0, 1, 0)^T$ .  $\square$

Risulta abbastanza evidente che la possibilità che a una stessa SBA (equivalentemente, a uno stesso vertice) corrispondano più basi è legato al fatto che nel

vettore  $B^{-1}b$  ci siano degli zeri, che corrispondono al fatto che alcune variabili, che valgono 0, possono indifferentemente essere considerate in base o fuori base. Allo scopo di chiarire il legame tra basi ammissibili e soluzioni ammissibili di base (vertici) introduciamo la seguente definizione.

**Definizione 6.2.16** Una soluzione di base ammissibile  $\bar{x}$  è degenere se il numero di componenti positive di  $\bar{x}$  è minore di  $m$ .

Dalla precedente definizione discende immediatamente che se una soluzione è non degenere allora *ogni* componente del vettore  $B^{-1}b$  è strettamente positiva. Nel caso di soluzioni di base non degeneri la corrispondenza tra basi ammissibili e soluzioni di base ammissibili diviene biunivoca, come mostrato nel seguente teorema.

**Teorema 6.2.4** Se una soluzione di base ammissibile  $\bar{x}$  è non degenere allora esiste una ed una sola base ammissibile  $B$  tale che

$$\begin{aligned}\bar{x}_B &= B^{-1}b, \\ \bar{x}_N &= 0_{n-m}.\end{aligned}$$

*Dimostrazione:* Sia  $\tilde{B}$  una base ammissibile di  $A$  diversa da  $B$  e sia  $\tilde{x}$  la soluzione di base associata a  $\tilde{B}$  ovvero:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{\tilde{B}} &= \tilde{B}^{-1}b, \\ \tilde{x}_{\tilde{N}} &= 0_{n-m}.\end{aligned}$$

Poichè  $\tilde{B} \neq B$  abbiamo che almeno una colonna di  $A$ , ad esempio l' $i$ -esima, appartiene a  $B$  e non appartiene a  $\tilde{B}$ . Di conseguenza,  $i \in I_{\tilde{N}}$  che implica  $\tilde{x}_i = 0$ ; mentre  $i \in I_B$  implica  $\tilde{x}_i > 0$  (poichè  $\bar{x}$  è non degenere). Perciò  $\tilde{x} \neq \bar{x}$ . Abbiamo quindi che ogni base ammissibile diversa da  $B$  produce una soluzione di base ammissibile diversa da  $\bar{x}$  ed il teorema segue.  $\square$

Se una soluzione  $\bar{x}$  è degenere, allora una o più componenti del vettore  $\bar{x}_B = B^{-1}b$  sono nulle. In tal caso, basi ammissibili diverse possono produrre la stessa soluzione ammissibile di base  $\bar{x}$ .

**Esempio 6.2.17** Con riferimento all' Esempio 6.2.15, completiamo la tabella, aggiungendo l'indicazione di soluzione degenere o meno.

<i>Indici delle colonne</i>	<i>Base</i>	<i>Soluzione di base</i>	<i>Ammissibile</i>	<i>Degenero</i>
{1, 2}	Sì	$(-1, 1, 0, 0)^T$	No	-
{1, 3}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì	Sì
{1, 4}	No	-	-	-
{2, 3}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì	Sì
{2, 4}	Sì	$(0, 1, 0, 1)^T$	Sì	No
{3, 4}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì	Sì

### 6.3 INTRODUZIONE AL METODO DEL SIMPLEXO

Il Metodo del Simplex permette di risolvere problemi di Programmazione Lineare in *forma standard*, cioè problemi di Programmazione Lineare della forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n, \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

dove  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Il fatto di considerare solamente problemi di Programmazione Lineare in *forma standard* non costituisce una limitazione infatti, per quanto visto precedentemente nel paragrafo 6.1, è sempre possibile trasformare facilmente un problema di Programmazione Lineare in forma generale in uno in forma standard e viceversa.

Anche il metodo del Simplex trae ispirazione dal Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare e si basa sull'idea di cercare una possibile soluzione del problema di Programmazione Lineare tra i vertici del poliedro che descrive l'insieme ammissibile del problema. Gli elementi caratterizzanti di questo metodo sono:

- la capacità di selezionare in maniera efficiente i vertici che visita;
- il fatto di passare da un vertice ad un'altro senza richiedere inversioni di matrici o soluzioni di sistemi di equazioni;
- l'uso di semplici criteri che permettono di individuare il vertice ottimo o di concludere che il problema di Programmazione Lineare non ammette soluzioni in quanto è illimitato inferiormente.

Come si vedrà nel seguito, queste importanti caratteristiche sono ottenute grazie ad un uso molto efficiente delle basi ammissibili della matrice  $A$ . Tali basi permettono, da una parte, di individuare facilmente un vertice dell'insieme ammissibile (una soluzione di base ammissibile) e, dall'altra parte, di sfruttare i vincoli di uguaglianza dell'insieme ammissibile per esprimere un gruppo di variabili (le variabili di base) in funzione delle altre (le variabili non di base).

Tuttavia ha senso parlare di matrici di base ammissibili e di soluzioni di base ammissibili solamente se il poliedro che rappresenta l'insieme ammissibile del problema di Programmazione Lineare è non vuoto e la matrice dei vincoli di uguaglianza del poliedro ha tutte le righe linearmente indipendenti (cioè ha rango massimo).

Ci sono varie realizzazioni del metodo del simplex che si differenziano nella particolare tecnica usata per verificare che il problema di Programmazione Lineare

è ammissibile, controllare il rango della matrice dei vincoli di uguaglianza e per determinare la prima base ammissibile. Nel seguito descriviamo un particolare realizzazione che si divide in due fasi.

Nella **Fase I** viene controllata l'ammissibilità del problema da risolvere; vengono individuati ed eliminati i vincoli di uguaglianza linearmente dipendenti dagli altri (cioè sovrabbondanti) fino a ottenere un sistema di vincoli di uguaglianza descritto da una matrice a rango massimo; viene identificata una base ammissibile  $B$  della matrice dei vincoli di uguaglianza e vengono calcolati la matrice  $B^{-1}N$  ed il vettore  $B^{-1}b$ .

Nella **Fase II** viene risolto il problema di programmazione lineare, tale risultato è ottenuto partendo dalla base ammissibile  $B$  calcolata nella Fase I ed effettuando i seguenti passi (che utilizzano solamente la matrice  $B^{-1}N$  ed il vettore  $B^{-1}b$ ):

- si calcola la soluzione di base ammissibile associata alla base ammissibile  $B$ ,
- si controlla se la soluzione di base ammissibile soddisfa un criterio sufficiente di ottimalità,
- si controlla se il problema soddisfa un criterio sufficiente di illimitatezza,
- se nessuno dei due criteri è soddisfatto, viene determinata una nuova base ammissibile  $\tilde{B}$  e vengono calcolati la nuova matrice  $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$  ed il nuovo vettore  $\tilde{B}^{-1}b$ ;

i precedenti passi vengono ripetuti fino a determinare una soluzione ottima del problema oppure a concludere che il problema è illimitato inferiormente.

Nel seguito si descriverà ed analizzerà prima la Fase II del metodo del simplex, in quanto l'algoritmo definito per questa fase verrà utilizzato per risolvere il problema della Fase I del metodo del simplex.

## 6.4 LA FASE II DEL METODO DEL SIMPLEXO

La Fase II del metodo del simplexso affronta il problema (6.3.1) supponendo vere le seguenti assunzioni.

**Assunzioni:**

- i) l'insieme ammissibile del problema (6.3.1) è non vuoto;
- ii)  $\text{rango}(A) = m$ ;
- iii) data una base ammissibile  $B$ , si hanno a disposizione la matrice  $B^{-1}N$  ed il vettore  $B^{-1}b$ .

Per quanto visto precedentemente, l'assunzione iii) può essere sfruttata per riscrivere il problema nella forma equivalente:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ & x_B + B^{-1}N x_N = B^{-1}b \\ & x_B \geq 0_m \\ & x_N \geq 0_{n-m}. \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

Questa forma mette in evidenza il fatto che il vettore  $x_B$  è funzione del vettore  $x_N$  infatti:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N. \tag{6.4.2}$$

Sostituendo l'espressione di  $x_B$  nella funzione obiettivo del problema (6.4.1) si ottiene una nuova forma equivalente del problema (6.3.1):

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T B^{-1}b + \gamma^T x_N \\ & x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N \\ & x_B \geq 0_m \\ & x_N \geq 0_{n-m}, \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

dove in vettore  $\gamma$  è detto *vettore dei costi ridotti* ed è dato da:

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

Il problema (6.4.3) viene detto *problema in forma canonica rispetto alla base B*.

Le variabili  $x_B$  possono essere eliminate dal problema (6.4.3), si ottiene il *problema ridotto*:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N \\ & B^{-1}b - B^{-1}N x_N \geq 0_m \\ & x_N \geq 0_{n-m}. \end{aligned} \tag{6.4.4}$$

Il problema (6.4.4), nelle sole variabili  $x_N$ , è equivalente al problema (6.3.1). In particolare, risulta ovvio verificare quanto segue:

un vettore  $\hat{x}$ , costituito dai sottovettori  $\hat{x}_B$  e  $x_N$ , è una soluzione ammissibile di (6.3.1) se e solo se il vettore  $\hat{x}_N$  è una soluzione ammissibile di (6.4.4) e  $\hat{x}_B = B^{-1}b - B^{-1}N\hat{x}_N$ . Inoltre, il valore della funzione obiettivo del problema (6.3.1) calcolata in  $\hat{x}$  è uguale al valore della funzione obiettivo del problema ridotto calcolata in  $\hat{x}_N$ . Di conseguenza, se  $\bar{x}$  è la soluzione di base ammissibile associata alla matrice  $B$  (cioè  $\bar{x}_B = B^{-1}b$  e  $\bar{x}_N = 0_{n-m}$ ), abbiamo che  $\bar{x}_N = 0_{n-m}$  è la soluzione corrispondente del problema ridotto e che  $c^T B^{-1}b$  è il valore della funzione obiettivo per entrambi i problemi.

I coefficienti di  $x_N$  nella funzione obiettivo del problema ridotto sono le componenti del vettore  $\gamma$  da cui segue il nome vettore dei costi (o coefficienti) ridotti.

#### 6.4.1 Criterio di ottimalità

Data una base ammissibile e, quindi, una soluzione di base ammissibile associata, il primo passo che affronta il metodo del simplexso è quello di cercare di capire se questa soluzione di base ammissibile è una soluzione ottima del problema. A questo fine, gioca un ruolo fondamentale il seguente criterio di ottimalità.

**Teorema 6.4.1** *Data una base ammissibile  $B$  della matrice  $A$  del problema (6.3.1). Se il vettore dei costi ridotti è non negativo, ovvero se:*

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B \geq 0_{n-m},$$

*allora la soluzione di base ammissibile  $\bar{x}$  associata alla base  $B$  (cioè il vettore dato da  $\bar{x}_B = B^{-1}b$  e  $\bar{x}_N = 0_{n-m}$ ) è ottima per il problema (6.3.1).*

*Dimostrazione:* Si deve dimostrare che, se il vettore dei coefficienti ridotti è non negativo, allora per una qualunque vettore ammissibile  $x$  risulta

$$c^T x \geq c^T \bar{x}.$$

Sia  $x$  un qualsiasi punto ammissibile del problema (6.3.1) si ha:

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

e ricordando l'espressione (6.4.2) di  $x_B$

$$c^T x = c_B^T B^{-1}b + \gamma^T x_N$$

D'altra parte, per ipotesi si ha  $\gamma \geq 0$  e per l'ammissibilità di  $x$  si ha  $x_N \geq 0$ , da

cui si ottiene:

$$c^T x \geq c_B^T B^{-1} b = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T 0_{n-m} = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T \bar{x}_N = c^T \bar{x}.$$

Ma la precedente relazione mostra che la soluzione di base ammissibile  $\bar{x}$  associata alla matrice di base  $B$  è ottima per il problema (6.3.1).  $\square$

Dal precedente teorema si può derivare il seguente corollario.

**Corollario 6.4.1** *Data una base ammissibile  $B$  della matrice  $A$  del problema (6.3.1). Se il vettore dei costi ridotti è positivo, ovvero se:*

$$\gamma = c_N - (B^{-1} N)^T c_B > 0_{n-m},$$

*allora la soluzione di base ammissibile  $\bar{x}$  associata alla base  $B$  (cioè il vettore che dato da  $\bar{x}_B = B^{-1} b$  e  $\bar{x}_N = 0_{n-m}$ ) è l'unica soluzione ottima del problema (6.3.1).*

*Dimostrazione:* Ripetendo gli stessi argomenti usati nella prova del Teorema 6.4.1, si ottiene che per ogni vettore  $x$  ammissibile

$$c^T x = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N > c_B^T B^{-1} b = c^T \bar{x}, \quad (6.4.5)$$

dove la stretta diseguaglianza segue dall'ipotesi che  $\gamma > 0$  e dal fatto che ogni punto ammissibile  $x$  distinto da  $\bar{x}$  deve avere  $x_N \geq 0_{n-m}$  e  $x_N \neq 0_{n-m}$ . Dalla (6.4.5) segue che la soluzione di base ammissibile è l'unica soluzione ottima per il problema (6.3.1).  $\square$

I risultati appena descritti ci consentono di formulare un *criterio sufficiente di ottimalità* per una soluzione di base ammissibile.

**Esempio 6.4.2** Consideriamo il seguente problema di PL.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Consideriamo la base formata dalle colonne 1, 3 e 4 ( $I_B = \{1, 3, 4\}$  e  $I_N = \{2, 5, 6\}$ ). Abbiamo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -11 \end{pmatrix}.$$

$$c_B = (1, 1, 1)^T, \quad c_N = (2, 1, 1)^T, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo i coefficienti ridotti.

$$\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (10/3, 1/3, 7/3).$$

Siccome i coefficienti ridotti sono tutti positivi abbiamo identificato una soluzione ottima che è anche l'unica. Tale soluzione ottima è data da

$$x_B = B^{-1}b = (1, 0, 2)^T, \quad x_N = 0_3,$$

per cui

$$x = (1, 0, 0, 2, 0, 0, )^T.$$

**Esempio 6.4.3** Consideriamo di nuovo il problema dell'Esempio 6.4.2, e consideriamo la base costituita dalle colonne 1, 4 e 6 ( $I_B = \{1, 4, 6\}$  e  $I_N = \{2, 3, 5\}$ ). Abbiamo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$c_B = (1, 1, 1)^T, \quad c_N = (2, 1, 1)^T, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo i coefficienti ridotti.

$$\gamma = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (-5/2, -7/2, 3/2).$$

Calcoliamo anche la soluzione di base associata.

$$x_B = B^{-1}b = (1, 2, 0)^T, \quad x_N = 0_3,$$

per cui

$$x = (1, 0, 0, 2, 0, 0, )^T.$$

Come si vede la soluzione di base trovata è la stessa trovata nell'Esempio 6.4.2, ed è quindi ottima (si tratta ovviamente di una SBA degenere). Come si vede il test impiegato non è stato capace, in questo caso, di determinare il fatto che la soluzione corrente è ottima. Questo perché il criterio impiegato è solo sufficiente, ma non necessario.

### 6.4.2 Criterio di illimitatezza

Se il criterio di ottimalità non è verificato il metodo del simplex cerca di capire se il problema da risolvere sia illimitato inferiormente.

Il fallimento del criterio di ottimalità implica:

$$\{i \in \{1, \dots, n-m\} : \gamma_i < 0\} \neq \emptyset.$$

In questa situazione si può considerare il seguente criterio sufficiente di illimitatezza (inferiore) del problema (6.3.1).

**Teorema 6.4.2** *Data una base ammissibile  $B$  della matrice  $A$  del problema (6.3.1). Se per qualche indice  $i \in \{1, \dots, n-m\}$  abbiamo che:*

- (i)  $\gamma_i < 0$
- (ii) la colonna  $i$ -esima della matrice  $B^{-1}N$  è tutta non positiva, cioè  $(B^{-1}N)_i \leq 0_m$ ,

*allora il problema (6.3.1) è illimitato inferiormente.*

*Dimostrazione:* La dimostrazione è costruttiva. Facciamo cioè vedere che, nelle ipotesi poste, possiamo trovare una semiretta di punti  $x(\rho)$ , con  $\rho \geq 0$ , sempre contenuta nell'insieme ammissibile e tale che il valore della funzione obiettivo  $c^T x(\rho)$  diminuisca indefinitamente al crescere di  $\rho$ . Consideriamo un vettore del tipo  $x(\rho)$ , con  $\rho \geq 0$ , dato da:

$$x_B(\rho) = B^{-1}b - B^{-1}N x_N(\rho)$$

$$x_N(\rho) = \rho e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \rho \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-esima componente.}$$

Per definizione, il vettore  $x(\rho)$  soddisfa il vincolo  $Ax(\rho) = b$ . Si tratta di una soluzione ammissibile se risulta anche  $x_B(\rho) \geq 0$ ,  $x_N(\rho) \geq 0$ . Per valori positivi di  $\rho$  abbiamo che, ovviamente risulta  $x_N(\rho) \geq 0$ . D'altra parte

$$x_B(\rho) = B^{-1}b - B^{-1}N x_N(\rho) = B^{-1}b - \rho(B^{-1}N)_i \geq 0_m,$$

dove l'ultima diseguaglianza segue dalla (ii). Quindi sono verificati i vincoli del problema (6.3.1). Il valore della funzione obiettivo in  $x(\rho)$  è

$$c_B^T B^{-1}b + \gamma^T x_N(\rho) = c_B^T B^{-1}b + \gamma_i \rho.$$

Da ciò si vede, tenendo conto che  $\gamma_i < 0$  per la (i), che, al crescere di  $\rho$ , la funzione obiettivo del problema (6.3.1) può assumere valori piccoli a piacere in punti ammissibili.  $\square$

**Esempio 6.4.4** Consideriamo il problema di PL seguente.

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - x_2 \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Consideriamo la base formata dalle colonne 1 e 4 ( $I_B = \{1, 4\}$  e  $I_N = \{2, 3\}$ ). Abbiamo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$c_B = (-1, 0)^T, \quad c_N = (-1, 0)^T, \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo la matrice  $B^{-1}N$  e i coefficienti ridotti

$$\begin{aligned} B^{-1}N &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \gamma^T &= c_N^T - c_B^T B^{-1}N = (-2, 1). \end{aligned}$$

Notiamo che in corrispondenza al coefficiente ridotto della prima variabile non in base ( $x_2$ ), che è negativo, la prima colonna della matrice  $B^{-1}N$  contiene solo elementi non positivi. Quindi possiamo concludere che il problema è illimitato inferiormente.

#### 6.4.3 Determinazione di una nuova base ammissibile

Data una soluzione di base ammissibile

$$\bar{x} : \begin{cases} \bar{x}_B = B^{-1}b \\ \bar{x}_N = 0_{n-m} \end{cases}$$

del problema (6.3.1), nel caso in cui i criteri di ottimalità ed illimitatezza, applicati ad  $\bar{x}$ , non siano soddisfatti, il metodo del simplex cerca di determinare una nuova soluzione di base ammissibile o, almeno, una nuova base ammissibile del problema.

Nel seguito, per semplicità, le colonne della matrice  $B^{-1}N$  saranno indicate da  $\{\pi_1, \dots, \pi_{n-m}\}$ , cioè:

$$B^{-1}N = (\pi_1, \dots, \pi_{n-m}).$$

Come già osservato se il criterio di ottimalità non è soddisfatto si ha:

$$\left\{ i \in \{1, \dots, n-m\} : \gamma_i < 0 \right\} \neq \emptyset. \quad (6.4.6)$$

Mentre se non è soddisfatto il criterio di illimitatezza, allora per ogni indice  $h \in \{1, \dots, n-m\}$  tale che  $\gamma_h < 0$  si ha:

$$\left\{ k \in \{1, \dots, m\} : (\pi_h)_k > 0 \right\} \neq \emptyset. \quad (6.4.7)$$

Perciò in questa sezione si considererà il caso in cui sia la (6.4.6) sia la (6.4.7) sono sempre verificate.

Falliti i due criteri, il metodo del simplex cerca di costruire una nuova soluzione di base ammissibile del problema (6.3.1), cioè un punto

$$\tilde{x} : \begin{cases} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{cases}$$

che, per essere diverso da  $\bar{x}$ , deve avere almeno una componente del vettore  $\tilde{x}_N$  è diversa da zero. Infatti, se  $\tilde{x}_N = 0_{n-m}$ , allora  $\tilde{x}_B = B^{-1}b$  ed  $\tilde{x} = \bar{x}$ .

L'idea base del Metodo del Simplex è quella di modificare una sola componente del vettore  $x_N$ , ad esempio l' $h$ -esima (ricordando la definizione di  $x_N$  si ha  $(x_N)_h = x_{j_{m+h}}$ ), portandola da zero ad un valore positivo  $\rho$ . Formalmente viene considerata la seguente semiretta di punti:

$$x(\rho) : \begin{cases} x_B(\rho) = B^{-1}b - \rho B^{-1}N e_h \\ x_N(\rho) = \rho e_h \end{cases} \quad (6.4.8)$$

dove  $\rho$  è un numero reale non negativo,  $e_h$  è l' $h$ -esimo vettore unitario con  $n-m$  componenti e l'espressione del sottovettore  $x_B(\rho)$  è data dalla (6.4.2) che nasce dalla necessità di soddisfare i vincoli di uguaglianza del problema originario.

Dopo aver definito il generico punto  $x(\rho)$  rimangono da risolvere le due seguenti questioni:

- quale variabile fuori base modificare, cioè come scegliere l'indice  $h$ ;
- quanto variare la variabile fuori base scelta, cioè quale valore assegnare allo scalare  $\rho$ .

**Scelta dell'indice  $h$** 

Per quanto riguarda la scelta dell'indice  $h$ , ovvero di quale variabile fuori base modificare, il Metodo del Simplex fa riferimento al fatto di cercare di determinare dei nuovi punti in cui la funzione obiettivo sia diminuita (o, al peggio non sia aumentata). In particolare il seguente teorema indica una scelta opportuna per l'indice  $h$

**Teorema 6.4.3** *Data una matrice di base ammissibile  $B$  del problema (6.3.1). Sia  $\bar{x}$  la soluzione di base ammissibile associata e sia  $\gamma$  il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti. Se l'indice  $h \in \{1, \dots, n-m\}$  è tale che*

$$\gamma_h \leq 0,$$

*allora, il punto  $x(\rho)$  definito dalla (6.4.8) con  $\rho \geq 0$ , ha un valore della funzione obiettivo non superiore a quello di  $\bar{x}$ , cioè*

$$c^T x(\rho) \leq c^T \bar{x}.$$

*Dimostrazione:* Utilizzando l'espressione di  $x_B(\rho)$  e di  $x_N(\rho)$  date dalla (6.4.8), si ha:

$$c^T x(\rho) = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N(\rho) = c_B^T B^{-1} b + \rho \gamma^T e_h,$$

ricordando che  $\gamma^T e_h = \gamma_h$  e che, per ipotesi,  $\gamma_h \leq 0$ , si ottiene:

$$c^T x(\rho) = c_B^T B^{-1} b + \rho \gamma_h \leq c_B^T B^{-1} b = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T \bar{x}_N = c^T \bar{x}$$

e quindi che il valore della funzione obiettivo in  $x(\rho)$  è minore o uguale al valore della funzione obiettivo in  $\bar{x}$ .  $\square$

Una semplice conseguenza del precedente teorema è il seguente corollario.

**Corollario 6.4.5** *Data una matrice di base ammissibile  $B$  del problema (6.3.1). Sia  $\bar{x}$  la soluzione di base ammissibile associata e sia  $\gamma$  il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti. Se l'indice  $h \in \{1, \dots, n-m\}$  è tale che*

$$\gamma_h < 0,$$

*allora, il punto  $x(\rho)$  definito dalla (6.4.8) con  $\rho > 0$ , ha un valore della funzione obiettivo inferiore a quello di  $\bar{x}$ , cioè*

$$c^T x(\rho) < c^T \bar{x}.$$

*Scelta del valore dello scalare  $\rho$*

Il valore dello scalare  $\rho$ , oltre ad indicare il valore della variabile fuori base scelta, influenza anche il valore delle variabili di base. Perciò nello scegliere il valore di  $\rho$  si deve prima di tutto tener conto della ammissibilità del punto prodotto  $x(\rho)$ . Il passo successivo è quello di far vedere che esiste un valore  $\bar{\rho}$  che permette di identificare un punto  $x(\bar{\rho})$  che è una soluzione di base ammissibile (e quindi un vertice) del problema (6.3.1).

Il teorema che segue riporta la scelta dello scalare  $\bar{\rho}$  sulla base del cosiddetto *criterio del rapporto minimo*.

**Teorema 6.4.4** *Data una matrice di base ammissibile  $B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_k}, \dots, a_{j_m})$  del problema (6.3.1). Sia  $\gamma$  il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti, sia  $h$  un indice tale che  $\gamma_h < 0$  e siano  $\bar{\rho}$  lo scalare e  $k$  l'indice dati da:*

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{(\pi_h)_k} = \min_{\substack{i=1, \dots, m \\ (\pi_h)_i > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\pi_h)_i} \right\}. \quad (6.4.9)$$

*Allora, il punto  $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$  (con  $x(\rho)$  definito da (6.4.8)) è una soluzione di base ammissibile del problema (6.3.1) e la matrice di base ammissibile  $\tilde{B}$  associata è data da:*

$$\tilde{B} = (a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}}, a_{j_{m+h}}, a_{j_{k+1}}, \dots, a_{j_m}), \quad (6.4.10)$$

*ovvero*

$$\tilde{x} : \begin{cases} \tilde{x}_{\tilde{B}} = \tilde{B}^{-1}b \\ \tilde{x}_{\tilde{N}} = 0_{n-m}, \end{cases}$$

*dove*

$$\tilde{x}_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{j_1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{j_{k-1}} \\ \tilde{x}_{j_{m+h}} \\ \tilde{x}_{j_{k+1}} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{j_m} \end{pmatrix} \quad \tilde{x}_{\tilde{N}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{j_{m+1}} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{j_{m+h-1}} \\ \tilde{x}_{j_k} \\ \tilde{x}_{j_{m+h+1}} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{j_n} \end{pmatrix}.$$

Omettiamo per brevità la dimostrazione di questo teorema.

Come già anticipato, la scelta dell'indice  $k$  secondo la (6.4.9) viene usualmente denominata scelta basata sul *criterio del rapporto minimo*.

**Osservazione 6.4.6** L'interpretazione del Teorema 6.4.4 è la seguente: supponiamo di avere una base ammissibile  $B$  e supponiamo che non sia soddisfatto il criterio di ottimalità né quello di illimitatezza. Allora, se si considera una nuova soluzione di base corrispondente alla base  $\tilde{B}$  ottenuta facendo entrare nella base  $B$  una qualunque variabile alla quale è associato un costo ridotto negativo e facendo uscire una variabile scelta secondo il criterio del rapporto minimo (6.4.9) indicato dal Teorema 6.4.4, questa nuova soluzione è ammissibile e ha un valore della funzione obiettivo non superiore a quello della soluzione di base precedente.

**Osservazione 6.4.7** Nel criterio del rapporto minimo (6.4.9) il minimo può essere raggiunto in corrispondenza a più di un indice, ovvero l'indice  $k$  può non essere univocamente determinato. In questo caso si può fare uscire dalla base una qualunque delle variabili in corrispondenza alle quali si è raggiunto il minimo. È facile verificare che in questo caso la nuova soluzione di base è degenere. Più precisamente saranno nulle tutte le componenti della soluzione di base corrispondenti agli indici per cui si è raggiunto il minimo nella (6.4.9) (oltre, ovviamente alle componenti non in base).

**Osservazione 6.4.8** Dal criterio del rapporto minimo (6.4.9) si deduce facilmente che  $\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{(\pi_h)_k}$  è nullo se e solo se  $(B^{-1}b)_k = 0$ . Di conseguenza, una *condizione necessaria* per avere  $\bar{\rho} = 0$  è che risulti  $(B^{-1}b)_i = 0$  per qualche indice  $i$ , ovvero che la soluzione  $\bar{x}$  associata alla base  $B$  sia *degenere*. In tal caso, si ha che la  $k$ -esima componente di  $\tilde{x}_B$  e l' $h$ -esima componente di  $\tilde{x}_N$  hanno entrambe valore zero. Pertanto, il vettore  $\tilde{x}$ , ottenuto da  $\tilde{x}$  scambiando tali componenti, coincide con  $\bar{x}$ , ovvero

$$\tilde{x} = \bar{x}.$$

Si osservi inoltre che in questo caso la nuova soluzione di base ammissibile coincide con la vecchia mentre la nuova base ammissibile  $\tilde{B}$  è diversa dalla vecchia base  $B$  (si veda l'Osservazione 6.2.14).

A questo punto sorge naturale chiedersi se la condizione  $(B^{-1}b)_i = 0$  per qualche indice  $i$ , ovvero che la soluzione è degenere, è anche una *condizione sufficiente* affinché  $\bar{\rho}$  sia nullo. La risposta è negativa: infatti è possibile che il valore  $\bar{\rho}$  sia diverso da zero in corrispondenza ad una soluzione degenere. Dalla definizione di  $\bar{\rho}$  data dalla (6.4.9) si deduce che tale situazione si verifica quando ad ogni componente nulla del vettore  $B^{-1}b$ , corrisponde una componente *non positiva* di  $\pi_h$ , ovvero  $(\pi_h)_i \leq 0$ .

Dalla precedenti osservazioni segue il seguente corollario del Teorema 6.4.4

**Corollario 6.4.9** *Sia  $B$  una matrice di base ammissibile del problema (6.3.1) associata ad un vertice  $\bar{x}$  non degenere. Sia  $\gamma$  il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti, sia  $h$  un indice tale che  $\gamma_h < 0$  e siano  $\bar{\rho}$  lo scalare e  $k$  l'indice dati da:*

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{(\pi_h)_k} = \min_{\substack{i=1, \dots, m \\ (\pi_h)_i > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\pi_h)_i} \right\}.$$

*Allora, il punto  $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$  (con  $x(\rho)$  definito da (6.4.8)) è una soluzione di base ammissibile del problema (6.3.1) tale che:*

$$c^T \tilde{x} < c^T \bar{x}.$$

#### 6.4.4 Calcolo della nuova matrice $\tilde{B}^{-1} \tilde{N}$ e del nuovo vettore $\tilde{B}^{-1}b$ : operazione di pivot

I teoremi visti nel paragrafo precedente mostrano che, data una base ammissibile  $B$ , se non è verificato il criterio sufficiente di ottimalità né quello sufficiente di illimitatezza è sempre possibile determinare una nuova base ammissibile  $\tilde{B}$ , data dalla (6.4.10), a cui corrisponde un vertice con un valore della funzione obiettivo non superiore ripetuto al valore precedente. In linea di principio possiamo a questo punto calcolare *ex novo*  $\tilde{B}^{-1}$ , e quindi  $\tilde{B}^{-1} \tilde{N}$  e  $\tilde{B}^{-1}b$  che sono le quantità necessarie per calcolare il nuovo vertice ed per effettuare i nuovi test di ottimalità e di illimitatezza. Questa procedura non è però realizzabile in pratica se non per problemi di piccole dimensione. Infatti, per calcolare l'inversa di una matrice quadrata  $m \times m$  (quale è la  $\tilde{B}$ ) occorre eseguire un numero di moltiplicazioni approssimativamente proporzionale a  $m^3$ , e questo numero diventa praticamente eccessivo per molti problemi che si incontrano nella pratica. Bisogna inoltre tenere conto che nel risolvere un problema di PL bisogna passare, in genere, per molte basi prima di arrivare l'ottimo; bisognerebbe cioè calcolare molte inverse per risolvere un singolo problema. Questa considerazione ci spingono a porci il problema se sia possibile calcolare in maniera più semplice, a partire da  $B^{-1}$ ,  $B^{-1}N$  e  $B^{-1}b$ , le analoghe quantità nell'iterazione successiva:  $\tilde{B}^{-1}$ ,  $\tilde{B}^{-1} \tilde{N}$  e  $\tilde{B}^{-1}b$ . La risposta è affermativa, e per avere un'idea intuitiva di come ciò sia possibile si può notare che questo problema è equivalente a passare in maniera efficiente dalla *forma canonica* rispetto alla matrice di base ammissibile  $B$  del problema (6.3.1):

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ I_m x_B + B^{-1} N x_N &= B^{-1} b \\ x_B &\geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}. \end{aligned} \tag{6.4.11}$$

alla *forma canonica* rispetto alla nuova matrice di base ammissibile  $\tilde{B}$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ I_m x_{\tilde{B}} + \tilde{B}^{-1} \tilde{N} x_{\tilde{N}} &= \tilde{B}^{-1} b \\ x_{\tilde{B}} \geq 0_m, \quad x_{\tilde{N}} \geq 0_{n-m}. \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

in cui compaiono la matrice  $\tilde{B}^{-1} \tilde{N}$  ed il vettore  $\tilde{B}^{-1} b$ .

Per notare meglio le differenze tra le due precedenti forme canoniche, conviene riscrivere la forma canonica (6.4.11) in funzione dei sottovettori  $x_{\tilde{B}}$ ,  $x_{\tilde{N}}$  (che, ricordiamo, si ottengono dai vettori  $x_B$ ,  $x_N$  scambiando la  $k$ -esima componente in base con l' $h$ -esima componente fuori base).

Indicando, come al solito, con  $e_i$ , con  $i = 1, \dots, m$ , i versori unitari  $m$ -dimensionali e con  $\pi_i$ , con  $i = 1, \dots, n-m$ , le colonne della matrice  $B^{-1} N$ , la forma canonica (6.4.11) può essere riscritta nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_m \end{pmatrix} x_B + \begin{pmatrix} \pi_1 & \dots & \pi_{n-m} \end{pmatrix} x_N &= B^{-1} b \\ x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}. \end{aligned}$$

Esplicitando i prodotti matrici-vettori dei vincoli di uguaglianza, si ottiene:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ e_1 x_{j_1} + \dots + e_k x_{j_k} + \dots + e_m x_{j_m} + \\ & + \pi_1 x_{j_{m+1}} + \dots + \pi_h x_{j_{m+h}} + \dots + \pi_{n-m} x_{j_n} &= B^{-1} b \\ x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}. \end{aligned}$$

Scambiando le posizioni dei termini  $e_k x_{j_k}$  e  $\pi_h x_{j_{m+h}}$  si ha:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ e_1 x_{j_1} + \dots + \pi_h x_{j_{m+h}} + \dots + e_m x_{j_m} + \\ & + \pi_1 x_{j_{m+1}} + \dots + e_k x_{j_k} + \dots + \pi_{n-m} x_{j_n} &= B^{-1} b \\ x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}, \end{aligned}$$

utilizzando i sottovettori  $x_{\tilde{B}}$ ,  $x_{\tilde{N}}$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_{k-1} & \pi_h & e_{k+1} & \dots & e_m \end{pmatrix} x_{\tilde{B}} + \\ & + \begin{pmatrix} \pi_1 & \dots & \pi_{h-1} & e_k & \pi_{h+1} & \dots & \pi_{n-m} \end{pmatrix} x_{\tilde{N}} &= B^{-1} b \\ x_{\tilde{B}} \geq 0_m, \quad x_{\tilde{N}} \geq 0_{n-m}. \end{aligned}$$

Da questa formulazione si può ottenere la forma canonica (6.4.12), effettuando un'operazione sui vincoli di uguaglianza che permetta di ottenere un sistema lineare *equivalente* in cui le colonne  $e_i$ , con  $i = 1, \dots, m$  e  $i \neq k$ , siano rimaste

immutate e la colonna  $\pi_h$  sia trasformata nel versore  $e_k$ . Come è noto premoltiplicando i termini di destra e di sinistra di un sistema di equazioni con un matrice invertibile si ottenere un sistema *equivalente*, ovvero un sistema che ha le stesse soluzioni.

Sulla base delle precedenti considerazioni, introduciamo la seguente matrice  $m \times m$ , detta *matrice di pivot* che è data da

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_1/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -(\pi_h)_2/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_{k-1}/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_{k+1}/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_{m-1}/(\pi_h)_k & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_m/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.4.13)$$

$\uparrow$   
 $k$  - esima colonna

Notiamo che la matrice  $T$  è ottenuta dalla matrice identità  $m \times m$ , sostituendo alla  $k$ -esima colonna, una colonna ottenibile a partire dagli elementi della  $h$ -esima colonna della matrice  $B^{-1}N$ . L'elemento  $(\pi_h)_k$  viene detto *elemento di pivot*. Grazie alla sua espressione, la matrice  $T$  presenta interessanti proprietà. Alcune di queste sono descritte dal seguente teorema.

**Teorema 6.4.5** *Sia  $T$  la matrice data dalla (6.4.13). La matrice  $T$  è invertibile ed è tale che:*

$$Te_i = e_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq k, \quad (6.4.14)$$

$$T\pi_h = e_k. \quad (6.4.15)$$

*Dimostrazione:* Il fatto che sia invertibile si può provare osservando che la sua

inversa è data da:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & (\pi_h)_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\pi_h)_m & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.4.16)$$

$\uparrow$   
 $k$ -esima colonna

Le proprietà (6.4.14) e (6.4.15), possono essere provate per verifica diretta.  $\square$

Il prossimo teorema mostra che, attraverso la matrice  $T$ , si possono calcolare direttamente il vettore  $\tilde{B}^{-1}b$  e la matrice  $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$  senza utilizzare (e quindi senza costruire e memorizzare) la matrice  $\tilde{B}^{-1}$ .

**Teorema 6.4.6** *Sia  $T$  la matrice data dalla (6.4.13). Allora si ha:*

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}b &= T(B^{-1}b) \\ \tilde{B}^{-1}\tilde{N} &= T(\pi_1, \dots, \pi_{h-1}, e_k, \pi_{h+1}, \dots, \pi_{n-m}). \end{aligned}$$

Omettiamo per brevità la dimostrazione di questo teorema.

Una conseguenza immediata del precedente teorema e della proprietà (6.4.15) è il seguente corollario.

**Corollario 6.4.10** *Sia  $T$  la matrice data dalla (6.4.13). Allora si ha:*

$$(e_k \mid \tilde{B}^{-1}\tilde{N} \mid \tilde{B}^{-1}b) = T(\pi_h \mid \pi_1 \cdots \pi_{h-1} e_k \pi_{h+1} \cdots \pi_{n-m} \mid B^{-1}b).$$

Il precedente corollario e la particolare struttura della matrice  $T$  mostrano che il vettore  $\tilde{B}^{-1}b$  e la matrice  $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$  possono essere ottenute effettuando alcune semplici operazioni sulle righe della matrice:

$$M = (\pi_h \mid \pi_1 \cdots \pi_{h-1} e_k \pi_{h+1} \cdots \pi_{n-m} \mid B^{-1}b).$$

Infatti si verifica facilmente che l'applicazione della matrice  $T$  equivale al seguente procedimento: si parte dalla matrice  $M$  e si effettua la seguente *operazione di*

*pivot*<sup>1</sup> sull'elemento  $(\pi_h)_k$ :

- (a) si divide la riga  $k$ -esima di  $M$  per  $(\pi_h)_k$ ;
- (b) si somma a ciascuna riga  $i$ -esima di  $M$  (con  $i \neq k$ ), la riga  $k$ -esima ottenuta al precedente punto (a) moltiplicata per l'elemento  $-(\pi_h)_i$

Al termine di questa operazione si ottiene la matrice

$$\left( e_k \mid \tilde{B}^{-1} \tilde{N} \mid \tilde{B}^{-1} b \right).$$

---

<sup>1</sup>Lo studente riconoscera in questa operazione la procedura base del metodo di eliminazione di Gauss-Jordan per la soluzione di sistemi di equazioni lineari

#### 6.4.5 Struttura dell'algoritmo ed esempi

Come abbiamo già ampiamente osservato, la Fase II del metodo del simplex, a partire da una soluzione di base ammissibile, iterativamente effettua le seguenti operazioni:

1. verifica se la soluzione di base ammissibile corrente è una soluzione ottima e in caso affermativo si arresta;
2. verifica se il problema è illimitato (inferiormente) e in caso affermativo si arresta;
3. se nessuna delle precedenti verifiche ha avuto esito positivo, costruisce una nuova base ammissibile.

Nei paragrafi precedenti abbiamo definito ed analizzato in dettaglio questi tre elementi costitutivi della Fase II del metodo del simplex; infatti, nel paragrafo 6.4.1 è stato definito un criterio sufficiente per verificare l'ottimalità di una soluzione di base ammissibile; nel paragrafo 6.4.2 è stato definito un criterio sufficiente per verificare se un problema è illimitato inferiormente; infine, nel paragrafo 6.4.3 abbiamo esaminato come costruire una nuova base ammissibile e una nuova forma canonica. Ad ogni iterazione della Fase II, se i criteri di arresto non sono verificati, il metodo genera una nuova soluzione di base ammissibile alla quale corrisponde, per come è stata costruita, una decrescita (non crescita) del valore della funzione obiettivo.

Nel seguito riportiamo uno schema algoritmico di una iterazione della Fase II del metodo. Supponiamo quindi di avere un problema di Programmazione Lineare in forma standard e in forma canonica rispetto ad una base  $B$

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{s.t.} \quad & x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ & x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}. \end{aligned}$$

Come già in precedenza, indichiamo con  $a_{j_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$  le colonne della matrice  $B$ , e con  $a_{j_{m+i}}$  le colonne della matrice  $N$ , ovvero

$$B = \begin{pmatrix} a_{j_1} & \cdots & a_{j_m} \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} a_{j_{m+1}} & \cdots & a_{j_{n-m}} \end{pmatrix}.$$

## Fase II del metodo del simplexso

Passo 1: *Calcolo del vettore dei costi ridotti*

- Calcolare il vettore  $\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$

Passo 2: *Verifica del criterio di ottimalità*

- se per ogni  $i \in \{1, \dots, n-m\}$ , risulta  $\gamma_i \geq 0$ , allora la soluzione corrente  $\bar{x}_B = B^{-1}b$ ,  $\bar{x}_N = 0_{n-m}$  è ottima. – STOP

Passo 3: *Verifica del criterio di illimitatezza*

- se per qualche  $i \in \{1, \dots, n-m\}$ , tale che  $\gamma_i < 0$  risulta  $\pi_i \leq 0$  allora il problema è illimitato inferiormente. – STOP

Passo 4: *Costruzione di una nuova base ammissibile*

- selezionare un indice  $h \in \{1, \dots, n-m\}$  tale che  $\gamma_h < 0$ ; l' $h$ -esima variabile fuori base, ovvero  $x_{j_{m+h}}$ , entra in base.
- calcolare l'indice  $k$  attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\frac{(B^{-1}b)_k}{(\pi_h)_k} = \min_{\substack{i=1, \dots, m \\ (\pi_h)_i > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\pi_h)_i} \right\};$$

la  $k$ -esima variabile in base, ovvero  $x_{j_k}$ , esce dalla base.

- costruire le matrici  $\tilde{B}$  e  $\tilde{N}$  a partire da  $B$  e  $N$  scambiando fra loro l' $h$ -esima colonna di  $N$ , ovvero  $a_{j_{m+h}}$  con la  $k$ -esima colonna di  $B$ , ovvero  $a_{j_k}$ .
- costruire i nuovi vettori  $x_{\tilde{B}}$ ,  $x_{\tilde{N}}$ ,  $c_{\tilde{B}}$  e  $c_{\tilde{N}}$ .

Passo 5: *Costruzione di una nuova forma canonica*

- calcolare le grandezze rilevanti, relative alla nuova base  $\tilde{B}$ , ovvero  $\tilde{B}^{-1}b$  e  $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$  attraverso un'operazione di *pivot*, e definire la nuova forma canonica rispetto alla nuova base  $\tilde{B}$  ed effettuare una nuova iterazione.

**Esempio 6.4.11** Risolvere applicando la Fase II del metodo del simplex il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

Il problema è in forma standard ed inoltre si dispone della base  $B_0 = I$  data dalle colonne 4, 5, 6, quindi il problema è in forma canonica rispetto alle variabili  $x_4$ ,  $x_5$ ,  $x_6$ , ovvero:

$$\begin{aligned} B_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1} & N_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = B_0^{-1}N_0 \\ x_{B_0} &= \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, & x_{N_0} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \min \quad & (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + (1 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

### Iterazione 0

*Calcolo dei costi ridotti:*

$$\gamma_0^T = (1 \ 2 \ 1) - (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 1) - (4 \ 3 \ -3) = (-3 \ -1 \ 4)$$

*Verifica del criterio di ottimalità:*

Poiché esistono componenti di  $\gamma$  negative la verifica è fallita.

*Verifica del criterio di illimitatezza:*

Poiché non risulta  $\pi_1 \leq 0$ , o  $\pi_2 \leq 0$  la verifica è fallita.

*Costruzione nuova base ammissibile:*

Variabile entrante: si sceglie l'indice  $h$  corrispondente al costo ridotto negativo

minore ovvero  $h = 1$  in quanto  $\gamma_1 = -3 < -1 = \gamma_2$ ; quindi entra in base la prima variabile fuori base, ovvero  $x_1$ .

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,\dots,3 \\ (\pi_1)_i > 0}} \left\{ \frac{(B_0^{-1}b)_i}{(\pi_1)_i} \right\} = \min \left\{ \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{1} \right\} = \frac{(B_0^{-1}b)_2}{(\pi_1)_2} = 1$$

si determina  $k = 2$  e quindi la seconda variabile in base esce dalla base, ovvero  $x_5$ .

Nuova base:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_{B_1} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad x_{N_1} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

*Costruzione nuova forma canonica:*

si effettua un'operazione di pivot sulla matrice

$$(\pi_1 \mid e_2 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \mid B_0^{-1}b)$$

ovvero

$$\left( \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ \mathbf{2} & 1 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Effettuando il pivot sull'elemento  $(\pi_h)_k = (\pi_1)_2 = 2$  si ottiene

$$\left( \begin{array}{c|ccc|c} 0 & -1/2 & 5/2 & 11/2 & 2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -5/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & 3/2 & 0 \end{array} \right)$$

ovvero

$$(e_2 \mid B_1^{-1}N_1 \mid B_1^{-1}b).$$

Quindi la nuova forma canonica è

$$\begin{aligned} \min \quad & (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} + (1 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

**Iterazione 1***Calcolo dei costi ridotti:*

$$\begin{aligned}\gamma_1^T &= (1 \ 2 \ 1) - (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \\ &= (1 \ 2 \ 1) - (-1/2 \ 9/2 \ 9/2) = (3/2 \ -5/2 \ -7/2)\end{aligned}$$

*Verifica del criterio di ottimalità:*Poiché esistono componenti di  $\gamma$  negative la verifica è fallita.*Verifica del criterio di illimitatezza:*Poiché non risulta  $\pi_2 \leq 0$ , o  $\pi_3 \leq 0$  la verifica è fallita.*Costruzione nuova base ammissibile:*Variabile entrante: si sceglie l'indice  $h$  corrispondente al costo ridotto negativo minore ovvero  $h = 3$  in quanto  $\gamma_3 = -7/2 < -5/2 = \gamma_2$ ; quindi entra in base la terza variabile fuori base, ovvero  $x_3$ .

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1, \dots, 3 \\ (\pi_3)_i > 0}} \left\{ \frac{(B_1^{-1}b)_i}{(\pi_3)_i} \right\} = \min \left\{ \frac{2}{11/2}, \frac{0}{3/2} \right\} = \frac{(B_1^{-1}b)_3}{(\pi_3)_3} = 0 \quad (6.4.17)$$

si determina  $k = 3$  e quindi la terza variabile in base esce dalla base, ovvero  $x_6$ .

Nuova base:

$$\begin{aligned}B_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & N_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ x_{B_2} &= \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}, & x_{N_2} &= \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

*Costruzione nuova forma canonica:*

si effettua un'operazione di pivot sulla matrice

$$(\pi_3 \mid \pi_1 \ \pi_2 \ e_3 \mid B_1^{-1}b)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 11/2 & | & -1/2 & 5/2 & 0 & | & 2 \\ -5/2 & | & 1/2 & -1/2 & 0 & | & 1 \\ \mathbf{3/2} & | & -1/2 & 5/2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Effettuando il pivot sull'elemento  $(\pi_h)_k = (\pi_3)_3 = 3/2$  si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & | & 4/3 & -20/3 & -11/3 & | & 2 \\ 0 & | & -1/3 & 11/3 & 5/3 & | & 1 \\ 1 & | & -1/3 & 5/3 & 2/3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$(e_3 \mid B_2^{-1}N_2 \mid B_2^{-1}b).$$

Quindi la nuova forma canonica è

$$\begin{aligned} \min \quad & (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + (1 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

## Iterazione 2

*Calcolo dei costi ridotti:*

$$\begin{aligned} \gamma_2^T &= (1 \ 2 \ 1) - (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 1) - (2/3 \ -4/3 \ -4/3) = \\ &= (1/3 \ 10/3 \ 7/2) \end{aligned}$$

*Verifica del criterio di ottimalità:*

Poiché risulta  $\gamma_2 > 0$  il criterio di ottimalità è soddisfatto e quindi la soluzione

$$\bar{x}^* = (1, 0, 0, 2, 0, 0)^T$$

è soluzione ottima del problema ed è l'unica soluzione ottima poiché il vettore dei costi ridotti ha tutte le componenti positive.  $\square$

**Osservazione 6.4.12** Nella prima iterazione del precedente Esempio 6.4.11, dal criterio del rapporto minimo (6.4.17) si è ottenuto il valore zero ( $\bar{\rho} = 0$ ). In questo caso vale quanto discusso nella Osservazione 6.4.8, ovvero che  $x_{B_1} = (2, 1, 0)^T$  è una soluzione base ammissibile *degenere* e che la successiva soluzione base ammissibile rimane invariata pur essendo stato effettuato un cambio di base; ed infatti si ha  $x_{B_2} = (2, 1, 0)^T$ . In questa situazione si parla di *iterazione degenera*.

**Esempio 6.4.13** Risolvere applicando la Fase II del metodo del simplex e utilizzando la costruzione esplicita della matrice di pivot  $T$ , il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ & x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Si può applicare la Fase II del metodo del simplex in quanto il problema è in forma canonica. Infatti si può scrivere:

$$\begin{aligned} \min (3 \ 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (1 \ 1) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

La base iniziale è  $B_0 = I$ ;  $x_{B_0} = (x_1 \ x_2)^T$  e  $x_{N_0} = (x_3 \ x_4)^T$ .

#### Iterazione 0.

*Calcolo dei costi ridotti.*

Si calcolano i coefficienti di costo ridotto

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

*Verifica del criterio di ottimalità.*

Risulta  $\gamma^0 \not\geq 0$  e quindi il criterio è fallito.

*Verifica criterio illimitatezza.*

La colonna  $\pi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \not\leq 0$ ; il criterio è fallito.

*Costruzione nuova base ammissibile.*

Variabile entrante: c'è un unico costo ridotto negativo  $-3$ , e quindi si sceglie  $h = 2$  che corrisponde alla variabile  $x_4$  che entra in base.

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,2 \\ (\pi_2)_i > 0}} \left\{ \frac{(B_0)^{-1}b)_i}{(\pi_2)_i} \right\} = \frac{5}{2}$$

che corrisponde alla variabile  $x_1$  e  $k = 1$ .

I nuovi vettori delle variabili di base e fuori base sono:

$$x_{B_1} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad x_{N_1} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad c_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad c_{N_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a cui corrispondono le nuove matrici:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calcola la matrice

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} B_1^{-1}N_1 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ B_1^{-1}b &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 11/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Iterazione 1

*Calcolo costi ridotti.*

Si calcolano i coefficienti di costo ridotto

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

*Verifica criterio di ottimalità.*

Risulta  $\gamma_1 \not\geq 0$  e quindi la verifica fallisce.

*Verifica criterio di illimitatezza.*

Risulta  $\pi_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \not\leq 0$  e quindi la verifica fallisce.

*Costruzione nuova base ammissibile.*

Variabile entrante: c'è un unico costo ridotto negativo  $-3/2$ , e quindi  $h = 1$  che corrisponde alla variabile  $x_3$  che entra in base.

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,2 \\ (\pi_1)_i > 0}} \left\{ \frac{((B_1)^{-1}b)_i}{(\pi_1)_i} \right\} = \frac{((B_1)^{-1}b)_2}{(\pi_1)_2} = \frac{11}{3}$$

che quindi corrisponde a scegliere  $k = 2$  e quindi la variabile  $x_2$  esce dalla base.

Quindi

$$x_{B_2} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x_{N_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad c_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_{N_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e le corrispondenti matrici di base e fuori base:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calcola la matrice

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Si ottiene

$$(B_2)^{-1}N_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

e

$$(B_2)^{-1}b = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/3 \\ 11/3 \end{pmatrix}$$

### Iterazione 2

*Calcolo costi ridotti.*

Si ha

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

*Verifica criterio di ottimalità.*

Poichè i costi ridotti sono tutti positivi, la soluzione trovata è ottima.

Si ha quindi

$$x_1^* = x_2^* = 0, \quad x_3^* = 11/3 \quad x_4^* = 13/3$$

con valore della funzione obiettivo  $z(x^*) = 8$ . La base ottima è  $B^* = B^2$  e la soluzione trovata è unica poiché i costi ridotti sono strettamente positivi.  $\square$

#### 6.4.6 Convergenza del metodo del simplex

Per concludere l'analisi della Fase II del metodo del simplex, vogliamo ora mostrare che, sotto opportune ipotesi, il numero di iterazioni della Fase II è finito, ovvero che, in un numero finito di iterazioni, l'algoritmo descritto nei paragrafi precedenti *converge* alla soluzione ottima del problema (6.3.1) o conclude che il problema è illimitato inferiormente. A tale scopo notiamo che, nelle ipotesi che abbiamo finora adottato (il problema (6.3.1) è ammissibile e il rango della matrice  $A$  è  $m$ ) sappiamo che il numero di basi ammissibili per il problema è finito (vedi il Teorema (6.2.3)) e maggiore o uguale a 1 (perchè il poliedro del problema in forma standard ammette almeno un vertice, essendo non vuoto e non contenendo rette). Il principale risultato sulla convergenza della Fase II del metodo del simplex è il seguente.

**Teorema 6.4.7** *Se nell'applicazione della Fase II del metodo del simplex non viene mai generata due volte la stessa base (cioè se nessuna base si ripete nella sequenza delle basi prodotte dal metodo), allora esiste un indice  $t \geq 1$  tale che la base  $B_t$  nella sequenza prodotta dal metodo soddisfa il criterio di ottimalità o quello di illimitatezza.*

*Dimostrazione:* Come abbiamo più volte osservato, ad ogni iterazione della Fase II, se i criteri di arresto e di illimitatezza non sono verificati, il metodo è in grado di generare una nuova base ammissibile differente da quella corrente. D'altra parte, siccome le basi sono in numero finito, e abbiamo fatto l'ipotesi che non ci siano ripetizioni, dopo un numero finito di passi (pari al più al numero di basi ammissibili distinte del problema) non potranno più essere generate basi diverse da tutte le precedenti. Dunque, necessariamente, o il criterio di ottimalità o quello di illimitatezza devono essere soddisfatti.  $\square$

È appena il caso di osservare che, nelle ipotesi di questo teorema, la Fase II del metodo del simplex termina una volta raggiunta la base  $B_t$  con il soddisfacimento del criterio di ottimalità o del criterio di illimitatezza. Un caso semplice (poco frequente nelle applicazioni reali) in cui si può garantire che non ci sono ripetizioni di basi è quello in cui tutte le soluzioni di base siano *non degeneri*. In questo caso infatti, il Corollario 6.4.9 ci assicura che ad ogni cambio di base corrisponde una *diminuzione* del valore della funzione obiettivo. È allora chiaro che non ci possono essere ripetizioni di base, perché questo implicherebbe che in qualche iterazione viene generata una nuova base il cui valore è *maggior* del valore della base precedente. Questa osservazione ci permette di enunciare, senza bisogno di ulteriori dimostrazioni, il seguente corollario.

**Corollario 6.4.14** *Se ogni soluzione di base ammissibile del problema (6.3.1) è non degenere allora, in un numero finito di passi, la Fase II del metodo del simplex converge alla soluzione ottima o conclude che il problema è illimitato inferiormente.*

Se il problema (6.3.1) ammette SBA degeneri, è possibile che la Fase II del metodo del simplex generi una sequenza di basi ammissibili  $\{B_1, \dots, B_q\}$  ( $q > 1$ ) con  $B_1 = B_q$ . Ovviamente affinché ciò sia possibile è evidente che (visto che il valore della funzione obiettivo ad ogni cambio di base non cresce) deve risultare che il valore della funzione obiettivo in ogni base  $\{B_1, \dots, B_q\}$  è costante. A sua volta, ciò è possibile solamente se ad ogni iterazione  $\bar{\rho} = 0$ . Questo vuol quindi dire che, nella situazione appena descritta, le basi  $\{B_1, \dots, B_q\}$  corrispondono tutte allo stesso vertice (degenere). In tale situazione, se usiamo un qualsiasi criterio deterministico per la scelta della variabile entrante e della variabile uscente, l'algoritmo genererà la stessa sequenza di basi ammissibili indefinitamente. Tale situazione viene detta di *ciclaggio*, ed è illustrata dal seguente esempio, dovuto a Beale.

**Esempio 6.4.15** Si consideri il problema

$$\begin{array}{llllll}
 \min & \frac{3}{4}x_4 & +20x_5 & -\frac{1}{2}x_6 & +6x_7 & \\
 x_1 & +\frac{1}{4}x_4 & -8x_5 & -x_6 & +9x_7 & = 0 \\
 x_2 & +\frac{1}{2}x_4 & -12x_5 & -\frac{1}{2}x_6 & +3x_7 & = 0 \\
 x_3 & & & +x_6 & & = 1 \\
 & & & & & x \geq 0
 \end{array} \tag{6.4.18}$$

Indicando con  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , le colonne della matrice dei vincoli di uguaglianza del problema (6.4.18), la base ottima di questo problema è  $(a_1, a_4, a_6)$  (si lascia al lettore la verifica del test di ottimalità). Supponiamo ora di applicare la Fase II del metodo del simplex a partire dalla base ammissibile ovvia  $(a_1, a_2, a_3)$ . Si tratta ovviamente di una base degenere in quanto  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$ . Supponiamo ora di applicare la Fase II del metodo del simplex scegliendo ad ogni iterazione l'indice  $h$  della variabile entrante per il quale il coefficiente di costo ridotto è minimo e l'indice  $k$  della variabile uscente il più piccolo tra quelli possibili (ad ogni iterazione ci sono una o due scelte possibili per  $k$ ). Il lettore può verificare che con queste scelte (molto naturali, e coerenti con le scelte usate in classe per la risoluzione degli esercizi) viene generata la seguente successione di basi

$$\begin{aligned}
 & (a_1, a_2, a_3), \quad (a_4, a_2, a_3), \quad (a_4, a_5, a_3), \\
 & (a_6, a_5, a_3), \quad (a_6, a_7, a_3), \quad (a_1, a_7, a_3), \quad (a_1, a_2, a_3).
 \end{aligned}$$

Si tratta di una serie di basi degeneri tutte corrispondenti allo stesso vertice. La cosa importante da notare è che l'ultima base indicata coincide con la prima. Quindi è chiaro che (se non si cambiano i criteri di scelta di  $h$  e  $k$ ) da questo punto in poi, la Fase II non farà altro che ripetere indefinitivamente la stessa successione di basi senza mai raggiungere la base ottima.

Quindi, nel caso (più frequente nelle applicazioni) in cui esistano SBA degeneri, la Fase II del Metodo del Simplex, così come descritta prima, può non convergere, ovvero può produrre una sequenza infinita di basi ammissibili senza mai verificare uno dei due criteri di arresto.

Questa situazione indesiderata può essere risolta sfruttando la libertà esistente nel metodo nella scelta di  $h$  e  $k$ . È possibile definire opportune *regole anti ciclaggio* per la selezione di questi indici quando ci sia più di una variabile candidata ad entrare o uscire. Utilizzando queste regole si può garantire *in ogni caso* che il metodo del simplex converge in un numero finito di passi. È da notare, però, che spesso queste regole non vengono applicate in pratica, perché eccessivamente onerose e il metodo del simplex viene applicato esattamente così come lo abbiamo descritto. La pratica mostra che i casi in cui, pur non applicando nessuna regola anti ciclaggio, l'algoritmo non converge (cicla) sono rari. Inoltre, nel momento in cui ci si rende conto di trovarsi in una di queste rare situazioni è sempre possibile applicare le regole anti ciclaggio (anche ad algoritmo già iniziato). La discussione della reale implementazione pratica del metodo del simplex è però argomento molto complesso e non può essere qui trattata in dettaglio. Ci limitiamo a riportare una delle più famose e semplici regole anti ciclaggio, la regola di Bland.

**Regola anti ciclaggio di Bland:** *Ogni volta che c'è più di una variabile candidata ad entrare in base si sceglie quella con indice  $h$  più piccolo. Ogni volta che c'è più di una variabile candidata ad uscire dalla base si sceglie quella con indice  $k$  più piccolo.*

Vale il seguente teorema, che riportiamo senza dimostrazione.

**Teorema 6.4.8** *Supponiamo di applicare la Fase II del metodo del simplex con la regola di Bland per la scelta delle variabili entranti e delle variabili uscenti (cioè per la scelta di  $h$  e  $k$ ). Allora non viene mai generata due volte la stessa base e quindi, per il Teorema 6.4.7, esiste un indice  $t \geq 1$  tale che la base  $B_t$  nella sequenza generata dal metodo del simplex (Fase II) soddisfa il criterio di ottimalità o quello di illimitatezza e il metodo converge quindi in un numero finito di passi.*

Il lettore può verificare che se si applica la regola di Bland nella soluzione del problema di Beal considerato sopra, viene in effetti trovata la base ottima in un numero finito di passi.

## 6.5 LA FASE I DEL METODO DEL SIMPLEXO

Come già detto, il primo obiettivo della Fase I del metodo del simplex è quello di verificare l'ammissibilità del problema da risolvere. Poi, in caso affermativo, deve identificare una base ammissibile  $B$  del problema e calcolare la matrice  $B^{-1}N$  ed vettore  $B^{-1}b$ . Inoltre la Fase I deve essere anche in grado di accorgersi che la matrice dei vincoli di uguaglianza non ha rango massimo e, in questo caso, deve eliminare i vincoli di ridondanti presenti.

Ci sono vari algoritmi che realizzano la Fase I del metodo del simplex. In questa sezione esaminiamo in dettagliato la struttura di un particolare algoritmo che è basato sull'uso delle cosiddette *variabili artificiali*.

Si considera, come al solito, un problema di programmazione lineare in forma standard:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{a.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0_n, \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

dove  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Questa volta, a differenza della Fase II del metodo del simplex si richiede che sia vera solamente la seguente assunzione.

**Assunzione:** Il vettore  $b$  dei vincoli di uguaglianza del problema (6.5.1) è tale che:

$$b \geq 0_m.$$

In realtà la precedente non è una vera e propria assunzione, ma piuttosto la richiesta di formulare i vincoli in maniera tale da soddisfare  $b \geq 0_m$ . Infatti se una componente  $b_i$  è strettamente negativa, basta cambiare il segno ad entrambi i termini dell' $i$ -esimo vincolo per soddisfare l'ipotesi richiesta.

A partire dal problema (6.5.1), si definisce il seguente *problema ausiliario* in cui si introducono  $m$  nuove variabili  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \alpha_i \\ \text{a.t.} \quad & Ax + I_m \alpha = b \\ & x \geq 0_n, \alpha \geq 0_m \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

con  $\alpha^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

Diremo *artificiali* le variabili  $\alpha_i$  ed *originarie* le variabili  $x_i$ .

Questo nuovo problema di programmazione lineare soddisfa tutte le ipotesi richieste per poter applicare la Fase II del metodo del simplex, infatti:

- è facile verificare che il punto  $\begin{pmatrix} \alpha \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ , avendo ipotizzato  $b \geq 0_m$ , soddisfa tutti i vincoli del problema ausiliario, quindi l'insieme ammissibile del problema (6.5.1) è non vuoto;
- la matrice dei vincoli  $(A \ I_m)$ , contenendo la matrice identità  $m \times m$ , soddisfa alla richiesta che  $\text{rango}(A \ I_m) = m$ ;
- la matrice  $\hat{B} = I_m$  è una base ammissibile per il problema (6.5.1) (poichè  $\hat{B}^{-1}b = b \geq 0_m$ ) e si ha che  $\hat{B}^{-1}\hat{N} = \hat{N} = A$  ed  $\hat{B}^{-1}b = b$ .

Il problema (6.5.2) ha anche la proprietà di *non essere illimitato inferiormente*, infatti la non negatività delle variabili artificiali  $\alpha_i$  implica la non negatività del valore della funzione obiettivo nella regione ammissibile di (6.5.2), cioè per ogni vettore  $\alpha$  ammissibile per il problema (6.5.2) si ha:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \geq 0. \quad (6.5.3)$$

Abbiamo quindi che il problema (6.5.2) ammette una soluzione ottima  $\begin{pmatrix} \alpha^* \\ x^* \end{pmatrix}$  e che tale soluzione può essere individuata utilizzando la Fase II del metodo del simplex descritta nei paragrafi precedenti.

### 6.5.1 Ammissibilità del problema originario

Risolvere il problema ausiliario (6.5.2) permette di sapere se il problema originario (6.5.1) è ammissibile o meno, come è dimostrato dal seguente teorema:

**Teorema 6.5.1** *Il problema (6.5.1) possiede una soluzione ammissibile se e solo se la soluzione ottima  $\begin{pmatrix} \alpha^* \\ x^* \end{pmatrix}$  del problema (6.5.2) ha valore  $\sum_{i=1}^m \alpha_i^* = 0$ .*

*Dimostrazione:* Se  $\sum_{i=1}^m \alpha_i^* = 0$ , la non negatività delle  $\alpha_i^*$  implica che

$$\alpha_1^* = \cdots = \alpha_m^* = 0. \quad (6.5.4)$$

Poichè  $\begin{pmatrix} \alpha^* \\ x^* \end{pmatrix}$  è ammissibile per il problema (6.5.2) soddisfa anche a

$$Ax^* + I_m \alpha^* = b, \quad x^* \in \mathbb{R}^n,$$

che, utilizzando le (6.5.4), possono essere riscritte nella forma

$$Ax^* = b, \quad x^* \in \mathbb{R}^n.$$

Quindi il punto  $x^* \in \mathbb{R}^n$  è ammissibile per (6.5.1).

Mostriamo, ora, che se il problema (6.5.1) ammette una soluzione ammissibile  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  allora  $\sum_{i=1}^m \alpha_i^* = 0$ . Supponiamo, per assurdo, che  $\sum_{i=1}^m \alpha_i^* > 0$ .

Poichè  $A\tilde{x} = b$  e  $\tilde{x} \geq 0_n$ , possiamo definire un vettore  $\begin{pmatrix} 0_m \\ \tilde{x} \end{pmatrix}$ , ammissibile per (6.5.2) (infatti  $A\tilde{x} + I_m 0_m = b$ ,  $\tilde{x} \geq 0_n$  e  $0_m \geq 0_m$ ). Ma il valore della funzione obiettivo di (6.5.2) calcolata in  $\begin{pmatrix} 0_m \\ \tilde{x} \end{pmatrix}$  è nullo, contraddicendo l'ottimalità di  $\begin{pmatrix} \alpha^* \\ x^* \end{pmatrix}$ .  $\square$

Una conseguenza del precedente teorema è il seguente corollario.

**Corollario 6.5.1** *Il problema (6.5.1) possiede una soluzione ammissibile se e solo se la soluzione ottima  $\begin{pmatrix} \alpha^* \\ x^* \end{pmatrix}$  del problema (6.5.2) è tale che:*

$$\alpha_1^* = \dots = \alpha_m^* = 0.$$

Quindi, utilizzando i risultati precedenti, se dopo aver applicato la Fase II del metodo del simplex al problema ausiliario (6.5.2) si è ottenuta una soluzione ottima in cui il valore delle funzione obiettivo è positivo o, equivalentemente, una variabile artificiale  $\alpha_i^*$  è positiva allora la Fase I del metodo del simplex termina dichiarando che il problema (6.5.1) è inammissibile. Se, al contrario, il valore ottimo della funzione obiettivo del problema (6.5.2) è zero o se tutte le variabili artificiali  $\alpha_i^*$  sono nulle, allora il problema (6.5.1) è ammissibile. In questo caso, la Fase I del metodo del simplex, utilizzando alcune informazioni ottenute nella minimizzazione del problema (6.5.2) permette individuare la prima base ammissibile  $B$  del problema (6.5.1) e di determinare la matrice  $B^{-1}N$  ed il vettore  $B^{-1}b$ .

### 6.5.2 Individuazione di una matrice di base ammissibile $\hat{B}$ del problema originario e determinazione della matrice $\hat{B}^{-1}\hat{N}$ ed del vettore $\hat{B}^{-1}\hat{b}$

Sia  $\hat{B}$  la matrice di base ottima determinata dalla Fase II del metodo simplexso applicato al problema ausiliario (6.5.2), cioè la base ammissibile associata alla soluzione ottima ottenuta  $\begin{pmatrix} \alpha^* \\ x^* \end{pmatrix}$ . Per semplicità e senza perdere di generalità, supponiamo che la base  $\hat{B}$  sia costituita dalle prime  $q$  colonne della matrice  $I_m$  associata alle variabili artificiali  $\alpha_i$  e dalle prime  $p$  colonne della matrice  $A$  associata alle variabili originarie  $x_i$ , cioè:

$$\hat{B} = (e_1, \dots, e_q, a_1, \dots, a_p) \quad (6.5.5)$$

con  $p + q = m$ . Per quanto riguarda la matrice delle colonne non di base  $\hat{N}$ , supponiamo che abbia la seguente struttura:

$$\hat{N} = (e_{q+1}, \dots, e_m, a_{p+1}, \dots, a_n). \quad (6.5.6)$$

Con queste scelte, nell'ultima forma canonica determinata dal metodo del simplexso, l'insieme ammissibile del problema (6.5.2) viene trasformato nella forma equivalente:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_q \\ x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{q+1} \\ \vdots \\ \alpha_m \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \hat{B}^{-1}\hat{b} \quad (6.5.7)$$

$$x \geq 0_n, \quad \alpha \geq 0_m,$$

dove la matrice  $\hat{B}^{-1}\hat{N}$  è stata partizionata nella matrice  $G$  costituita dalle colonne corrispondenti alle variabili  $\alpha_i$ , con  $i = q + 1, \dots, m$ , e nella matrice  $H$  costituita dalle colonne corrispondenti alle variabili  $x_i$ , con  $i = p + 1, \dots, n$ , cioè:

$$G = \hat{B}^{-1}(e_{q+1}, \dots, e_m) \quad (6.5.8)$$

$$H = \hat{B}^{-1}(a_{p+1}, \dots, a_n). \quad (6.5.9)$$

Adesso l'analisi si divide nei due seguenti casi:

- (i)  $p = m$  (ovvero  $q = 0$ ) che corrisponde al fatto che nessuna colonna relativa ad una variabile ausiliaria è nella matrice di base;
- (ii)  $p < m$  (ovvero  $q \geq 1$ ) che corrisponde al fatto che qualche colonna relativa ad una variabile ausiliaria è rimasta nella matrice di base.

**Caso (i) (p=m)**

In questo caso la matrice di base ammissibile determinata dal metodo del simplex è data da:

$$\hat{B} = (a_1, \dots, a_m),$$

e la forma canonica (6.5.7) diventa:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \hat{B}^{-1}b \quad (6.5.10)$$

$$x \geq 0_n, \quad \alpha \geq 0_m,$$

dove matrici  $G$  e  $H$  assumono la forma:

$$G = \hat{B}^{-1}(e_1, \dots, e_m) \quad (6.5.11)$$

$$H = \hat{B}^{-1}(a_{m+1}, \dots, a_n). \quad (6.5.12)$$

Poichè la matrice di base ammissibile  $\hat{B}$  è costituita da tutte colonne della matrice  $A$ , essa è una matrice di base ammissibile anche per il Problema (6.5.1). Ovvero è immediatamente disponibile una base ammissibile per il problema originario. Quindi se poniamo:

$$\begin{aligned} B &= \hat{B} \\ N &= (a_{m+1}, \dots, a_n), \end{aligned}$$

si ottiene (ricordando anche la (6.5.12)):

$$\begin{aligned} B^{-1}N &= H, \\ B^{-1}b &= \hat{B}^{-1}b. \end{aligned}$$

Inoltre, se dalla forma canonica (6.5.10) eliminiamo le variabili artificiali e le colonne relative (formalmente poniamo  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ ), otteniamo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + B^{-1}N \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B^{-1}b \quad (6.5.13)$$

$$x \geq 0_n$$

che costituisce la forma canonica del Problema (6.5.1) rispetto alla base  $B$  dalla quale può iniziare la Fase II.

In conclusione, quindi, nel caso  $p = m$ , per ottenere la prima forma canonica per la Fase II è sufficiente eliminare le variabili artificiali fuori base e le colonne corrispondenti.

### Caso (ii) ( $p < m$ )

In questo caso la base ottima del problema artificiale non fornisce immediatamente una base ammissibile per il problema originario, in quanto contiene delle colonne della matrice  $I_m$ . Tuttavia è possibile, tramite operazioni relativamente semplici, eliminare dalla matrice di base tutte le colonne relative a variabili artificiali e ricondursi quindi al caso (i).

L'idea base è quella di cercare di sostituire una colonna  $e_k$  della matrice di base

$$\hat{B} = (e_1, \dots, e_k, \dots, e_q, a_1, \dots, a_p), \quad (6.5.14)$$

con una colonna  $a_{p+h}$  della matrice

$$\hat{N} = (e_{q+1}, \dots, e_m, a_{p+1}, \dots, a_{p+h}, \dots, a_n). \quad (6.5.15)$$

Analogamente al caso (i), nella forma canonica (6.5.7) possiamo porre  $\alpha_{q+1} = \dots = \alpha_m = 0$  in modo da eliminare le variabili artificiali che non appartengono al vettore di base e le colonne ad esse associate. Notare inoltre che risulta

$$\hat{B}^{-1}b = \begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ \vdots \\ \alpha_q^* \\ x_1^* \\ \vdots \\ x_p^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1^* \\ \vdots \\ x_p^* \end{pmatrix}. \quad (6.5.16)$$

Ora, se osserviamo la riga  $k$ -esima della matrice  $H$  si possono presentare due sottocasi:

1. esiste almeno un elemento diverso da zero;
  2. tutti gli elementi sono uguali a zero.
1. Se esiste un indice  $h$  tale che l'elemento  $h$ -esimo della riga  $k$ -esima, che indichiamo con  $(\hat{\pi}_h)_k$ , è diverso da zero, possiamo ripetere gli stessi ragionamenti fatti nel Teorema 6.4.4 per determinare una nuova matrice di base. Si può dimostrare che in questo caso  $((\pi_h)_k \neq 0)$ , le colonne

$$e_1, \dots, e_{k-1}, a_{p+h}, e_{k+1}, \dots, e_q, a_1, \dots, a_p$$

sono linearmente indipendenti, e quindi in particolare costituiscono una nuova base data da:

$$\bar{B} = (e_1, \dots, a_{p+h}, \dots, e_q, a_1, \dots, a_p), \quad (6.5.17)$$

a cui corrisponde la matrice di colonne non appartenenti alla base:

$$\bar{N} = (e_{q+1}, \dots, e_m, a_{p+1}, \dots, e_k, \dots, a_n). \quad (6.5.18)$$

Se introduciamo  $\hat{T}$  la matrice di pivot rispetto all'elemento  $(\hat{\pi}_h)_k$  il Teorema 6.4.6 mostra che

$$\begin{aligned} \bar{B}^{-1}b &= \hat{T}(\hat{B}^{-1}b) \\ \bar{B}^{-1}\bar{N} &= \hat{T}(\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_{h-1}, e_k, \hat{\pi}_{h+1}, \dots, \hat{\pi}_{n-m}), \end{aligned} \quad (6.5.19)$$

avendo indicato con  $\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_{n-m}$  le colonne della matrice  $H$ . In particolare la (6.5.19) e la (6.5.16) implicano:

$$\bar{B}^{-1}b = \hat{T}(\hat{B}^{-1}b) = \hat{B}^{-1}b \geq 0_m, \quad (6.5.20)$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dalla (6.5.16) che implica  $(\hat{B}^{-1}b)_k = \alpha_k^* = 0$  e quindi  $e_k^T \hat{B}^{-1}b = 0$ .

La (6.5.20) garantisce, quindi, che la matrice di base  $\bar{B}$  è ammissibile. Perciò l'operazione di pivot rispetto all'elemento  $(\hat{\pi}_h)_k$  (operazione descritta dal Corollario 6.4.10 e dalle note successive) permette di passare alla nuova forma canonica:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \\ x_{p+h} \\ \alpha_{k+1} \\ \vdots \\ \alpha_q \\ x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \bar{B}^{-1}\bar{N} \begin{pmatrix} x_{p+1} \\ \vdots \\ x_{p+h-1} \\ \alpha_k \\ x_{p+h+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1^* \\ \vdots \\ x_p^* \end{pmatrix} \quad (6.5.21)$$

$$x \geq 0_n, \quad \alpha \geq 0_m,$$

In questa nuova forma canonica la variabile  $\alpha_k$  non appartiene al vettore delle componenti di base e, analogamente a quanto fatto nel caso (i), può essere eliminata, insieme alla colonna corrispondente, ponendo  $\alpha_k = 0$ .

La precedente operazione di pivot viene detta *scambio degenero*; tale operazione si può applicare in corrispondenza di una SBA degenera e permette di

cambiare base ammissibile senza cambiare la SBA corrispondente. Nel caso della Fase I del metodo del simplesso permette di far uscire dalla matrice di base una colonna  $e_k$  e di far entrare una colonna  $a_{p+h}$  per cui risulti  $(\hat{\pi}_h)_k \neq 0$ .

2. Nel caso in cui la riga  $k$ -esima della matrice  $H$  è costituita solamente da elementi nulli, si può dimostrare che il  $k$ -esimo vincolo del Problema (6.5.1) (quello in cui compare  $\alpha_k$ ) è ridondante e, quindi, si è in un caso in cui  $\text{rango}(A) < m$ .

Tale  $k$ -esimo vincolo può essere eliminato dal problema originario (eliminando quindi anche la variabile  $\alpha_k$ ) ottenendo un problema con un vincolo in meno. Si può dimostrare che se si riapplica la Fase I del metodo del simplesso al problema ottenuto eliminando tale vincolo, si riottiene la stessa forma canonica senza la variabile  $\alpha_k$  e la riga ad essa corrispondente.

In conclusione, riassumendo, ogni variabile artificiale  $\alpha_k$  presente nel vettore delle variabili di base può essere fatte uscire da tale vettore attraverso uno scambio degenere oppure può essere eliminata direttamente. Quindi ci si può sempre ricondurre al caso (i) in cui il vettore di base è costituito da tutte variabili originarie.

Siamo ora in grado di formulare uno schema completo del metodo del simplesso *in due fasi*.

## Il metodo del simplex in due fasi

### Fase I

- Definire il Problema Ausiliario (6.5.2)
- Determinare la soluzione ottima  $\begin{pmatrix} \alpha^* \\ x^* \end{pmatrix}$  del Problema Ausiliario utilizzando l'algoritmo per la Fase II.
- Determinare se il problema originario è ammissibile:
  - se  $\alpha_i^* \neq 0$  per qualche  $i \in \{1, \dots, m\}$  il problema originario è *inammissibile* - STOP.
  - Se  $\alpha^* = 0_m$ , il problema originario è *ammissibile*.
- Costruire la forma canonica relativa alla base ottima  $\hat{B}$  del problema ausiliario tutta composta da colonne della matrice  $A$  originaria

### Fase II

- Applicare la Fase II del metodo del simplex al problema originario a partire dalla base ammissibile determinata alla fine della Fase I.

### 6.5.3 Esempi

**Esempio 6.5.2** Applicare la Fase I del metodo del simplex al seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 = 1 \\ & 3x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

e nel caso in cui esso risulti ammissibile, determinare la forma canonica iniziale della Fase II.

Introduciamo tre variabili ausiliarie  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  e scriviamo il problema ausiliario

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + \alpha_1 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + \alpha_2 = 1 \\ & 3x_2 + x_3 + \alpha_3 = 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Naturalmente se prendiamo  $I_{B_0} = \{4, 5, 6\}$ , ovvero

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1}N_0$$

il problema ausiliario è in forma canonica rispetto alla base  $B_0$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Applichiamo, quindi, la Fase II a questo problema ausiliario in forma canonica.

#### Iterazione 0

Calcolo dei costi ridotti.

$$\gamma_0^T = (0 \ 0 \ 0) - (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ -6 \ -2)$$

*Verifica criterio di ottimalità.*

Il criterio di ottimalità fallisce perché esistono componenti di  $\gamma$  negative.

*Verifica criterio di illimitatezza.*

La verifica di questo criterio può essere omessa perché sappiamo che il problema ausiliario non può essere illimitato. Comunque si verifica immediatamente che non è soddisfatto.

*Costruzione nuova base ammissibile.*

Variabile entrante: poiché  $\gamma_2 = -6 = \min_{\gamma_i < 0} \gamma_i$ , scegliamo  $h = 2$  e quindi la seconda variabile fuori base,  $x_2$  entra in base.

Variabile uscente: dal criterio del rapporto minimo si ha

$$\min\{2/1, 1/2, 3/3\} = 1/2$$

e quindi  $k = 2$ , ovvero la seconda variabile,  $\alpha_2$  in base esce dalla base.

Scambiando le colonne si ha:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora  $B_1^{-1}N_0$  e  $B_1^{-1}b$  attraverso un'operazione di pivot. La matrice da considerare è

$$\left( \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \mathbf{2} & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Effettuando il pivot sull'elemento  $(\pi_2)_2 = 2$  si ottiene

$$\left( \begin{array}{c|ccc|c} 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 1 & 3/2 \end{array} \right)$$

e quindi la nuova forma canonica rispetto alla base  $B_1$  è

$$\begin{aligned} \min \quad & (1 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + (0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_3 \geq 0. \end{aligned}$$

## Iterazione 1

*Calcolo dei costi ridotti.*

$$\gamma_1^T = (0 \ 1 \ 0) - (1 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} = (-3 \ 3 \ -2)$$

*Verifica criterio di ottimalità.*

Il criterio di ottimalità fallisce perché esistono componenti di  $\gamma$  negative.

*Verifica criterio di illimitatezza.*

La verifica di questo criterio può essere omessa perché sappiamo che il problema ausiliario non può essere illimitato. Comunque si verifica immediatamente che non è soddisfatto.

*Costruzione nuova base ammissibile.*

Variabile entrante: poiché  $\gamma_1 = -3 = \min_{\gamma_i < 0} \gamma_i$  scegliamo  $h = 1$  e quindi la prima variabile fuori base,  $x_1$  entra in base.

Variabile uscente: dal criterio del rapporto minimo si ha

$$\min \left\{ \frac{3/2}{3/2}, \frac{3/2}{3/2} \right\} = 1;$$

scegliamo  $k = 1$ , ovvero la prima variabile in base  $\alpha_1$  esce dalla base.

Scambiando le colonne si ha:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora  $B_2^{-1}N_2$  e  $B_2^{-1}b$  attraverso un'operazione di pivot. La matrice da considerare è

$$\left( \begin{array}{c|ccc|c} \mathbf{3/2} & 1 & -1/2 & 1 & 3/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 0 & -3/2 & 1 & 3/2 \end{array} \right)$$

Effettuando il pivot sull'elemento  $(\pi_1)_1 = 3/2$  si ottiene

$$\left( \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2/3 & -1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

e quindi la nuova forma canonica rispetto alla base  $B_2$  è

$$\begin{aligned} \min (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \ \alpha_1 \geq 0, \ \alpha_2 \geq 0, \ \alpha_3 \geq 0. \end{aligned}$$

## Iterazione 2

*Calcolo dei costi ridotti.*

$$\gamma_2^T = (1 \ 1 \ 0) - (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (2 \ 2 \ 0)$$

*Verifica criterio di ottimalità.*

Il criterio di ottimalità è soddisfatto e la soluzione ottima trovata è

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \alpha_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Siamo quindi alla fine della Fase I. Dobbiamo ora verificare se il problema originario è ammissibile. Poiché la funzione obiettivo del problema ausiliario all'ottimo vale  $\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^* = 0$ , il problema originario è ammissibile. Si deve ora determinare la forma canonica iniziale della Fase II eliminando le variabili artificiali. Innanzitutto osserviamo che ci sono due variabili artificiali ( $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ ) che sono fuori base e quindi possono essere eliminate insieme alle colonne della matrice  $B_2^{-1}N_1$ , ovvero

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.5.22)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad \alpha_3 \geq 0.$$

Ora dobbiamo eliminare la variabile artificiale  $\alpha_3$  che è in base. Poiché  $\alpha_3$  è la terza variabile in base, dobbiamo esaminare la terza riga della matrice  $B^{-1}N$  per verificare se esiste un elemento  $(\pi_h)_3$  non nullo; se esaminiamo la matrice  $B^{-1}N$  ora ottenuta nella (6.5.22) dalla quale abbiamo già eliminato le colonne relative alle variabili artificiali fuori base, sappiamo, ovviamente che sono rimaste solo colonne relative a variabili originarie. Come si vede tale matrice è costituita della

sola colonna  $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$  e quindi la terza riga è costituita dal solo elemento zero.

Questo significa che la terza riga dei vincoli del problema originario è esprimibile come combinazione delle altre righe e quindi è ridondante. Tale riga può essere pertanto eliminata dal problema originario e dal problema ausiliario. Tuttavia non è necessario risolvere il problema ausiliario ottenuto eliminando la terza riga perché la base ottima del nuovo problema si ottiene rimovendo la colonna relativa alla variabile  $\alpha_3$ ; quindi la matrice di base ottima è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per ottenere  $B^{-1}N$  è sufficiente eliminare la terza riga dalla (6.5.22), ovvero risulta

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Quindi la forma canonica per iniziare la Fase II è la seguente

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

□

**Esempio 6.5.3** *Applicando il metodo del simplex, risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare:*

$$\begin{aligned} \min \quad & -4x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Risolvendo il problema ausiliario si determinare, se esiste, una soluzione ammissibile di base.

Introduciamo due variabili artificiali:  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  e scriviamo il problema ausiliario.

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha_1 + \alpha_2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + \alpha_1 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + \alpha_2 &= 3 \\ \alpha &\geq 0, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Il problema ausiliario ha una soluzione di base ammissibile facilmente individuabile (ed è così proprio per come lo abbiamo definito) e quindi possiamo applicare la seconda fase del metodo del simplex.

**Iterazione 0**  $I_{B_0} = \{4, 5\}$ ,  $I_{N_0} = \{1, 2, 3\}$ . Le quantità canoniche rispetto alla base corrente sono:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1}N_0, \quad B_0^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

*Calcolo dei coefficienti ridotti.*

$$\gamma_0^T = c_N^T - c_B^T B^{-1}N = (0, 0, 0) - (1, 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (-5, -4, -3).$$

*Verifica criterio di ottimalità.*

Poiché i coefficienti ridotti non sono tutti non negativi, dobbiamo proseguire.

Possiamo non effettuare il test di illimitatezza perché sappiamo a priori che il problema ausiliario non è illimitato (è comunque immediato verificare che non è soddisfatto).

*Costruzione nuova base ammissibile.*

Variabile entrante: scegliamo come variabile entrante quella con più basso valore del coefficiente ridotto: la prima non in base,  $x_1$  ( $h = 1$ ).

Variabile uscente: le variabili candidate a uscire dalla base sono quelle per cui  $(\pi_1)_i > 0$ , cioè, in questo caso, la prima e la seconda in base. Risulta

$$\frac{(B_0^{-1}b)_1}{(\pi_1)_1} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{(B_0^{-1}b)_2}{(\pi_1)_2} = \frac{3}{3} = 1.$$

e quindi il minimo dei rapporti  $(B_0^{-1}b)_i/(\pi_1)_i$  (per quegli  $i$  tali che  $(\pi_1)_i > 0$ ) è raggiunto per  $i = 2$ . La variabile uscente dalla base è la seconda in base ( $k = 2$ ):  $\alpha_2$ .

**Iterazione 1**  $I_{B_1} = \{4, 1\}$ ,  $I_{N_1} = \{5, 2, 3\}$ . Calcoliamo ora le quantità canoniche, relative alla base corrente, mediante l'operazione di pivot utilizzando esplicitamente la matrice di pivot  $T$ :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$B_1^{-1}N_1 = T_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1 & 4/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad B_1^{-1}b = T_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Calcolo dei coefficienti ridotti.*

$$\gamma_1^T = c_{N_1}^T - c_{B_1}^T B_1^{-1} N_1 = (1, 0, 0) - (1, 0) \begin{pmatrix} -2/3 & -1 & 4/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} = (5/3, 1, -4/3).$$

Poiché i coefficienti ridotti non sono tutti non negativi, dobbiamo proseguire.

*Costruzione nuova base ammissibile*

Variabile entrante: scegliamo come variabile entrante quella con più basso valore del coefficiente ridotto (in questo caso la scelta è obbligata perché solo un coefficiente ridotto è non negativo): la terza non in base,  $x_3$  ( $h = 3$ ) entra in base.

Variabile uscente: le variabili candidate a uscire dalla base sono quelle per cui  $(\pi_3)_i > 0$ , cioè, in questo caso, la prima e la seconda in base. Risulta

$$\frac{(B_1^{-1}b)_1}{(\pi_3)_1} = \frac{2}{4/3} = \frac{3}{2}, \quad \frac{(B_1^{-1}b)_2}{(\pi_3)_2} = \frac{1}{1/3} = 3.$$

e quindi il minimo dei rapporti  $(B_1^{-1}b)_i/(\pi_3)_i$  (per quegli  $i$  tali che  $(\pi_3)_i > 0$ ) è raggiunto per  $i = 1$ . La variabile uscente dalla base è la prima in base ( $k = 1$ ):  $\alpha_1$ .

**Iterazione 2**  $I_{B_2} = \{3, 1\}$ ,  $I_{N_2} = \{5, 2, 4\}$  Poiché tutte le variabili artificiali sono uscite dalla base il valore della funzione obiettivo del problema ausiliario è 0 nella soluzione di base corrente (che dobbiamo ancora calcolare). Siamo quindi all'ottimo del problema ausiliario ed è quindi sufficiente, per concludere, calcolare la soluzione di base corrente.

$$T_2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2^{-1}b = T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La soluzione ottima del problema ausiliario è quindi

$$x^T = (1/2, 0, 3/2, 0, 0).$$

Poiché il valore ottimo del problema ausiliario è zero la regione ammissibile del problema originario e non vuota. Una soluzione di base ammissibile si ottiene dalla soluzione ottima del problema ausiliario eliminando le componenti relative alle variabili artificiali, ovvero

$$x^T = (1/2, 0, 3/2).$$

È immediato verificare che questa è, in effetti, una soluzione di base ammissibile per il problema originario.

Passiamo ora alla Fase II del metodo del simplexso, sapendo quindi che una base ammissibile per il problema originario è

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

corrispondente alle variabili  $x_3, x_1$ . Calcoliamo le quantità canoniche; abbiamo già calcolato la matrice  $T$ , quindi possiamo calcolare queste quantità utilizzando le informazioni ottenute nelle iterazioni precedenti. In particolare risulta

$$B^{-1}N = T \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e inoltre abbiamo già calcolato

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Quindi la forma canonica iniziale della Fase II è

$$\begin{aligned}
 & \min -4x_1 - x_2 - x_3 \\
 & \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/4 \\ 5/4 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\
 & x \geq 0
 \end{aligned}$$

*Calcolo dei coefficienti di costo ridotto.*

$$\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = -1 - (-1 \quad -4) \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 13/4 > 0$$

La soluzione  $x^T = (1/2, 0, 3/2)$  è quindi ottima per il problema originario.  $\square$

**Esempio 6.5.4** Applicando il metodo del simplex risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{array}{llll} \max & -x_1 & - & x_2 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \geq 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \geq 1 \\ & & & x & \geq 0. \end{array}$$

Innanzitutto il problema deve essere riscritto in forma standard; introducendo due variabili di surplus si ha

$$\begin{array}{llll} \min & x_1 & + & x_2 \\ & x_1 & - & 2x_2 & - x_3 & = 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & - x_4 & = 1 \\ & & & & x & \geq 0. \end{array}$$

Risolvendo il problema ausiliario si determina, se esiste, una soluzione ammissibile di base. Introduciamo ora due variabili artificiali,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  e scriviamo il problema ausiliario.

$$\begin{array}{llll} \min & \alpha_1 & + & \alpha_2 \\ & x_1 & - & 2x_2 & - x_3 & + \alpha_1 & = 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & - x_4 & + \alpha_2 & = 1 \\ & & & & \alpha \geq 0 & & x \geq 0. \end{array}$$

Poiché una soluzione di base ammissibile è evidente per il problema ausiliario possiamo applicare la Fase II del metodo del simplex.

**Iterazione 0**  $I_B = \{5, 6\}$ ,  $I_N = \{1, 2, 3, 4\}$ . Le quantità canoniche, relative alla base corrente sono

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B^{-1}N, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B^{-1}b$$

Calcolo dei coefficienti ridotti.

$$\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (0, 0, 0, 0) - (1, 1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (0, 1, 1, 1).$$

Poichè i coefficienti ridotti sono tutti non negativi, siamo all'ottimo. La soluzione corrente è

$$x = (0, 0, 0, 0, 1, 1)^T$$

alla quale corrisponde il valore ottimo 2. Possiamo quindi concludere che il problema originario non ammette soluzioni ammissibili. Si lascia allo studente una verifica diretta per via geometrica della inammissibilità del problema originario; infatti è immediato rappresentare sul piano Cartesiano l'insieme ammissibile del problema originario e verificare che esso è vuoto.  $\square$

**Esempio 6.5.5** Applicando il metodo del simplex risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 \\ x_1 + x_2 & \geq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq 4 \\ x_1 & \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Innanzitutto scriviamo il problema in forma standard aggiungendo una variabile di surplus ( $x_3$ ) e una variabile di slack ( $x_4$ ):

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 & = 4 \\ x_i & \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Poiché si dispone già della quarta colonna (corrispondente ad  $x_4$ ) data da  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  da utilizzare come seconda colonna della matrice identità della base, è sufficiente introdurre una sola variabile artificiale nel primo vincolo (anche se i vincoli sono due e quindi  $m = 2$ ) per definire il problema ausiliario

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + \alpha_1 & = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 & = 4 \\ x_i & \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \alpha_1 \geq 0. \end{aligned}$$

In questo modo è disponibile la forma canonica rispetto alla base formata dalla quinta e quarta colonna, ovvero:  $I_{B_0} = \{5, 4\}$  e  $I_{N_0} = \{1, 2, 3\}$  e

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1} \quad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = B_0^{-1} N_0$$

e il problema ausiliario in forma canonica è

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha_1 \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \\ x \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0. & \end{aligned}$$

Applichiamo ora la Fase II al problema ausiliario:

*Calcolo dei coefficienti ridotti.*

$$\gamma_0^T = (0 \ 0 \ 0) - (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = (-1 \ -1 \ 1).$$

*Verifica criterio di ottimalità.*

Poiché esistono componenti di  $\gamma$  negative, il criterio non è verificato.

Poiché il problema ausiliario non può essere illimitato, la verifica del criterio di illimitatezza può essere omessa, e comunque, si vede immediatamente che non è verificato.

*Costruzione nuova base ammissibile.*

Variabile entrante: scegliamo  $h = 1$ , in corrispondenza della prima componente di  $\gamma$ ; quindi la prima variabile fuori base,  $x_1$ , entra in base.

Variabile uscente: dal criterio del rapporto minimo si ricava che deve uscire dalla base la seconda variabile ( $x_4$ ) ovvero  $k = 2$ .

Effettuando lo scambio si ha:  $I_{B_1} = \{5, 1\}$  e

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Effettuando un'operazione di pivot sull'elemento  $(\pi_1)_{22} = 2$  nella matrice

$$\left( \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ \hline \mathbf{2} & 1 & 3 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

si ottiene

$$\left( \begin{array}{c|ccc|c} 0 & -1/2 & -1/2 & -1 & 4 \\ \hline 1 & 1/2 & 3/2 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

e quindi la nuova forma canonica è

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha_1 \\ \left( \begin{array}{c} \alpha_1 \\ x_1 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{ccc} -1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ x \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Effettuiamo una nuova iterazione:

*Calcolo dei coefficienti ridotti.*

$$\gamma_1^T = (0 \ 0 \ 0) - (1 \ 0) \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & 0 \end{pmatrix} = (1/2 \ 1/2 \ 1).$$

Quindi abbiamo ottenuto la soluzione ottima del problema ausiliario. A questo punto deve essere fatta la verifica circa l'ammissibilità del problema originario: poiché c'è la variabile artificiale  $\alpha_1$  in base con valore 4, la funzione obiettivo del problema ausiliario non è nulla all'ottimo e quindi il problema originario è inammissibile. Si lascia allo studente una verifica diretta per via geometrica della inammissibilità del problema originario; infatti è immediato rappresentare sul piano Cartesiano l'insieme ammissibile del problema originario e verificare che esso è vuoto  $\square$

**Esempio 6.5.6** Supponiamo che, dopo aver applicato la Fase I del metodo del simplex si ottenga la seguente forma canonica:

$$\begin{aligned} & \min \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \left( \begin{array}{c} \alpha_1 \\ x_1 \\ \alpha_2 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{cccc} 0 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} x_2 \\ \alpha_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 10 \\ 0 \end{array} \right) \\ & x \geq 0, \quad \alpha \geq 0 \end{aligned}$$

Verificare se il problema originario è ammissibile e, in caso affermativo, determinare la forma canonica iniziale per la Fase II.

Osservando la forma canonica si ottiene che la soluzione ottima del problema ausiliario è

$$\left( \begin{array}{c} \alpha_1 \\ x_1 \\ \alpha_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 10 \\ 0 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{c} x_2 \\ \alpha_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right)$$

e quindi il valore della funzione obiettivo del problema ausiliario all'ottimo vale  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$  e quindi il problema originario è ammissibile. Determiniamo ora una forma canonica per il problema originario:

La variabile ausiliaria  $\alpha_3$  è fuori base, quindi può essere eliminata insieme alla colonna  $\pi_2$ . Quindi, per quanto riguarda i vincoli di uguaglianza si ottiene

$$\left( \begin{array}{c} \alpha_1 \\ x_1 \\ \alpha_2 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 10 \\ 0 \end{array} \right)$$

Le variabili  $\alpha_1, \alpha_2$  sono invece in base.

- La variabile  $\alpha_2$  è la terza variabile in base e quindi si deve analizzare la terza riga della matrice  $B^{-1}N$  che è

$$(0 \ 0 \ 0).$$

Ovvero alla variabile  $\alpha_2$  corrisponde una riga tutta nulla nella matrice  $B^{-1}N$  ottenuta eliminando le variabili artificiali fuori base, cioè non esistono colonne  $\pi_h$  associate a variabili originarie tali che  $(\pi_h)_k \neq 0$ . Questo significa che il vincolo in cui compare la variabile  $\alpha_2$  è ridondante e può essere eliminato. Si ottiene così

$$\left( \begin{array}{c} \alpha_1 \\ x_1 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 10 \end{array} \right)$$

- La variabile  $\alpha_1$  è nulla ed è la prima variabile in base e nella prima riga della nuova matrice  $B^{-1}N$  ora ottenuta esiste un elemento tale  $(\pi_h)_1 \neq 0$ : si ottiene per  $h = 2$ , ovvero  $(\pi_2)_1 = -1$ ; è possibile quindi effettuare uno *scambio degenero* tra la variabile  $\alpha_1$  in base e la seconda variabile fuori base corrispondente a  $x_3$ . Questo corrisponde alle nuove matrici

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La nuova base  $\tilde{B}$  è tale che  $\tilde{B}^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ .

Si calcola  $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$  con un'operazione di pivot. La matrice di pivot è

$$(\pi_2 \mid \pi_1 \ e_1 \ \pi_3 \mid B^{-1}b)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} -1 & | & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 4 & | & 2 & 0 & 2 & | & 10 \end{pmatrix}.$$

Effettuando un'operazione di pivot sull'elemento  $(\pi_2)_1 = -1$  si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & | & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 2 & 4 & 2 & | & 10 \end{pmatrix}.$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \alpha_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

A questo punto la variabile  $\alpha_1$  è fuori base e può quindi essere eliminata ottenendo la forma canonica per il problema originario che presenta i vincoli di uguaglianza nella forma

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

□

**Esempio 6.5.7** Supponiamo che, dopo aver applicato la Fase I del metodo del simplex si ottenga la seguente forma canonica:

$$\begin{aligned} & \min \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \left( \begin{array}{c} \alpha_1 \\ x_1 \\ \alpha_2 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{cccc} 0 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} x_2 \\ \alpha_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c} 0 \\ 10 \\ 1 \end{array} \right) \\ & x \geq 0, \quad \alpha \geq 0 \end{aligned}$$

Verificare se il problema originario è ammissibile e, in caso affermativo, determinare la forma canonica iniziale per la Fase II.

Osservando la forma canonica si ottiene che la soluzione ottima del problema ausiliario è

$$\left( \begin{array}{c} \alpha_1 \\ x_1 \\ \alpha_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 10 \\ 1 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{c} x_2 \\ \alpha_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right)$$

e quindi il valore della funzione obiettivo del problema ausiliario all'ottimo vale  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \neq 0$  e quindi il problema originario non è ammissibile.  $\square$



# 7

---

## *La dualità nella Programmazione Lineare*

In questo capitolo verrà introdotto un concetto di fondamentale importanza sia per l'analisi dei problemi di Programmazione Lineare, sia per lo sviluppo di algoritmi risolutivi, sia per l'interpretazione dei risultati da essi prodotti. Si tratta del concetto di *dualità* che è legato alla possibilità di associare ad ogni problema di Programmazione Lineare un altro problema di Programmazione Lineare (chiamato *problema duale*) che ha la particolarità di permettere la deduzione di importanti proprietà del problema originario; quest'ultimo viene chiamato *problema primale*. In particolare, da un punto di vista computazionale, sarà possibile risolvere il problema duale al posto del problema primale e ottenere comunque le informazioni desiderate sulla soluzione ottima del problema primale.

Verrà inoltre esaminata un'interpretazione economica delle variabili del problema duale

Si osservi che la teoria della dualità sarà esaminata in relazione a problemi di Programmazione Lineare, ma essa può essere estesa anche al caso di problemi di Programmazione Non Lineare.

### 7.1 TEORIA DELLA DUALITÀ

Un modo di introdurre il problema duale può essere quello di far riferimento alla possibilità di determinare delle stime inferiori del valore ottimo della funzione obiettivo di un problema di Programmazione Matematica (in forma di problema di minimizzazione). In particolare, dato un problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases} \quad (7.1.1)$$

(dove  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ ) se si dispone di un punto ammissibile  $\tilde{x}$  può risultare molto interessante capire se esso rappresenta una buona stima di un punto di ottimo senza risolvere il problema esattamente. Infatti se si conoscesse una buona stima  $\phi$  del valore ottimo potremmo capire la “bontà” del punto  $\tilde{x}$  confrontando il valore  $c^T \tilde{x}$  con la stima  $\phi$ .

A questo scopo, sia  $x^*$  una soluzione ottima del problema (7.1.1); allora per ogni  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \geq 0$ , poiché  $Ax^* \geq b$  risulta

$$\begin{aligned} c^T x^* &\geq c^T x^* + u^T (b - Ax^*) \\ &= b^T u + (c^T - u^T A)x^*. \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Se si restringe ulteriormente la scelta del vettore  $u$  si può eliminare la presenza di  $x^*$  dal membro di destra della (7.1.2). Infatti, per ogni  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \geq 0$ , tale che

$$A^T u = c,$$

la (7.1.2) si riduce a  $b^T u$  e quindi risulta

$$c^T x^* \geq b^T u. \quad (7.1.3)$$

Per rendere quanto più possibile stringente la stima della limitazione inferiore del valore ottimo della funzione obiettivo  $c^T x^*$  si può rendere quanto più possibile grande il termine di destra della diseguaglianza (7.1.3), cioè si può massimizzare la quantità  $b^T u$  al variare del vettore  $u \in \mathbb{R}^n$ , tra tutti i vettori che soddisfano  $A^T u = c$ ,  $u \geq 0$ . Più formalmente si ha

$$c^T x^* \geq b^T u^*$$

dove  $u^*$  è soluzione del problema

$$\begin{cases} \max b^T u \\ A^T u = c \\ u \geq 0 \end{cases} \quad (7.1.4)$$

Questo problema viene definito *problema duale* del problema dato (7.1.1) che viene denominato *problema primale*.

La possibilità di definire un problema duale non è legato al fatto che il problema dato abbia solo vincoli di diseguaglianza e variabili non vincolate in segno come è il problema (7.1.1). Infatti, si consideri un problema Programmazione Lineare scritto nella forma più generale possibile cioè nella forma

$$(P) \quad \begin{cases} \min c^T x + d^T y \\ Cx + Dy = h \\ Ex + Fy \geq g \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (7.1.5)$$

con  $x \in \mathbb{R}^p$ ,  $c \in \mathbb{R}^p$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ ,  $d \in \mathbb{R}^{n-p}$ ;  $C$  matrice  $q \times p$ ,  $D$  matrice  $q \times (n-p)$  e  $h \in \mathbb{R}^q$ ;  $E$  matrice  $(m-q) \times p$ ,  $F$  matrice  $(m-q) \times (n-p)$  e  $g \in \mathbb{R}^{m-q}$ . La notazione in cui è scritto questo generico problema di Programmazione Lineare (P) è tale da evidenziare separatamente gli elementi che intervengono nella formulazione: le variabili sono partizionate nella variabili  $x$  vincolate in segno e  $y$  non vincolate in segno e corrispondentemente anche i coefficienti di costo della funzione obiettivo sono partizionati in  $c$  e  $d$ ; i vincoli sono scritti suddividendo quelli di uguaglianza e quelli di disuguaglianza (nella forma di maggiore o uguale).

Per costruire il problema duale del problema (P) è sufficiente ripetere i ragionamenti fatti in relazione al problema (7.1.1) dopo aver trasformato il problema (P) in un problema equivalente con soli vincoli di disuguaglianza cioè nella forma (7.1.1). A tale scopo riscriviamo il problema (P) nella forma equivalente

$$\begin{cases} \min c^T x + d^T y \\ Cx + Dy \geq h \\ -Cx - Dy \geq -h \\ Ex + Fy \geq g \\ I_p x \geq 0 \end{cases}$$

dove  $I_p$  è la matrice identità di ordine  $p$ . I vincoli di questo problema possono essere scritti in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} C & D \\ -C & -D \\ E & F \\ I_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} h \\ -h \\ g \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi il problema (P) è stato ricondotto nella forma (7.1.1). Siamo quindi in grado di scrivere il duale di questo problema nella forma (7.1.4) cioè:

$$\begin{cases} \max h^T t - h^T w + g^T v \\ C^T t - C^T w + E^T v + I_p z = c \\ D^T t - D^T w + F^T v = d \\ t \geq 0, w \geq 0, v \geq 0, z \geq 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \max h^T(t-w) + g^T v \\ C^T(t-w) + E^T v + I_p z = c \\ D^T(t-w) + F^T v = d \\ t \geq 0, w \geq 0, v \geq 0, z \geq 0. \end{cases}$$

Eliminando la variabile  $z$  ed effettuando il cambio di variabili  $t-w=u$  si ottiene il seguente problema nelle variabili  $(u, v)$ , con  $u$  non vincolata in segno e  $v \geq 0$ :

$$(D) \quad \begin{cases} \max h^T u + g^T v \\ C^T u + E^T v \leq c \\ D^T u + F^T v = d \\ v \geq 0 \end{cases} \quad (7.1.6)$$

con  $u \in \mathbb{R}^q$  e  $v \in \mathbb{R}^{m-q}$ .

Il problema (D) è il *problema duale* del problema (P) che viene detto *problema primale*. Le variabili  $(x, y)$  sono dette *variabili primali*; le variabili  $(u, v)$  sono

dette *variabili duali*. I due problemi (P) e (D) vengono chiamati *coppia primale–duale*. In maniera del tutto simmetrica, il problema (P) risulterà il problema duale del problema (D).

Dall’osservazione dei due problemi (P) e (D) si deducono facilmente le proprietà fondamentali di una coppia primale–duale; innanzitutto un problema è di minimizzazione mentre l’altro è di massimizzazione. Inoltre poiché la matrice dei coefficienti dei vincoli di un problema si ottiene trasponendo quella dell’altro, si ha che ad ogni variabile di un problema corrisponde un vincolo nell’altro. Si osserva inoltre uno scambio tra i termini noti di un problema e i coefficienti della funzione obiettivo dell’altro.

Queste proprietà possono essere così schematicamente riassunte:

- il problema duale di un problema di minimizzazione è un problema di massimizzazione e simmetricamente, il problema duale di un problema di massimizzazione è un problema di minimizzazione;
- ad ogni vincolo di uguaglianza del problema primale è associata una variabile nel problema duale non vincolata in segno che ha come coefficiente nella funzione obiettivo duale il termine noto del vincolo primale associato;
- ad ogni vincolo di diseguaglianza (di maggiore o uguale) del problema primale è associata una variabile nel problema duale vincolata in segno che ha come coefficiente nella funzione obiettivo duale il termine noto del vincolo primale associato;
- ad ogni variabile vincolata in segno del problema primale è associato un vincolo di diseguaglianza (di minore o uguale) del problema duale il cui termine noto è dato dal coefficiente della funzione obiettivo primale;
- ad ogni variabile non vincolata in segno del problema primale è associato un vincolo di uguaglianza del problema duale il cui termine noto è dato dal coefficiente della funzione obiettivo primale.

Queste corrispondenze possono essere riassunte nella tabella che segue dove gli insieme  $I$ ,  $J$ ,  $M$  e  $N$  sono insiemi di indici:

	PRIMALE	DUALE	
	$\min c^T x$	$\max b^T u$	
VINCOLI	$= b_i, \quad i \in I$	$u_i, \quad i \in I, \text{ libere}$	VARIABILI
	$\geq b_i, \quad i \in J$	$u_i, \quad i \in J, \quad u_i \geq 0$	
VARIABILI	$x_j \geq 0, \quad j \in M$	$\leq c_j, \quad j \in M$	VINCOLI
	$x_j, \quad j \in N \text{ libere}$	$= c_j, \quad j \in N$	

Un importante caso di coppia primale–duale è ottenuto considerando nel problema primale solamente i vincoli di diseguaglianza e solamente variabili vincolate in segno. In questo caso si ottiene la seguente coppia di problemi:

$$(P) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (D) \quad \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  e  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Tale coppia di problemi viene detta *coppia primale–duale simmetrica*. A tale coppia particolare primale–duale si farà spesso riferimento nel seguito anche in relazione a considerazioni riguardanti l’interpretazione della dualità per problemi di Programmazione Lineare che sono formulazioni di importanti classi di modelli lineari.

Seguono ora alcuni esempi di costruzione del problema duale di un problema di Programmazione Lineare assegnato.

**Esempio 7.1.1** *Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \\ x_1 - 5x_3 + 2x_4 \geq 7 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 \geq 9. \end{cases}$$

Il problema duale associato è

$$\begin{cases} \max 7u_1 + 9u_2 \\ u_1 + 2u_2 = 2 \\ 4u_2 = 3 \\ -5u_1 - 6u_2 = 4 \\ 2u_1 = 1 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Esempio 7.1.2** Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \max 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ 2x_1 - x_3 \leq 7 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 5 \\ x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Il problema duale è il seguente problema di minimizzazione

$$\begin{cases} \min 8u_1 + 7u_2 + 5u_3 + 6u_4 \\ u_1 + 2u_2 + 3u_3 = 4 \\ 2u_1 + 4u_3 + u_4 \geq 3 \\ 3u_1 - u_2 - u_3 - u_4 = 2 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Esempio 7.1.3** Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \min 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 7 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 \leq 9 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Dopo aver riscritto il secondo vincolo come  $-x_1 - x_2 + 6x_3 \geq -9$  si può formulare facilmente il problema duale associato

$$\begin{cases} \max 7u_1 - 9u_2 + 8u_3 \\ 3u_1 - u_2 + 4u_3 \leq 2 \\ u_1 - u_2 - u_3 \leq -3 \\ 5u_1 + 6u_2 - 2u_3 = 1 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

### 7.1.1 Risultati fondamentali della teoria della dualità

Una coppia primale-duale di problemi di Programmazione Lineare gode di proprietà importanti sia dal punto di vista teorico sia da quello pratico. I risultati che verranno di seguito analizzati valgono per una generica coppia primale-duale,

ma per brevità e semplicità di notazioni essi sono enunciati e dimostrati facendo riferimento alla coppia primale duale simmetrica

$$(P) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (D) \quad \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases} \quad (7.1.7)$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  e  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Il primo risultato che si vuole analizzare discende in maniera naturale dal modo in cui è stato introdotto il problema duale.

**Teorema 7.1.1 – TEOREMA DELLA DUALITÀ DEBOLE**

Per ogni soluzione ammissibile  $\bar{x}$  del problema primale (P) ed ogni soluzione ammissibile  $\bar{u}$  del problema duale (D) si ha

$$b^T \bar{u} \leq c^T \bar{x}$$

cioè il valore della funzione obiettivo duale in  $\bar{u}$  è minore o uguale del valore della funzione obiettivo primale in  $\bar{x}$ .

*Dimostrazione:* Poiché  $\bar{x}$  è soluzione ammissibile per il problema primale (P), deve risultare  $A\bar{x} \geq b$ ; tale diseguaglianza può essere riscritta nella forma  $\bar{x}^T A^T \geq b^T$ . Effettuando il prodotto scalare di entrambi i membri di questa diseguaglianza per  $\bar{u}$  (che è non negativo perché  $\bar{u}$  è ammissibile per il problema duale) si ottiene

$$\bar{x}^T A^T \bar{u} \geq b^T \bar{u}. \quad (7.1.8)$$

In modo del tutto analogo, poiché  $\bar{u}$  è soluzione ammissibile per il problema duale (D), deve risultare  $A^T \bar{u} \leq c$  che può essere riscritta nella forma  $\bar{u}^T A \leq c^T$ . Effettuando il prodotto scalare di entrambi i membri di questa diseguaglianza per  $\bar{x}$  (che è non negativo perché  $\bar{u}$  è ammissibile per il problema primale) si ottiene

$$\bar{u}^T A \bar{x} \leq c^T \bar{x}. \quad (7.1.9)$$

Dalla (7.1.8) e dalla (7.1.9) si ottiene

$$b^T \bar{u} \leq \bar{x}^T A^T \bar{u} = \bar{u}^T A \bar{x} \leq c^T \bar{u}$$

che è quanto si voleva dimostrare.  $\square$

Da questo importante teorema discendono due conseguenze immediate che sono riportate nei corollari che seguono.

**Corollario 7.1.4** Se  $\bar{x}$  è una soluzione ammissibile del problema primale (P) e  $\bar{u}$  una soluzione ammissibile del problema duale (D) tali che

$$c^T \bar{x} = b^T \bar{u} \quad (7.1.10)$$

allora  $\bar{x}$  e  $\bar{u}$  sono soluzioni ottime rispettivamente per il problema primale (P) e per il problema duale (D).

*Dimostrazione:* La dimostrazione procede per assurdo. Infatti, supponiamo per assurdo che  $\bar{u}$  non sia soluzione ottima del problema duale (D). Questo significa che esiste una soluzione ammissibile del problema duale (D) che indichiamo con  $\tilde{u}$  tale che

$$b^T \tilde{u} > b^T \bar{u}.$$

Per la (7.1.10) si avrebbe

$$b^T \tilde{u} > b^T \bar{u} = c^T \bar{x}$$

contraddicendo il Teorema 7.1.1 (Teorema della Dualità debole).

Simmetricamente, si ottiene una contraddizione supponendo che  $\bar{x}$  non sia soluzione ottima del problema primale (P).  $\square$

**Corollario 7.1.5** Se il problema primale (P) è illimitato (inferiormente) allora il problema duale (D) è inammissibile. Viceversa, se il problema duale è illimitato (superiormente) allora il problema primale è inammissibile.

*Dimostrazione:* Supponiamo che il problema primale (P) sia illimitato e che, per assurdo, il problema duale (D) non sia inammissibile, cioè che esista una soluzione ammissibile  $\bar{u}$  del problema duale (D). Per il Teorema 7.1.1 (Teorema della Dualità debole), per ogni soluzione ammissibile  $x$  del problema primale (P) deve valere

$$b^T \bar{u} \leq c^T x \quad (7.1.11)$$

e, poiché si è supposto che il problema primale (P) è illimitato inferiormente, con la (7.1.11) si ottiene una contraddizione al fatto che  $\bar{u}$  è una soluzione ammissibile del problema duale (D). In modo del tutto simmetrico si dimostra il viceversa.  $\square$

Oltre alle proprietà fino ad ora esaminate, nel caso di problemi di Programmazione Lineare è vera anche un'altra proprietà che è solitamente chiamata *dualità forte* che fornisce una caratterizzazione importante nel caso in cui esista soluzione ottima di uno dei due problemi della coppia primale duale. Questa proprietà è descritta nel seguente teorema che si riporta senza dimostrazione in quanto la

dimostrazione richiederebbe la conoscenza di ulteriori risultati preliminari la cui trattazione esula dallo scopo di queste note.

**Teorema 7.1.2 – TEOREMA DELLA DUALITÀ FORTE**

*Se il problema primale (P) ammette una soluzione ottima  $x^*$  allora anche il problema duale (D) ammette una soluzione ottima  $u^*$ . Simmetricamente, se il problema duale (D) ammette una soluzione ottima  $u^*$  allora anche il problema primale (P) ammette una soluzione ottima  $x^*$ . Inoltre i valori delle funzioni obiettivo dei due problemi all'ottimo sono uguali cioè risulta*

$$c^T x^* = b^T u^*.$$

Siamo ora in grado di formulare delle *condizioni di ottimalità* in riferimento alla coppia primale–duale simmetrica; esse costituiscono una caratterizzazione analitica delle soluzioni ottime del problema primale e del problema duale; enunciamo queste condizioni nel seguente teorema che discende immediatamente dai risultati già ottenuti:

**Teorema 7.1.3 – CONDIZIONI DI OTTIMALITÀ**

*Siano dati  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ . Allora  $\bar{x}$  e  $\bar{u}$  sono soluzioni ottime rispettivamente per il problema primale (P) e per il problema duale (D) se e solo se valgono le seguenti condizioni*

- (i)  $A\bar{x} \geq b, \bar{x} \geq 0$  *(ammissibilità primale)*
- (ii)  $A^T \bar{u} \leq c, \bar{u} \geq 0$  *(ammissibilità duale)*
- (iii)  $c^T \bar{x} = b^T \bar{u}$ . *(coincidenza dei valori delle funzioni obiettivo)*

Sulla base dei risultati fino ad ora esaminati si evince che data un coppia primale–duale di problemi di Programmazione Lineare possono verificarsi le seguenti situazioni: o entrambi ammettono soluzione ottima, oppure se uno è illimitato l'altro è inammissibile, oppure sono entrambi inammissibili. Queste possibilità sono riportate schematicamente nella tabella che segue.

		DUALE		
		OTTIMO FINITO	ILLIMITATO SUPERIOR.	INAMMISSIBILE
PRIMALE	OTTIMO FINITO	SI	NO	NO
	ILLIMITATO INFERIOR.	NO	NO	SI
	INAMMISSIBILE	NO	SI	SI

Ribadiamo che tutti i risultati ottenuti nel caso di una coppia primale–duale simmetrica (7.1.7) si estendono facilmente ad una qualsiasi coppia primale–duale.

Seguono alcuni esempi che illustrano i risultati teorici ora esaminati.

**Esempio 7.1.6** *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 4x_2 \geq 24 \\ 5x_1 + x_2 \geq 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

*Geometricamente si ricava facilmente che questo problema ammette soluzione ottima nel punto  $(x_1, x_2) = (4, 5)$  e il valore ottimo della funzione obiettivo è pari a 19. Se si considera il problema duale*

$$\begin{cases} \max 24u_1 + 25u_2 \\ u_1 + 5u_2 \leq 1 \\ 4u_1 + u_2 \leq 3 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0; \end{cases}$$

*si ricava facilmente (geometricamente) che, in accordo con quanto previsto dal Teorema della Dualità Forte, anche questo problema ammette soluzione ottima*

— nel punto  $(u_1, u_2) = \left(\frac{14}{19}, \frac{1}{19}\right)$  — e il valore ottimo della funzione obiettivo vale 19.

**Esempio 7.1.7** Si consideri il problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \max 2x_1 + 3x_2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

Geometricamente si ricava che il problema è illimitato superiormente. Quindi, per l'analisi teorica vista deve risultare che il suo duale è inammissibile. E infatti se si considera il problema duale associato

$$\begin{cases} \min 3u_1 + 6u_2 \\ -2u_1 - \frac{1}{2}u_2 \geq 2 \\ u_1 + u_2 \geq 3 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

si vede facilmente che questo problema non ammette soluzioni ammissibili.

**Esercizio 7.1.8** Risolvere graficamente i problemi di Programmazione Lineare proposti nell'Esempio 7.1.6 e nell'Esempio 7.1.7 e verificare le conclusioni tratte negli esempi.

### 7.1.2 Condizioni di complementarità

Un'ulteriore proprietà della coppia primale-duale è la cosiddetta *complementarità*. Tale proprietà è di fondamentale importanza anche negli sviluppi algoritmici in quanto è alla base dei cosiddetti *metodi primali duali* per soluzione dei problemi di Programmazione Lineare.

Anche in questo caso si farà riferimento alla coppia primale-duale simmetrica

$$(P) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (D) \quad \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  e  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , ma tutti i risultati sono validi nel caso di una qualsiasi coppia primale-duale.

In particolare, riportiamo di seguito un teorema fondamentale che caratterizza ulteriormente le soluzioni ottime di una coppia primale-duale di problemi di Programmazione Lineare.

**Teorema 7.1.4** *Sia  $\bar{x}$  un punto ammissibile del problema primale (P) e sia  $\bar{u}$  un punto ammissibile del problema duale (D). Allora  $\bar{x}$  e  $\bar{u}$  sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P) e del problema duale (D) se e solo se soddisfano le seguenti condizioni:*

$$\bar{u}^T(A\bar{x} - b) = 0 \quad (7.1.12)$$

$$\bar{x}^T(c - A^T\bar{u}) = 0. \quad (7.1.13)$$

*Dimostrazione:* Iniziamo supponendo che  $\bar{x}$  e  $\bar{u}$  sono soluzioni ammissibili rispettivamente per il problema primale (P) e per il problema duale (D) e che valgano le (7.1.12) e (7.1.13), e mostrando che allora  $\bar{x}$  e  $\bar{u}$  sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P) e del problema duale (D). Allora dalla (7.1.12) si ha  $\bar{u}^T A \bar{x} = \bar{u}^T b$  e dalla (7.1.13) si ha  $\bar{x}^T c = \bar{x}^T A^T \bar{u}$ , da cui

$$b^T \bar{u} = \bar{u}^T b = \bar{u}^T A \bar{x} = \bar{x}^T A^T \bar{u} = \bar{x}^T c = c^T \bar{x}.$$

Quindi risulta  $b^T \bar{u} = c^T \bar{x}$  e dal Teorema 7.1.3 si ha che  $\bar{x}$  e  $\bar{u}$  sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P) e del problema duale (D).

Supponiamo ora che  $\bar{x}$  e  $\bar{u}$  siano soluzioni ottime rispettivamente del problema e dimostriamo allora che devono valere le condizioni (7.1.12) e (7.1.13). Se  $\bar{x}$  e  $\bar{u}$  sono soluzioni ottime per i rispettivi problemi, dal Teorema 7.1.3 si ha che deve valere  $c^T \bar{x} = b^T \bar{u}$ . Ora, poiché  $\bar{x}$  e  $\bar{u}$  sono ammissibili rispettivamente per il problema (P) e per il problema (D) si ha

$$A\bar{x} \geq b, \quad \bar{x} \geq 0 \quad (7.1.14)$$

$$A^T\bar{u} \leq c, \quad \bar{u} \geq 0. \quad (7.1.15)$$

Effettuando il prodotto scalare di entrambi i membri della (7.1.14) per  $\bar{u}$  e di entrambi i membri della (7.1.15) per  $\bar{x}$  si ha

$$\begin{aligned} \bar{u}^T A \bar{x} &\geq \bar{u}^T b \\ \bar{x}^T A^T \bar{u} &\leq \bar{x}^T c. \end{aligned}$$

Da queste due diseguaglianze segue che

$$\bar{u}^T b \leq \bar{u}^T A \bar{x} = \bar{x}^T A^T \bar{u} \leq \bar{x}^T c \quad (7.1.16)$$

e poiché stiamo supponendo  $c^T \bar{x} = b^T \bar{u}$  allora la (7.1.16) diventa

$$\bar{u}^T b = \bar{u}^T A \bar{x} = \bar{x}^T A^T \bar{u} = \bar{x}^T c$$

dalla quale discende immediatamente

$$\begin{aligned}\bar{u}^T(A\bar{x} - b) &= 0 \\ \bar{x}^T(c - A^T\bar{u}) &= 0\end{aligned}$$

che sono le condizioni (7.1.12) e (7.1.13).  $\square$

Le condizioni (7.1.12) e (7.1.13) vengono chiamate *condizioni di complementarità* e costituiscono, di fatto, delle condizioni di ottimalità per i problemi della coppia primale-duale.

Dal precedente risultato seguono facilmente i seguenti corollari.

**Corollario 7.1.9** *Sia  $\bar{x}$  un punto ammissibile del problema primale (P) e sia  $\bar{u}$  un punto ammissibile del problema duale (D). Allora  $\bar{x}$  e  $\bar{u}$  sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P) e del problema duale (D) se e solo se soddisfano le seguenti condizioni:*

$$\bar{u}_j(A\bar{x} - b)_j = 0 \quad (7.1.17)$$

$$\bar{x}_i(c - A^T\bar{u})_i = 0. \quad (7.1.18)$$

$$i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

*Dimostrazione:* Per il Teorema 7.1.4  $\bar{x}$  e  $\bar{u}$  sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi se e solo se i prodotti scalari

$$\begin{aligned}\bar{u}^T(A\bar{x} - b) \\ \bar{x}^T(c - A^T\bar{u})\end{aligned}$$

sono nulli. Ora, poiché per l'ammissibilità primale risulta  $A\bar{x} - b \geq 0$  e  $\bar{x} \geq 0$  e per l'ammissibilità duale risulta  $c - A^T\bar{u} \geq 0$  e  $\bar{u} \geq 0$ , si ha che affinché ciascuno dei prodotti scalari risulti nullo, ogni termine dei due prodotti deve essere nullo e quindi il corollario è dimostrato.  $\square$

Il Corollario (7.1.9) può essere formulato in maniera del tutto equivalente nella seguente forma:

**Corollario 7.1.10** *Sia  $\bar{x}$  un punto ammissibile del problema primale (P) e sia  $\bar{u}$  un punto ammissibile del problema duale (D). Allora  $\bar{x}$  e  $\bar{u}$  sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P) e del problema duale (D) se e solo se soddisfano le seguenti proprietà:*

- (i) *per ogni variabile del problema (P) che assume valore non nullo il corrispondente vincolo del problema duale (D) deve essere soddisfatto all'uguaglianza;*
- (ii) *per ogni variabile del problema (D) che assume valore non nullo il corrispondente vincolo del problema primale (P) è soddisfatto all'uguaglianza.*

Il Teorema 7.1.4 e i successivi corollari forniscono delle *condizioni di ottimalità* per i problemi Programmazione Lineare; essi infatti forniscono delle condizioni necessarie e sufficienti che caratterizzano analiticamente la soluzione ottima di un problema di Programmazione Lineare. Per completezza riportiamo queste condizioni formalizzate nel seguente teorema.

**Teorema 7.1.5 CONDIZIONI DI OTTIMALITÀ**

*Due punti  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$  sono soluzioni ottime rispettivamente del problema (P) e (D) se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

- (i)  $A\bar{x} \geq b, \bar{x} \geq 0$  *(ammissibilità primale)*
- (ii)  $A^T\bar{u} \leq c, \bar{u} \geq 0$  *(ammissibilità duale)*
- (iii)  $\bar{u}^T(A\bar{x} - b) = 0$  *(condizioni di complementarità)*
- (iv)  $\bar{x}^T(c - A^T\bar{u}) = 0.$

Ribadiamo che tutti i risultati fino ad ora esaminati nel caso di una coppia primale-duale simmetrica, valgono in generale per ogni coppia primale-duale. Volendo scrivere le condizioni di complementarità riferite alla generica coppia primale-duale (7.1.5)–(7.1.6) si hanno le seguenti condizioni: se  $(\bar{x}, \bar{y})$  è un punto ammissibile del problema primale (7.1.5) e  $(\bar{u}, \bar{v})$  è un punto ammissibile del problema duale (7.1.6), allora  $(\bar{x}, \bar{y})$  e  $(\bar{u}, \bar{v})$  sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale e del problema duale se e solo se soddisfano le seguenti proprietà:

$$\bar{v}^T(E\bar{x} + F\bar{y} - g) = 0$$

$$\bar{x}^T (c - C^T \bar{u} + E^T \bar{v}) = 0.$$

Ovviamente, sono presenti solamente le condizioni di complementarità relative ai vincoli di disuguaglianza in quanto quelle relative ai vincoli di uguaglianza sono banalmente verificate.

In particolare, in relazione alla coppia primale-duale

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases} \quad \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u = c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

le condizioni di complementarità si riducono alla sola condizione

$$u^T (Ax - b) = 0,$$

mentre per una coppia primale-duale

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \end{cases}$$

le condizioni di complementarità si riducono alla sola condizione

$$x^T (c - A^T u) = 0.$$

Seguono alcuni esempi di applicazione della complementarità.

**Esempio 7.1.11** *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 3 \\ 7x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 9x_4 = -2 \end{cases}.$$

*Il problema duale associato è*

$$\begin{cases} \max 5u_1 + 3u_2 - 2u_3 \\ u_1 + 2u_2 + 7u_3 = 3 \\ u_2 - 4u_3 = 2 \\ -3u_1 - u_2 + 6u_3 = 1 \\ 2u_1 + 9u_3 = 4 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

*Visti i vincoli di uguaglianza presenti nei due problemi, le condizioni di complementarità si riducono a*

$$\begin{aligned} u_1(x_1 - 3x_3 + 2x_4 - 5) &= 0 \\ u_2(2x_1 + x_2 - x_3 - 3) &= 0. \end{aligned}$$

**Esempio 7.1.12** *Dato il problema di programmazione lineare*

$$\begin{cases} \min 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_4 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad (7.1.19)$$

*si consideri il punto  $\bar{x} = (0, 0, 2, 1/3)$  soluzione ammissibile per il problema (7.1.19) e il punto  $\bar{u} = (1, 1/3)$  soluzione ammissibile per il problema duale associato a (7.1.19). Attraverso le condizioni di complementarità si vuole verificare se  $\bar{x}$  è una soluzione ottima del problema del problema (7.1.19). Innanzitutto scriviamo il problema duale del problema dato; esso è*

$$\begin{cases} \max 2u_1 + u_2 \\ u_1 + 2u_2 \leq 2 \\ u_1 \leq 3 \\ u_1 \leq 1 \\ 3u_2 \leq 1. \end{cases}$$

*Poiché il problema (7.1.19) presenta solo vincoli di uguaglianza, le condizioni di complementarità si riducono a  $x^T(c - A^T u) = 0$  che in questo caso sono*

$$\begin{aligned} x_1(2 - u_1 - 2u_2) &= 0 \\ x_2(3 - u_1) &= 0 \\ x_3(1 - u_1) &= 0 \\ x_4(1 - 3u_2) &= 0 \end{aligned}$$

*Sostituendo i valori delle soluzioni ammissibili  $\bar{x}$ ,  $\bar{u}$  rispettivamente per il primale ed il duale, le condizioni di complementarità risultano verificate. Quindi la soluzione  $\bar{x}$  è effettivamente ottima per il primale e  $\bar{u}$  è ottima per il duale.*

**Esempio 7.1.13** *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

*con  $c_1 \in \mathbb{R}$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $c_3 \in \mathbb{R}$ . Utilizzando la teoria della dualità, si vuole stabilire se esistono valori (non tutti nulli) di  $c_1, c_2, c_3$  tali che il punto  $\bar{x} = (0, 0, 1/2)^T$  sia una soluzione ottima del problema.*

*Innanzitutto scriviamo il problema duale associato che è*

$$\begin{cases} \max -2u_1 - 3u_2 \\ -u_1 - u_2 \leq c_1 \\ -2u_1 - 4u_2 \leq c_2 \\ -2u_1 - 2u_2 \leq c_3 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0. \end{cases}$$

e le condizioni di complementarità

$$\begin{aligned} u_1(-2 + x_1 + 2x_2 + 2x_3) &= 0 \\ u_2(-3 + x_1 + 4x_2 + 2x_3) &= 0 \\ x_1(c_1 + u_1 + u_2) &= 0 \\ x_2(c_2 + 2u_1 + 4u_2) &= 0 \\ x_3(c_3 + 2u_1 + 2u_2) &= 0 \end{aligned}$$

Sostituendo il punto  $\bar{x}$  affinché siano soddisfatte tutte le equazioni deve essere

$$\bar{u}_1 = 0, \quad \bar{u}_2 = 0, \quad \frac{1}{2}(c_3 + 2\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2) = 0$$

e quindi  $c_3 = 0$  (dove  $\bar{u}$  è soluzione ottima del problema duale). Quindi le condizioni di complementarità sono soddisfatte per qualunque  $c_1$  e  $c_2$  e  $c_3 = 0$ . Quindi il punto dato  $\bar{x}$  è soluzione ottima del problema per qualsiasi valore di  $c_1$  e  $c_2$  e  $c_3 = 0$ .

## 7.2 INTERPRETAZIONE DELLA DUALITÀ

*[Questo paragrafo non fa parte del programma di esame]*

Nei modelli reali le variabili (primali) possono rappresentare, ad esempio, livelli di produzione e i coefficienti di costo possono essere associati ai profitti ricavati dalla vendita dei prodotti. Quindi la funzione obiettivo di un problema primale indica direttamente come un aumento della produzione può influenzare il profitto. Sempre in relazione, ad esempio, ad un modello per la pianificazione della produzione, i vincoli di un problema (primale) possono rappresentare una limitazione dovuta alla limitata disponibilità delle risorse; ora, un aumento della disponibilità delle risorse può consentire un aumento della produzione e quindi anche del profitto, ma questa relazione tra aumento della disponibilità delle risorse e aumento del profitto non si deduce facilmente dal problema formulato (il problema primale). Uno dei possibili usi della dualità è quello di rendere esplicito l'effetto dei cambiamenti nei vincoli (ad esempio in quelli di disponibilità di risorse) sul valore della funzione obiettivo. Questo perché, come vedremo, le variabili duali possono essere anche interpretate come i cosiddetti *prezzi ombra* in quanto misurano i “costi” impliciti associati ai vincoli.

### 7.2.1 Interpretazione economica della dualità e prezzi ombra

Per introdurre il concetto delle variabili duali come prezzi ombra facciamo riferimento ad un semplice esempio di modello di pianificazione della produzione che brevemente descriviamo.

**Esempio 7.2.1** *Un'industria produce due tipi di prodotti: un tipo de luxe e un tipo standard. Per avere un prodotto finito di ciascuno dei due tipi sono necessari due ingredienti grezzi  $I_1$  e  $I_2$  e la lavorazione su una macchina. La tabella che segue riporta le quantità in Kg di ciascuno degli ingredienti e le ore di lavorazione sulla macchina necessarie per ottenere un prodotto finito di ciascuno dei due tipi.*

	de luxe	standard
$I_1$	3	2
$I_2$	4	1
ore lavoraz.	2	1

*Settimanalmente si hanno a disposizione al più 1200 Kg dell'ingrediente  $I_1$  e al più 1000 Kg dell'ingrediente  $I_2$  mentre la disponibilità massima settimanale di ore lavorative della macchina è pari a 700. Un prodotto de luxe è venduto a 24 Euro e un prodotto standard è venduto a 14 Euro. Si vuole pianificare la produzione settimanale in modo da massimizzare il profitto complessivo assumendo che i prodotti siano frazionabili.*

Si tratta di un problema di allocazione ottima di risorse limitate che può essere formulato come problema di Programmazione Lineare nel seguente modo:

$$\begin{cases} \max 24x_1 + 14x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 1200 \\ 4x_1 + x_2 \leq 1000 \\ 2x_1 + x_2 \leq 700 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

dove le variabili  $x_1$  e  $x_2$  rappresentano le quantità di prodotti ripetutivamente del tipo *de luxe* e del tipo *standard* da fabbricare settimanalmente.

Consideriamo, ora, il problema duale del problema ora formulato; esso è

$$\begin{cases} \min 1200u_1 + 1000u_2 + 700u_3 \\ 3u_1 + 4u_2 + 2u_3 \geq 24 \\ 2u_1 + u_2 + u_3 \geq 14 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0. \end{cases}$$

La soluzione ottima del primale è

$$x_1^* = 160, \quad x_2^* = 360$$

e il valore ottimo della funzione obiettivo primale è pari a 8880.

La soluzione ottima del duale è

$$u_1^* = 6.4, \quad u_2^* = 1.2, \quad u_3^* = 0$$

e il valore ottimo della funzione obiettivo duale è pari a 8880. Quindi il Teorema della Dualità Forte è verificato.

Scriviamo, ora, le condizioni di complementarità:

$$\begin{aligned} x_1^*(3u_1^* + 4u_2^* + 2u_3^* - 24) &= 0 \\ x_2^*(2u_1^* + u_2^* + u_3^* - 14) &= 0 \\ u_1^*(1200 - 3x_1^* - 2x_2^*) &= 0 \\ u_2^*(1000 - 4x_1^* - x_2^*) &= 0 \\ u_3^*(700 - 2x_1^* - x_2^*) &= 0 \end{aligned}$$

Si verifica immediatamente che tali condizioni sono soddisfatte. Si osservi che tutte le equazioni tranne l'ultima sono verificate in quanto si annulla il secondo dei due fattori moltiplicativi. Questo significa, in particolare, che il primo e il secondo vincolo del problema primale sono attivi nella soluzione ottima, cioè verificati all'uguaglianza. L'ultima equazione invece è verificata per il fatto che è nulla all'ottimo la variabile duale  $u_3^*$  mentre il vincolo corrispondente primale (cioè il terzo vincolo del problema primale) non è verificato all'uguaglianza. Infatti in corrispondenza della soluzione ottima il valore ottenuto è  $2x_1^* + x_2^* = 680$ .

Poiché la disponibilità di ore lavorative è pari a 700 ore, si hanno ancora 20 ore disponibili (surplus). Quindi l'industria, per aumentare il profitto, potrebbe acquistare altre quantità di ingredienti grezzi e quindi aumentare la disponibilità settimanale di questi ingredienti e utilizzare le ore di lavorazione ancora rimaste disponibili. Poiché i valori all'ottimo della funzione obiettivo primale e della funzione obiettivo duale coincidono e poiché la funzione obiettivo duale è

$$1200u_1 + 1000u_2 + 700u_3,$$

essendo  $u_1^* = 6.4$ ,  $u_2^* = 1.2$ ,  $u_3^* = 0$ , l'aumento di 1 Kg della disponibilità di ingrediente  $\mathbf{I}_1$  (da 1200 a 1201 Kg) porta ad un incremento di 6.4 Euro nel profitto complessivo. Analogamente per l'ingrediente  $\mathbf{I}_2$ : un incremento di 1 Kg (da 1000 a 1001 Kg) porta ad un incremento del profitto complessivo di 1.2 Euro. Questo è il motivo per cui le variabili duali sono anche chiamate *prezzi ombra* e determinano il *valore marginale* delle risorse. Ovviamente il fatto che  $u_3^* = 0$  significa che l'aumento della disponibilità di ore lavorative non porta a nessun incremento del profitto, ma questo è ovvio in quanto ore lavorative inutilizzate sono già disponibili.

Nell'ipotesi che, ad esempio, si possa incrementare la disponibilità di una sola delle risorse, naturalmente esaminando i prezzi ombra, si deduce che conviene aumentare la disponibilità dell'ingrediente  $\mathbf{I}_1$  che porta ad un maggiore incremento del profitto complessivo.

Si osservi che il fatto che ad un incremento pari a  $\delta$  nel termine noto del primo vincolo corrisponda un incremento pari a  $6.4\delta$  nel valore ottimo della funzione obiettivo, è valido fin tanto che la variabile duale all'ottimo  $u_1^*$  associata al primo vincolo rimane pari al valore 6.4. Infatti, ovviamente la variazione del termine noto del vincolo corrispondente alla disponibilità dell'ingrediente  $\mathbf{I}_1$  porta anche ad un cambiamento nella formulazione del problema duale: infatti un cambiamento nel termine noto di un vincolo primale corrisponde ad un cambiamento in un coefficiente della funzione obiettivo del problema duale. Pertanto c'è la possibilità che se la variazione è ampia, cambi il punto di ottimo del problema duale e quindi, in particolare, cambi il prezzo ombra  $u_1^*$  associato al primo vincolo. In questo caso, naturalmente, la variazione del valore della funzione obiettivo all'ottimo non può essere più proporzionale al valore 6.4.  $\square$

Quindi come visto nell'esempio, in generale, le variabili duali (i prezzi ombra) rappresentano l'effetto di cambiamenti nel termine noto dei vincoli. Si consideri, infatti un generico problema di Programmazione Lineare (in forma standard) (P), il suo duale (D) ed inoltre si consideri il problema  $(P_\Delta)$  ottenuto modificando il termine noto da  $b$  a  $b + \Delta$  (con  $\Delta \in \mathbb{R}^m$ ) e il corrispondente problema duale  $(D_\Delta)$ :

$$(P) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (D) \quad \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \end{cases}$$

$$(P_\Delta) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b + \Delta \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (D_\Delta) \quad \begin{cases} \max(b + \Delta)^T u \\ A^T u \leq c \end{cases}$$

Siano  $x^*$  e  $u^*$  rispettivamente la soluzione ottima del problema (P) e del problema (D). Siano inoltre  $x^*(\Delta)$  e  $u^*(\Delta)$  rispettivamente la soluzione del problema  $(P_\Delta)$  e del problema  $(D_\Delta)$

Dalle formulazioni di questi problemi si possono facilmente dedurre due osservazioni:

- la variazione del termine noto  $b$  nel problema primale si riflette in un cambiamento dei coefficienti della funzione obiettivo del problema duale;
- la regione ammissibile del problema (D) e del problema  $(D_\Delta)$  sono uguali; da questo segue che se  $u^* \in \mathbb{R}^m$  è soluzione ottima del problema (D) allora  $u^*$  è ammissibile per il problema  $(D_\Delta)$ , ma non necessariamente è ottima per  $(D_\Delta)$ .

Inoltre per il Teorema della dualità forte applicato alla coppia primale-duale (P)–(D) deve essere

$$c^T x^* = b^T u^*, \quad (7.2.1)$$

mentre, sempre per il Teorema della dualità forte ma applicato alla coppia primale-duale  $(P_\Delta)$ – $(D_\Delta)$  deve essere

$$c^T x^*(\Delta) = (b + \Delta)^T u^*(\Delta). \quad (7.2.2)$$

Se la soluzione ottima  $x^*$  soddisfa un'opportuna ipotesi (cioè che in  $x^*$  non ci siano più di  $n$  vincoli attivi) e se il vettore  $\Delta$  ha componenti “sufficientemente” piccole allora si può dimostrare che:

$$u^*(\Delta) = u^*. \quad (7.2.3)$$

Utilizzando la (7.2.1), la (7.2.2) e la (7.2.3) si ha:

$$c^T x^*(\Delta) = b^T u^* + \Delta^T u^* = c^T x^* + \Delta^T u^*, \quad (7.2.4)$$

che può essere riscritta nella seguente forma:

$$c^T x^*(\Delta) - c^T x^* = \Delta_1 u_1^* + \Delta_2 u_2^* + \dots + \Delta_m u_m^*, \quad (7.2.5)$$

dove  $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_m)^T$ .

Dalla precedente relazione segue che una possibile interpretazione della variabile duale  $u_i^*$  è quella di essere un prezzo associato ad un incremento unitario del termine noto  $b_i$ . Per questa ragione le variabili duali  $u_i^*$ ,  $i = 1, \dots, m$ , vengono denominate *prezzi ombra*. Sebbene la (7.2.3) (e di conseguenza la (7.2.5)) valga solamente sotto opportune ipotesi, in molte situazioni pratiche, le variabili duali  $u_i^*$ ,  $i = 1, \dots, m$ , forniscono delle utili indicazioni su quale componente  $b_i$  variare per migliorare il valore ottimo della funzione obiettivo.

Si consideri, ora (come nell'Esempio 7.2.1) la variazione del termine noto di un solo vincolo che si ottiene prendendo  $\Delta = \delta e_i$  (dove  $e_i \in \mathbb{R}^m$  è il vettore con l' $i$ -esima componente uguale a 1 e le altre componenti nulle). In questo caso, naturalmente ad una variazione del termine noto dell' $i$ -esimo vincolo corrisponde una variazione del valore della funzione obiettivo pari a  $\delta u_i^*$ . Nell'esempio precedente era stato infatti osservato come una variazione di  $\delta$  effettuata nel termine noto del primo vincolo porta ad una variazione della funzione obiettivo pari a  $u_1^* \delta = 6.4\delta$ . Si deve tuttavia ribadire un fatto molto importante: l'interpretazione delle variabili duali come prezzi ombra e quindi come strumento per valutare la variazione del valore della funzione obiettivo al variare del termine noto di un vincolo a partire da una soluzione ottima è vera *solamente per piccole variazioni* del termine noto; esiste cioè un intervallo entro il quale  $\delta$  deve rimanere.

Esula dallo scopo di queste note la motivazione teorica dettagliata della validità dell'interpretazione data delle variabili duali, a partire da una soluzione ottima, come prezzi ombra rappresentanti i *valori marginali* dei termini noti dei vincoli solo per piccole perturbazioni di questi termini noti ed anche la determinazione dell'intervallo  $[\delta_l, \delta_u]$  in cui può variare  $\delta$  rimanendo valida tale l'interpretazione. Si riporta tuttavia di seguito un esempio geometrico di questa interpretazione delle variabili duali che dovrebbe chiarire, almeno in un caso particolare, quanto illustrato in precedenza.

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \max 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + 4x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (7.2.6)$$

Si verifica facilmente che i prezzi ombra associati ai vincoli sono rispettivamente  $u_1^* = 1$ ,  $u_2^* = 1$  e  $u_3^* = 0$ . Questi possono naturalmente essere ricavati scrivendo il problema duale del problema dato

$$\begin{cases} \min 4u_1 + 5u_2 - 2u_3 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 3 \\ u_1 + u_2 - 4u_3 \geq 2 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

e determinandone la soluzione ottima. Geometricamente si può determinare facilmente la soluzione ottima del problema assegnato (prima) (7.2.6) che risulta essere nel punto  $P(1, 3)$  a cui corrisponde un valore ottimo della funzione obiettivo pari a 9 (Figura 7.2.1).

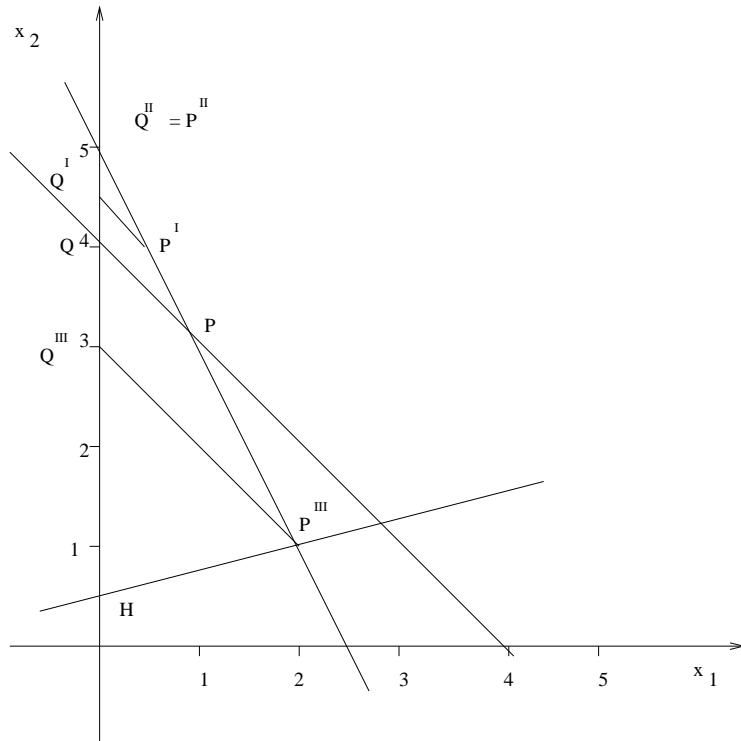


Figura 7.2.1 Rappresentazione geometrica del problema (7.2.6)

Ora, consideriamo il primo vincolo  $x_1 + x_2 \leq 4$  e facciamo variare di un valore  $\delta = 0.5$  il termine noto che passa da 4 a 4.5; rappresentando geometricamente il nuovo vincolo  $x_1 + x_2 \leq 4.5$  si determina la nuova regione ammissibile del problema in cui il segmento  $\overline{PQ}$  è mutato nel segmento  $\overline{P'Q'}$ . Il punto di ottimo del nuovo problema è  $P'(0.5, 4)$  e corrispondentemente risulta un incremento del valore della funzione obiettivo proporzionale al valore del prezzo ombra  $u_1^* = 1$  associato al primo vincolo cioè dato da  $u_1^*\delta$ , cioè pari a 0.5: infatti il valore ottimo passa da 9 a 9.5. È facile verificare che il cambiamento effettuato nel termine noto non ha fatto variare il punto di ottimo del problema duale, cioè i costi ombra sono rimasti invariati.

Se si continua a rilassare il vincolo considerato facendolo diventare  $x_1 + x_2 \leq 5$ , considerando la nuova regione ammissibile così ottenuta, si osserva che il segmento  $\overline{PQ}$  degenera in un punto  $Q'' = P''(0, 5)$  con conseguente incremento proporzionale del valore della funzione obiettivo nel nuovo punto di ottimo dove è pari a 10. (Nemmeno con questa variazione si è avuto un cambiamento nei prezzi ombra.)

Come si deduce facilmente dalla rappresentazione geometrica, non ci sarà nessun effetto nell'incrementare ulteriormente il termine noto del primo vincolo, in quanto il punto soluzione continuerà a rimanere  $Q'' = P''$ . Quindi la limitazione superiore alla variazione del  $\delta$  in questo caso risulta pari a  $\delta_u = 1$ .

Se invece si diminuisce il termine noto del vincolo  $x_1 + x_2 \leq 4$ , la regione ammisible progressivamente muta fino a che il segmento  $\overline{PQ}$  coincide con  $\overline{P'''Q'''}$  e questo accade quando il valore del termine noto del vincolo è pari a 3. In corrispondenza di questo valore il punto di ottimo è  $P'''(2, 1)$  a cui corrisponde un valore della funzione obiettivo pari a 8. Anche in questo caso la variazione ha lasciato invariato i prezzi ombra.

Fino al raggiungimento del valore 3 nel termine noto del vincolo considerato, ogni decrescita di questo termine noto porta ad un decremento della funzione obiettivo proporzionale ad prezzo ombra associato ( $u_1^* = 1$ ). Il valore 3 assunto dal termine noto del vincolo sembra essere un “valore di soglia” al di sotto del quale la funzione obiettivo decrescerà con una “rapidità” completamente diversa; infatti dalla rappresentazione geometrica si deduce facilmente che la situazione cambia drasticamente al di sotto di questo valore e la rapidità di decrescita non è prevedibile a partire dalla conoscenza della soluzione ottima  $P$ . Si verifica infatti che, ad esempio, variando il termine noto considerato dal valore 3 al valore 2.5, il valore ottimo della funzione obiettivo passa dal valore 8 al valore 6.6 e i prezzi ombra sono mutati in  $u^* = (2.8, 0, 0.2)$ .

Geometricamente si può verificare ciò osservando come al variare del termine noto del primo vincolo dal valore 3 al valore 5, i corrispondenti punti di ottimo appartengono al segmento  $\overline{P''P'''}$  mentre per valori inferiori al valore 3 i punti corrispondenti di ottimo appartengono al segmento  $\overline{HP'''}$ . Quindi il valore della limitazione inferiore dell'intervallo di variabilità di  $\delta$  può essere considerata  $\delta_l = -1$ . Quindi l'intervallo ammesso perché le considerazioni fatte sui prezzi ombra valgano, in questo caso è l'intervallo  $[\delta_l, \delta_u] = [-1, 1]$ .

Queste considerazioni qui dedotte solo in modo geometrico fanno parte della cosiddetta *analisi post-ottimale*. Un altro scopo di questo tipo di analisi è quello di indagare la “sensibilità” del modello al variare dei termini noti dei vincoli; questo rientra nella cosiddetta *analisi della sensibilità* che affronta lo studio di come varia la soluzione ottima di un problema al variare oltre che dei termini noti dei vincoli, anche al variare dei coefficienti di costo della funzione obiettivo, oppure aggiungendo nuove variabili o nuovi vincoli. Ovviamente una trattazione rigorosa di queste problematiche esula dallo scopo di queste note e perciò si rimanda ai testi di approfondimento specifici.

### 7.2.2 Il duale del problema di allocazione ottima di risorse

[Questo paragrafo non fa parte del programma di esame]

Si consideri nuovamente il semplice problema di allocazione ottima dell'Esempio 3.4.1 che è rappresentato dal seguente problema di Programazione Lineare:

$$\begin{cases} \max (7x_1 + 10x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 750 \\ x_1 + 2x_2 \leq 1000 \\ x_2 \leq 400 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (7.2.7)$$

Ricordiamo che le variabili  $x_1$  e  $x_2$  sono associate rispettivamente ai quantitativi di colorante **C1** e **C2** da produrre e che la produzione avviene utilizzando tre preparati base **P1**, **P2** e **P3** dei quali si ha una disponibilità massima rispettivamente pari a 750, 1000 e 400 etogrammi. Supponiamo, ora di voler sottrarre preparati base dalla produzione dei coloranti per venderli direttamente. Indichiamo con  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  i prezzi associati rispettivamente alla vendita diretta di un etogramma di preparato base **P1**, **P2** e **P3**. Supponendo di destinare tutti i preparati alla vendita diretta, il profitto che si otterrebbe sarebbe

$$750u_1 + 1000u_2 + 400u_3. \quad (7.2.8)$$

Naturalmente si vorrà fare in modo che questa operazione di sottrazione dei preparati base dalla produzione dei coloranti e vendita diretta risulti economicamente conveniente e quindi mentre si vuole minimizzare l'espressione (7.2.8) affinché i prezzi di vendita risultino competitivi sul mercato, si imporrà che il profitto ottenuto vendendo direttamente i quantitativi di preparato base necessario per ottenere un litro di colorante sia maggiore o uguale del profitto associato alla vendita di un litro di colorante stesso; quindi, utilizzando i dati del problema riportati nella tabella dell'Esempio 3.4.1, si deve imporre che risulti

$$u_1 + u_2 \geq 7$$

per quanto riguarda il colorante **C1** e

$$u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 10$$

per quanto riguarda il colorante **C2** e naturalmente deve essere  $u_1 \geq 0$ ,  $u_2 \geq 0$  e  $u_3 \geq 0$ . Quindi il modello lineare che rappresenta l'operazione sopra descritta è il seguente:

$$\begin{cases} \min (750u_1 + 1000u_2 + 400u_3) \\ u_1 + u_2 \geq 7 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 10 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0. \end{cases}$$

Esaminando questo problema si vede immediatamente che esso rappresenta il *problema duale* del problema dato (7.2.7).

In generale, se si considera un generico problema di allocazione ottima di  $m$  risorse  $\mathbf{R}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  con la possibilità di fabbricare  $n$  prodotti  $\mathbf{P}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , come abbiamo già esaminato nel capitolo precedente si può formulare questo problema come

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (7.2.9)$$

dove ricordiamo  $x \in \mathbb{R}^n$  è il vettore avente per componenti i livelli di produzione di ciascuno dei prodotti,  $c \in \mathbb{R}^n$  il vettore dei profitti netti e  $b \in \mathbb{R}^m$  il vettore delle disponibilità massima di ciascuna delle risorse.

Supponiamo ora di voler sottrarre risorse alla produzione per venderle direttamente e siano  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  i prezzi unitari associati alla vendita dell' $i$ -esima risorsa. Supponendo che per ciascuna risorsa si voglia destinare alla vendita una quantità pari alla disponibilità massima di quella risorsa, si ottiene un profitto pari a

$$b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_m u_m.$$

Per rendere competitivi sul mercato i prezzi unitari  $u_i$  da assegnare alle risorse vendute direttamente, si vogliono scegliere i valori più bassi possibile per le  $u_i$ , ma naturalmente, affinché questa operazione di vendita diretta in luogo della fabbricazione dei prodotti risulti conveniente si deve imporre che il profitto ottenuto vendendo direttamente le risorse necessarie per fabbricare un prodotto sia maggiore o uguale al profitto che si ricaverebbe dalla vendita del prodotto finito. Quindi per ogni prodotto, si deve imporre che valga

$$\begin{array}{llllll} a_{11}u_1 + & \dots & + a_{m1}u_m & \geq c_1 \\ a_{12}u_1 + & \dots & + a_{m2}u_m & \geq c_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}u_1 + & \dots & + a_{mn}u_m & \geq c_n \end{array}$$

con  $u_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  e dove le quantità  $a_{ij}$  rappresentano la quantità di risorsa  $\mathbf{R}_i$  necessaria per fabbricare una unità di prodotto  $\mathbf{P}_j$ .

Quindi il problema da risolvere può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} \min b^T u \\ A^T u \geq c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

che è il problema duale del problema (7.2.9).

### 7.2.3 Il duale del problema di miscelazione

[Questo paragrafo non fa parte del programma di esame]

Si consideri il problema di miscelazione dell'Esempio 3.4.12 che è rappresentato dal seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \min(400x_1 + 600x_2) \\ 140x_1 \geq 70 \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ricordiamo che le variabili  $x_1$  e  $x_2$  rappresentano le quantità di polpa di frutta e di dolcificante da utilizzare nella produzione del succo di frutta che deve avere come requisito un contenuto minimo di 70 mg di vitamina C, 30 mg di sali minerali e 75 grammi di zucchero. Supponiamo ora che un'industria farmaceutica venga a comprare compresse di nutrienti puri, cioè compresse di vitamina C, di sali minerali e di zucchero e che vuole immettere queste compresse su un ipotetico mercato come offerta sostitutiva al succo di frutta per l'acquisizione di vitamina C, di sali minerali e di zucchero. Naturalmente questa industria farmaceutica vuole massimizzare il profitto ricavato dalla vendita delle compresse, ma al tempo stesso deve dare un prezzo alle compresse tale da essere competitiva. Siano allora  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  i prezzi di vendita rispettivamente di 1 mg di vitamina C, di 1 mg di sali minerali e di 1 grammo di zucchero; supponendo che la vendita di questi nutrienti puri sia pari ai fabbisogni minimi (cioè a 70 mg di vitamina C, a 30 mg di sali minerali e a 75 grammi di zucchero), l'espressione del profitto dell'industria farmaceutica che dovrà essere massimizzata è

$$70u_1 + 30u_2 + 75u_3.$$

Affinché i prezzi di vendita dei componenti puri in compresse fissati dall'industria siano concorrenziali, si deve imporre che il costo unitario dei nutrienti puri sia minore o uguale al prezzo che si dovrebbe pagare per avere la stessa quantità di componente attraverso gli ingredienti del succo di frutta, cioè dalla polpa di frutta e dal dolcificante. Quindi si devono imporre i seguenti vincoli

$$\begin{aligned} 140u_1 + 20u_2 + 25u_3 &\leq 400 \\ 10u_2 + 50u_3 &\leq 600. \end{aligned}$$

Inoltre dovrà essere  $u_1 \geq 0$ ,  $u_2 \geq 0$ ,  $u_3 \geq 0$ .

Quindi il problema complessivo formulato dall'industria farmaceutica è

$$\begin{cases} \max(70u_1 + 30u_2 + 75u_3) \\ 140u_1 + 20u_2 + 25u_3 \leq 400 \\ 10u_2 + 50u_3 \leq 600 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \end{cases}$$

che è il problema duale del problema di miscelazione considerato.

In generale, consideriamo un generico problema di miscelazione in cui si hanno  $n$  sostanze  $\mathbf{S}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  ciascuna delle quali contiene una quantità  $a_{ij}$  di componente utile  $\mathbf{C}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Come abbiamo già esaminato nel capitolo precedente un problema di miscelazione di questo tipo si può formulare come

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (7.2.10)$$

dove ricordiamo che  $x \in \mathbb{R}^n$  è il vettore avente per componenti le quantità di ciascuna sostanza da introdurre nella miscela,  $c \in \mathbb{R}^n$  il vettore dei costi unitari delle sostanze,  $b \in \mathbb{R}^m$  il vettore dei requisiti minimi di componenti utili da introdurre nella miscela, e  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  la matrice i cui elementi sono le  $a_{ij}$ .

Supponiamo ora che un'industria sia in grado di fornire componenti utili allo stato puro e che voglia immettere sul mercato questi componenti utili e siano  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  i prezzi unitari da assegnare a ciascuno di essi. Supponendo che la richiesta del mercato sia pari ai fabbisogni minimi della miscela, cioè per ciascun componente pari a  $b_i$ , il profitto totale dell'industria che vende i componenti utili allo stato puro è

$$b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_m u_m.$$

Inoltre, affinché i prezzi  $u_i$  assegnati dall'industria ai componenti puri siano correnziali, si deve imporre che il costo dei componenti puri sia minore o uguale al prezzo che dovrebbe pagare per avere la stessa quantità di componente ottenuto attraverso le sostanze e quindi deve valere

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \leq c_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Inoltre si deve imporre  $u_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Quindi il problema formulato si può scrivere nella forma

$$\begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

che è immediato verificare essere il problema duale del problema di miscelazione assegnato (7.2.10).

### 7.2.4 Il duale del problema dei trasporti

[Questo paragrafo non fa parte del programma di esame]

Si consideri il problema di trasporto rappresentato dal seguente problema di Programmazione Lineare (Esercizio 3.3.1 degli Esercizi Svolti):

$$\left\{ \begin{array}{l} \min(250x_1 + 100x_2 + 85x_3 + 120y_1 + 80y_2 + 150y_3) \\ \\ x_1 + x_2 + x_3 = 50 \\ x_1 + y_1 + y_2 + y_3 = 55 \\ x_1 + x_2 + y_1 = 30 \\ x_3 + y_2 = 40 \\ y_3 = 35 \\ \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

dove  $x_1, x_2, x_3$  rappresentano rispettivamente la quantità di acqua da trasportare dal primo stabilimento ai tre impianti e  $y_1, y_2, y_3$  rappresentano rispettivamente la quantità di acqua da trasportare dal secondo stabilimento ai tre impianti. Ricordiamo inoltre che la disponibilità giornaliera di acqua presso i due stabilimenti è rispettivamente di 50 e 55 ettolitri di acqua, mentre le richieste giornaliere di acqua presso i tre impianti sono rispettivamente di 30, 40 e 35 ettolitri.

Supponiamo ora che una compagnia specializzata in trasporto di acqua (esterna all'industria) voglia proporsi all'industria di acque minerali per effettuare il trasporto dell'acqua dagli stabilimenti agli impianti. Naturalmente la compagnia di trasporti, per convincere l'industria di acque minerali ad avvalersi del servizio di trasporto esterno, dovrà proporre dei prezzi di trasporto vantaggiosi. A tale scopo la compagnia dei trasporti propone all'industria di prelevare un ettolitro di acqua da ciascuno dei due stabilimenti per un prezzo unitario (in migliaia di lire) rispettivamente pari a  $u_1$  e  $u_2$  e di consegnare un ettolitro di acqua a ciascuno dei tre impianti per un prezzo unitario (in migliaia di lire) rispettivamente pari a  $v_1, v_2$  e  $v_3$ . Quindi la compagnia dei trasporti vorrà massimizzare la funzione che fornisce il suo profitto complessivo che è data da

$$50u_1 + 55u_2 + 30v_1 + 40v_2 + 35v_3.$$

Tuttavia affinché l'offerta della compagnia dei trasporti risulti vantaggiosa per l'industria delle acque minerali i prezzi del trasporto proposti dovranno risultare non superiori a quelli che l'industria avrebbe effettuando in proprio i trasporti stessi. Quindi dovrà risultare

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &\leq 250 \\ u_1 + v_2 &\leq 100 \\ u_1 + v_3 &\leq 85 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2 + v_1 &\leq 120 \\
 u_2 + v_2 &\leq 80 \\
 u_2 + v_3 &\leq 150.
 \end{aligned}$$

Quindi, la compagnia dei trasporti dovrà risolvere il problema

$$\left\{
 \begin{array}{llllll}
 \max & (50u_1 + 55u_2 + 30v_1 + 40v_2 + 35v_3) \\
 u_1 & + & v_1 & & & \leq 250 \\
 u_1 & + & & v_2 & & \leq 100 \\
 u_1 & + & & & v_3 & \leq 85 \\
 & u_2 & + & v_1 & & \leq 120 \\
 & u_2 & + & v_2 & & \leq 80 \\
 & u_2 & + & & v_3 & \leq 150
 \end{array}
 \right.$$

che si verifica immediatamente essere il problema duale del problema dei trasporti assegnato.

In generale, consideriamo ora un generico problema dei trasporti già esaminato nel capitolo precedente. Supponiamo che un'azienda voglia provvedere in proprio ad effettuare il trasporto di materiali e che quindi cerchi di risolvere il problema dei trasporti (3.4.4) cioè

$$\left\{
 \begin{array}{ll}
 \min & \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \right) \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n \\
 & x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m
 \end{array}
 \right. \tag{7.2.11}$$

dove, ricordiamo, che le  $c_{ij}$  rappresentano il costo del trasporto dall'origine  $i$  alla destinazione  $j$ , le  $a_i$  le disponibilità all' $i$ -esima origine e le  $b_j$  le richieste alla  $j$ -esima destinazione.

Supponiamo, ora che una compagnia che esegue trasporti voglia proporsi a questa azienda, come alternativa vantaggiosa all'effettuazione dei trasporti in proprio; a tale scopo questa compagnia propone all'azienda di prelevare un'unità di prodotto dall'origine  $i$  per un prezzo unitario  $u_i$  e di consegnare una unità di prodotto alla destinazione  $j$  per un prezzo unitario  $v_j$ . Per assicurare che i suoi prezzi siano competitivi rispetto a quelli che l'azienda avrebbe effettuando i trasporti in proprio, la compagnia di trasporti deve fare sì che risulti

$$u_i + v_j \leq c_{ij}$$

per ogni  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ . D'altra parte la compagnia di trasporti vuole scegliere i prezzi da proporre  $u_1, \dots, u_m$  e  $v_1, \dots, v_n$  in modo da massimizzare il suo profitto complessivo. Poiché le quantità  $a_i$  e  $b_j$  di prodotto rispettivamente disponibili all'origine  $i$  e richieste alla destinazione  $j$  sono note alla compagnia di trasporti, questa cercherà di massimizzare la funzione

$$\max \left( \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \right).$$

Quindi il problema che la compagnia di trasporti formula per determinare quali prezzi  $u_i$  e  $v_j$  proporre all'azienda è il seguente

$$\begin{cases} \max \left( \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \right) \\ u_i + v_j \leq c_{ij} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (7.2.12)$$

che è il problema duale del problema dei trasporti (7.2.11).



# 8

## *Modelli di Programmazione Lineare Intera*

Come è stato già osservato in precedenza, quando tutte le variabili di un problema di Programmazione Lineare sono vincolate ad assumere valori interi, si parla di Programmazione Lineare Intera. Moltissimi problemi reali possono essere rappresentati da modelli di Programmazione Lineare Intera; tipicamente si tratta di problemi in cui le variabili di decisione rappresentano quantità indivisibili (come il numero di automobili, di persone addette a certe mansioni, etc.) oppure sono problemi caratterizzati dalla necessità di scegliere tra un numero finito di alternative diverse. In quest'ultimo caso, in particolare, si avranno problemi di Programmazione Lineare 0–1, cioè problemi in cui le variabili sono binarie e assumono valore 0 oppure 1.

### **8.1 VARIABILI INTERE PER RAPPRESENTARE QUANTITÀ INDIVISIBILI**

Un numero molto elevato di problemi reali è caratterizzato dalla indivisibilità del bene da produrre o della risorsa da utilizzare. Di qui la necessità di rappresentare tali problemi attraverso modelli di Programmazione Lineare con variabili intere. Questo tipo di problemi riguardano molte applicazioni reali: dai problemi in ambito industriale come la distribuzione dei beni e il sequenziamento delle attività produttive, ai problemi economici come la gestione ottima di un portafoglio titoli; dai problemi di progettazione ottima ai problemi inerenti la biologia e la fisica delle alte energie.

Esempi di modelli di Programmazione Lineare Intera caratterizzati da variabili di decisione associate a quantità indivisibili sono già stati presi in esame all'interno della trattazione dei modelli di Programmazione Lineare. Una situazione tipica è

data dall’Esempio 3.4.2 in cui il bene da produrre è rappresentato da autovetture che sono ovviamente indivisibili; quindi la formulazione di Programmazione Lineare già fornita per questo esempio in realtà, per essere aderente alla situazione reale, deve essere integrata con la presenza del vincolo di interezza sulle variabili che rappresentano i livelli di produzioni delle autovetture. Analogamente l’introduzione del vincolo di interezza sulle variabili è indispensabile quando viene meno una delle ipotesi fondamentali della Programmazione Lineare cioè la continuità delle variabili; in questo caso i modelli di Programmazione Lineare Intera sono uno strumento essenziale per rappresentare situazioni del mondo reale di questo tipo.

## 8.2 VARIABILI BINARIE PER RAPPRESENTARE SCELTE ALTERNATIVE

Si supponga di dover modellare il fatto che un certo evento possa verificarsi oppure no. La natura binaria del problema suggerisce l’idea di modellare questa dicotomia per mezzo di un variabile binaria  $\delta \in \{0, 1\}$ ; si porrà  $\delta = 1$  se l’evento si verifica e  $\delta = 0$  altrimenti.

### 8.2.1 Problemi di assegnamento

Un generico problema di assegnamento consiste nel determinare il modo ottimale di assegnare lavori a persone o, più in generale, di assegnare *mezzi* (persone, macchine, etc. ) ad *attività*.

Supponiamo che  $n$  persone  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ , debbano svolgere  $n$  lavori  $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_n$ ; ciascun lavoro deve essere svolto esattamente da una persona e ciascuna persona deve svolgere esattamente un lavoro. Naturalmente le persone hanno diversi livelli di esperienza, competenza ed abilità e quindi si può introdurre un costo dell’assegnamento della persona  $i$  al lavoro  $j$ ; indichiamo tale costo con  $c_{ij}$  e supponiamo che sia noto. Questo costo può, ad esempio, essere interpretato come tempo medio impiegato dalla persona  $i$  ad eseguire il lavoro  $j$ .

Il problema consiste, quindi, nell’assegnare i lavori alle persone minimizzando il costo totale di realizzazione di tutti i lavori.

Questo tipo di problemi sorge in molte situazioni pratiche: esempi tipici sono i problemi di assegnamento del personale all’interno di una azienda e i problemi di assegnare determinati mezzi di trasporto ad alcune particolari linee. Un esempio di problema di assegnamento è stato già considerato nell’Introduzione (pagina 6) quando si è brevemente analizzato il caso dell’assegnamento di 70 dipendenti a 70 mansioni diverse.

Esaminiamo, ora, un esempio.

*Esempi*

**Esempio 8.2.1** Una compagnia finanziaria necessita di ricoprire tre lavori **LAV1**, **LAV2**, **LAV3**, che richiedono differenti abilità ed esperienza. Sono disponibili tre candidati **C1**, **C2**, **C3**, che possono essere assunti con il medesimo salario. A causa delle loro differenti capacità, il costo di assegnazione di ciascun candidato che la compagnia deve sostenere dipende dal tipo di lavoro al quale è assegnato. La stima di tale costo riferito a ciascun candidato se fosse assegnato a ciascuno dei tre lavori è riportato nella tabella seguente

	<b>LAV1</b>	<b>LAV2</b>	<b>LAV3</b>
<b>C1</b>	5	4	7
<b>C2</b>	6	7	3
<b>C3</b>	8	11	2

Si desidera assegnare ogni candidato esattamente ad un lavoro in modo da minimizzare il costo complessivo che la compagnia deve sostenere.

**Formulazione.**

L'esempio in esame è di piccole dimensioni: infatti ci sono solamente  $3! = 6$  possibili assegnazioni.

– *Variabili.* Per ogni lavoro e per ogni persona, introduciamo le variabili binarie

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il candidato } i \text{ è assegnato al lavoro } j \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare sarà

$$5x_{11} + 4x_{12} + 7x_{13} + 6x_{21} + 7x_{22} + 3x_{23} + 8x_{31} + 11x_{32} + 2x_{33}.$$

– *Vincoli.* Come già osservato nel caso generale, si devono considerare i seguenti vincoli

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, 3.$$

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, 3.$$

La formulazione completa si può scrivere

$$\left\{ \begin{array}{l} \min(5x_{11} + 4x_{12} + 7x_{13} + 6x_{21} + 7x_{22} + 3x_{23} + \\ \quad + 8x_{31} + 11x_{32} + 2x_{33}) \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, \dots, 3. \end{array} \right.$$

#### *Formulazione generale di un problema di assegnamento*

Esaminiamo, ora, una formulazione in termini di programmazione lineare per un generico problema di assegnamento. Supponiamo che  $n$  persone  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ , debbano svolgere  $n$  lavori  $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_n$  e che ciascun lavoro deve essere svolto esattamente da una persona e ciascuna persona deve svolgere esattamente un lavoro. Sia  $c_{ij}$  il costo dell'assegnamento della persona  $i$  al lavoro  $j$ ; si devono assegnare i lavori alle persone minimizzando il costo totale di realizzazione di tutti i lavori.

#### **Formulazione.**

– *Variabili.* Per ogni lavoro  $i$  e per ogni persona  $j$ ,  $(i, j = 1, \dots, n)$  introduciamo le seguenti variabili binarie

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la persona } i \text{ è assegnata al lavoro } j \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si tratta di  $n^2$  variabili:

	$\mathbf{L}_1$	$\dots$	$\mathbf{L}_j$	$\dots$	$\mathbf{L}_n$
$\mathbf{P}_1$	$x_{11}$	$\dots$	$x_{1j}$	$\dots$	$x_{1n}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{P}_i$	$x_{i1}$	$\dots$	$x_{ij}$	$\dots$	$x_{in}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{P}_n$	$x_{n1}$	$\dots$	$x_{nj}$	$\dots$	$x_{nn}$

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare sarà data dal costo totale cioè da

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

Naturalmente, se le  $c_{ij}$  anziché essere dei costi fossero i valori utili ricavati dall'assegnamento della persona  $i$  al lavoro  $j$ , allora la funzione obiettivo andrebbe massimizzata.

– *Vincoli.* (Vincoli di assegnamento.) Poiché esattamente una persona deve essere assegnata al lavoro  $j$ , allora si avranno i seguenti  $n$  vincoli

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n.$$

Inoltre, poiché ciascuna persona deve essere assegnata ad una sola attività, si avranno altri  $n$  vincoli

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n.$$

La formulazione completa sarà, quindi, data da

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

**Osservazione 8.2.2** Osservando la formulazione ottenuta si può facilmente dedurre che la struttura di un problema di assegnamento è del tutto simile a quella del problema dei trasporti (cfr. Paragrafo 3.4.3) in cui si ha lo stesso numero di origini e di destinazioni. La differenza sostanziale sta nel fatto che in un problema di assegnamento le variabili sono binarie,  $x_{ij} \in \{0, 1\}$  mentre in un problema dei trasporti le variabili sono reali non negative  $x_{ij} \geq 0$ . D'altra parte, per il Teorema 3.4.2, se in un problema dei trasporti i termini noti dei vincoli sono interi, se esiste soluzione ottima allora esiste soluzione ottima intera del problema dei trasporti. Quindi, poiché in un problema di assegnamento tali termini noti sono pari ad 1, i vincoli  $x_{ij} \in \{0, 1\}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  possono essere riscritti nella forma  $0 \leq x_{ij} \leq 1$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Inoltre, poiché i vincoli  $x_{ij} \leq 1$  sono implicati dai vincoli di assegnamento, si possono scrivere semplicemente i vincoli  $x_{ij} \geq 0$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  e comunque avere la garanzia che se esiste una soluzione ottima allora esiste una soluzione ottima intera 0–1. Quindi un problema di assegnamento

può essere considerato equivalente al problema

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \\ x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

cioè può essere riscritto come un particolare problema di Programmazione Lineare avente la struttura medesima del problema dei trasporti.

È possibile effettuare una generalizzazione del problema dell'assegnamento per categorie di lavori. Infatti, frequentemente ci sono molti lavori identici che richiedono la stessa qualifica; tali lavori possono essere raggruppati in categorie di attività. Assumiamo quindi che esistano  $n$  categorie di attività e denotiamo con  $b_j$  il numero di lavori raggruppati nella  $j$ -esima categoria. Anche le persone possono essere raggruppate in categorie di persone aventi lo stesso valore; assumiamo che esistano  $m$  di queste categorie di persone e sia  $a_i$  il numero di persone poste nella  $i$ -esima categoria. Denotiamo con  $c_{ij}$  il valore utile ottenuto assegnando una persona della categoria  $i$  ad un lavoro della categoria  $j$ . Assumiamo che  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ . Introducendo le variabili  $x_{ij}$  rappresentanti il numero di persone della stessa categoria  $i$  assegnate ad un lavoro della categoria  $j$ , questo generale problema di assegnamento può essere formulato in termini di un problema di programmazione lineare nel seguente modo:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

**Esempio 8.2.3** Una compagnia aerea cerca di pianificare le proprie linee aeree creando un aeroporto centrale e cercando di avere un elevato numero di voli in arrivo in questo aeroporto in una certa fascia oraria ed un elevato numero di partenze nella fascia oraria immediatamente successiva. Questo permette ai passeggeri di avere un elevato numero di combinazioni tra città di partenza e città di destinazione con una sola coincidenza e al più un cambio di aereo nell'aeroporto centrale. Il fine è quello di creare una tale struttura in modo da minimizzare i cambi di aerei e quindi il movimento di bagagli nell'aeroporto centrale. Supponiamo che la compagnia aerea abbia cinque voli che arrivano tra le 8 e le 8.30 nell'aeroporto centrale e che poi gli stessi aerei partono per altre diverse destinazioni tra le 8.40 e le 9.20. La tabella che segue riporta il numero medio di passeggeri che arrivano con uno dei voli in arrivo **A1, A2, A3, A4, A5** e che ripartono con i voli in partenza **P1, P2, P3, P4, P5**, ovvero passeggeri che non cambiano aereo

	<b>P1</b>	<b>P2</b>	<b>P3</b>	<b>P4</b>	<b>P5</b>
<b>A1</b>	15	20	8	16	12
<b>A2</b>	17	9	15	25	12
<b>A3</b>	12	32	16	9	20
<b>A4</b>	-	15	9	7	30
<b>A5</b>	-	-	35	10	18

Il volo **A4** arriva troppo tardi e non permette di prendere il volo in partenza **P1**; analogamente il volo **A5** non permette coincidenze con i voli in partenza **P1** e **P2**. Supponendo che tutti gli aerei sono identici, il problema consiste nell'assegnare ciascun aereo in arrivo ad uno dei voli in partenza in modo da massimizzare il numero delle persone che non devono cambiare aereo.

### Formulazione.

Il problema in analisi può essere formulato come problema di assegnamento.

– *Variabili.* Introduciamo le variabili di decisione  $x_{ij}$  definite come segue

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'aereo del volo } \mathbf{Ai} \text{ è assegnato al volo } \mathbf{Pj} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

– *Funzione obiettivo.* Definiamo come funzione obiettivo il numero di passeggeri che non devono cambiare aereo:

$$\begin{aligned} & 15x_{11} + 20x_{12} + 8x_{13} + 16x_{14} + 12x_{15} + \\ & + 17x_{21} + 9x_{22} + 15x_{23} + 25x_{24} + 12x_{25} + \\ & + 12x_{31} + 32x_{32} + 16x_{33} + 9x_{34} + 20x_{35} + \\ & + 15x_{42} + 9x_{43} + 7x_{44} + 30x_{45} + \\ & + 35x_{53} + 10x_{54} + 18x_{55}. \end{aligned}$$

Tale funzione deve naturalmente essere massimizzata.

– *Vincoli.* I vincoli saranno

$$\begin{aligned}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 1 \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 1 \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 1 \\
 x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &= 1 \\
 x_{53} + x_{54} + x_{55} &= 1 \\
 x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 1 \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\
 x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} &= 1 \\
 x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} &= 1 \\
 x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} &= 1.
 \end{aligned}$$

Quindi la formulazione completa sarà

$$\left\{
 \begin{aligned}
 &\max \left( 15x_{21} + 20x_{22} + 8x_{23} + 16x_{24} + 12x_{25} + \right. \\
 &\quad \left. + 17x_{11} + 9x_{12} + 15x_{13} + 25x_{14} + 12x_{15} + \right. \\
 &\quad \left. + 12x_{31} + 32x_{32} + 16x_{33} + 9x_{34} + 20x_{35} + \right. \\
 &\quad \left. + 15x_{42} + 9x_{43} + 7x_{44} + 30x_{45} + \right. \\
 &\quad \left. + 35x_{53} + 10x_{54} + 18x_{55} \right) \\
 &x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\
 &x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \\
 &x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1 \\
 &x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1 \\
 &x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1 \\
 &x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\
 &x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\
 &x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1 \\
 &x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1 \\
 &x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1 \\
 &x_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, 5.
 \end{aligned}
 \right.$$

Una soluzione ottima di questo problema è la seguente:

$$x_{11} = 1, x_{24} = 1, x_{32} = 1, x_{45} = 1, x_{53} = 1$$

e le altre variabili nulle; il valore ottimo della funzione obiettivo è 137.

Osservando questa soluzione si può notare come ciascun aereo in arrivo sia stato assegnato al volo in partenza che permette di mantenere sullo stesso aereo il maggior numero di passeggeri eccetto che per il volo in arrivo **A1**: infatti l'aereo

in arrivo con il volo **A1** è stato assegnato al volo in partenza **P1** e quindi il numero dei passeggeri che non devono cambiare aereo è 15 contro ad esempio un numero di 20 o 16 passeggeri che sarebbero rimasti sullo stesso aereo se questo fosse stato assegnato rispettivamente al volo in partenza **P2** o **P4**.

### 8.2.2 Problemi di Knapsack binario

Il problema del “knapsack”, nella sua versione originaria, può essere descritto come segue: dato un insieme di  $n$  oggetti di dimensioni diverse e differenti valori, si vuole determinare un sottoinsieme di questi oggetti da inserire in una “bisaccia” (knapsack) di capacità limitata in modo da massimizzare il valore trasportato. In questo caso l’evento da modellare è l’inserimento dell’oggetto nella “bisaccia”; è quindi intuitivo introdurre una variabile binaria  $x_i \in \{0, 1\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  che assuma valore 1 se l’ $i$ -esimo oggetto è inserito nella “bisaccia”, 0 se invece non è inserito.

Più in generale, supponiamo di avere  $n$  progetti e un budget disponibile per la loro realizzazione. Il problema consiste nello scegliere un sottoinsieme dei progetti in modo da massimizzare la somma dei valori senza superare il limite imposto dal budget nell’ipotesi che ciascun progetto scelto deve essere realizzato completamente e non è accettata una realizzazione parziale del progetto.

**Esempio 8.2.4** *Si supponga di disporre di un capitale di 18 mila euro e di poterle investire in 4 progetti diversi. Nel primo progetto si debbono investire 8 euro per ricavarne 40, nel secondo si debbono investire 6 euro per ricavarne 24, nel terzo progetto si debbono investire 5 euro per ricavarne 15, infine nel quarto progetto si debbono investire 4 euro per ricavarne 8. Formulare il problema di PLI che consente di scegliere l’insieme di progetti che massimizza il profitto rispettando i vincoli di disponibilità di capitale.*

#### Formulazione.

– *Variabili.* Le variabili di decisione sono definite, per  $i = 1, 2, 3, 4$  come segue

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se si sceglie il progetto } i \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da massimizzare è

$$40x_1 + 24x_2 + 15x_3 + 8x_4.$$

– *Vincoli.* I vincoli esprimono il fatto che il costo degli investimenti non può superare il budget disponibile, cioè

$$8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 18.$$

Complessivamente il problema si scrive:

$$\begin{cases} \max 40x_1 + 24x_2 + 15x_3 + 8x_4 \\ 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 18 \\ x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

□

*Formulazione generale di un problema di knapsack binario.*

In generale, supponiamo di avere  $n$  progetti tali che l' $i$ -esimo progetto ha costo di realizzazione  $a_i$  ed un valore pari  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; supponiamo inoltre che esista un budget  $b$  disponibile per la realizzazione dei progetti. Il problema consiste nello scegliere un sottoinsieme dei progetti in modo da massimizzare la somma dei valori senza superare il limite imposto dal budget.

L'evento da modellare, in questo caso, è la realizzazione del singolo progetto. Ciò può essere effettuato introducendo  $n$  variabili binarie nel seguente modo.

– *Variabili.* Introduciamo le variabili  $x_i \in \{0, 1\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tali che

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'}i\text{-esimo progetto è realizzato} \\ 0 & \text{se l'}i\text{-esimo progetto non è realizzato.} \end{cases}$$

– *Funzione obiettivo.* È data dal valore complessivo cioè da

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i.$$

– *Vincoli.* Non si deve superare il budget disponibile e quindi si deve imporre

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b.$$

La formulazione complessiva può essere quindi scritta

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \\ x \in \{0, 1\}^n. \end{cases}$$

Tuttavia, in generale, questi problemi di scelta tra sottoprogetti possono avere più vincoli: si pensi al caso in cui il budget sia mensile e si voglia pianificare per più di un mese; in questo caso il problema è detto *knapsack multidimensionale*.

### 8.2.3 Problemi di “Capital Budgeting” (pianificazione degli investimenti)

I problemi di pianificazione degli investimenti rappresentano una delle problematiche di maggiore importanza all'interno delle problematiche finanziarie. Anche all'interno delle realtà aziendali, la politica degli investimenti è strettamente legata alla pianificazione finanziaria e ai processi di spesa. Di solito gli investimenti sono valutati attraverso il cosiddetto *indice di redditività* di ciascun investimento e una strategia di scelta degli investimenti dettata dal buon senso e quella di ordinare gli investimenti in base a tali indici e scegliendo gli investimenti nell'ordine stabilito cercano di non violare il vincolo sul budget disponibile ed eventuali altri vincoli. Ovviamente una formulazione di un modello di Programmazione Lineare 0–1 che rappresenti il problema permette invece di ottenere una soluzione ottima del problema.

Il modello di Programmazione Lineare Intera che descrive il problema della pianificazione degli investimenti viene denominato *modello di “Capital Budgeting”* ed è stato proposto alla fine degli anni '50 dagli economisti Manne e Markowitz; quest'ultimo fu poi insignito del premio Nobel per l'Economia.

In sintesi il problema della pianificazione degli investimenti può essere così descritto: siano dati  $n$  progetti di investimento da realizzare o meno. Si fissa un orizzonte temporale  $T$  entro il quale si vuole effettuare l'analisi (ad esempio,  $T = 1$  anno).  $T$  si suddivide in  $t$  periodi  $T = \{1, \dots, t\}$  (ad esempio, un anno può essere diviso in quattro trimestri, ovvero  $t = 4$ ). Ciascun progetto di investimento  $i$ -esimo,  $i = 1, \dots, n$  è caratterizzato da un vettore  $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{it})^T$  del *flusso di cassa*, ovvero  $a_{ij}$  rappresenta il flusso di cassa (positivo o negativo) generato dall' $i$ -esimo progetto nel periodo  $j$ -esimo. Si assume che il flusso di cassa positivo corrisponda ad una spesa, mentre un flusso di cassa negativo corrisponda ad un guadagno. Quindi se, ad esempio, il flusso di cassa relativo ad un certo progetto su un orizzonte temporale di quattro periodi è pari a  $(4, 3, -2, -7)$ , allora la realizzazione del progetto richiede spese di 4 e 3 nei primi due periodi e poi fornisce un guadagno di 2 e 7 rispettivamente nel terzo e quarto periodo. Fra l'altro, questa struttura è tipica dei flussi di cassa. La spesa totale sarebbe  $4 + 3 - 2 - 7 = -2$ , ovvero un guadagno complessivo di 2. Ora, per ogni  $i = 1, \dots, n$  denotiamo con

$$c_i = - \sum_{j=1}^t a_{ij}$$

l'indice di redditività del progetto  $i$ -esimo, dove il segno meno è necessario per far corrispondere  $c_i$  al valore del guadagno. Inoltre, per ogni periodo  $j = 1, \dots, t$  c'è un budget limitato denotato con  $b_j$ . Il problema consiste nel determinare un sottoinsieme di progetti da realizzare in modo da avere guadagno massimo. Si assume inoltre che i progetti non sono frazionabili, cioè non possono essere realizzati parzialmente.

### Formulazione.

– *Variabili.* Introduciamo le variabili  $x_i \in \{0, 1\}$   $j = 1, \dots, n$ , così definite:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'}i\text{-esimo progetto è realizzato} \\ 0 & \text{se il }i\text{-esimo progetto non è realizzato.} \end{cases}$$

– *Funzione obiettivo.* È data dal valore complessivo cioè da

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i.$$

– *Vincoli.* Per ogni periodo  $j \in T$  non si deve superare il budget  $b_j$  disponibile e quindi per ogni  $j = 1, \dots, t$  si deve imporre

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq b_j.$$

Si ha quindi un vincolo di “knapsack” per ogni periodo  $j = 1, \dots, t$ .

La formulazione complessiva può essere quindi scritta

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq b_j & j = 1, \dots, t \\ x \in \{0, 1\}^n. \end{cases}$$

**Osservazione 8.2.5** Se fossero possibili realizzazioni parziali di alcuni progetti, le variabili corrispondenti non sarebbero vincolate ad appartenere all'insieme  $\{0, 1\}$ , ma sarebbero appartenenti all'intervallo  $[0, 1]$  e rappresenterebbero il livello di realizzazione del progetto; in questo caso si avrebbe un problema di Programmazione Lineare Mista

**Osservazione 8.2.6** Altri vincoli che realizzano delle condizioni logiche sono facilmente introducibili nella formulazione. Ad esempio:

- la realizzazione di un particolare progetto (ad esempio il 5º)

$$x_5 = 1;$$

- la realizzazione di *esattamente* uno dei progetti 1º, 3º e 11º:

$$x_1 + x_3 + x_{11} = 1;$$

- la realizzazzione di *almeno* due dei progetti 1<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup> e 11<sup>o</sup>:

$$x_1 + x_3 + x_{11} \geq 2;$$

- la realizzazzione di *al piú* due dei progetti 1<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup> e 11<sup>o</sup>:

$$x_1 + x_3 + x_{11} \leq 2.$$

### 8.3 VARIABILI BINARIE COME VARIABILI INDICATRICI

Un altro classico uso di variabili 0 – 1, consiste nell'indicare le relazioni di dipendenza tra alcune grandezze di un problema; cioè, in questo caso, le variabili binarie vengono utilizzate come *variabili indicatrici*.

Supponiamo che la variabile  $x_i \geq 0$  rappresenti una grandezza del problema e di conoscere un limite superiore di tale variabile, cioè un valore  $M$  positivo maggiore del più grande valore che può assumere la  $x_i$ . Allora, può essere necessario imporre la condizione:

$$x_i > 0 \Rightarrow \delta = 1 \quad (8.3.1)$$

oppure la condizione equivalente  $\delta = 0 \Rightarrow x_i = 0$  (si ricordi che era assunto che  $x_i \geq 0$ ). L'implicazione (8.3.1) può essere modellata con il vincolo

$$x_i - M\delta \leq 0.$$

Tuttavia, in altri casi, può essere necessario imporre la condizione

$$\delta = 1 \Rightarrow x_i > 0 \quad (8.3.2)$$

(che è equivalente a  $x_i = 0 \Rightarrow \delta = 0$ , poiché, per ipotesi,  $x_i \geq 0$ ). La condizione logica (8.3.2) non si può facilmente rappresentare con un vincolo. Supponiamo, ad esempio, che in un problema di miscelazione una variabile  $x_i$  rappresenti la quantità di un ingrediente da includere nella miscela e quindi si ha  $x_i \geq 0$ ; si può usare una variabile indicatrice  $\delta \in \{0, 1\}$  per distinguere tra il caso in cui  $x_i = 0$  e  $x_i > 0$ . La condizione logica (8.3.2) afferma che se  $\delta = 1$  allora l'ingrediente rappresentato da  $x$  deve apparire nella miscela, ma non fornisce nessuna indicazione sulla quantità dell'ingrediente. In realtà, è più verosimile imporre una condizione logica del tipo

$$\delta = 1 \Rightarrow x_i \geq \varepsilon > 0 \quad (8.3.3)$$

cioè se  $\delta = 1$  allora la variabile  $x_i$  assume un valore almeno pari ad  $\varepsilon$ .

La (8.3.3) è rappresentabile dal vincolo

$$x - \varepsilon\delta \geq 0. \quad (8.3.4)$$

Riepilogando possiamo considerare il seguente schema: se  $x_i$  è una variabile non negativa e  $\delta \in \{0, 1\}$  ed inoltre  $x_i < M$  e  $\varepsilon > 0$ , allora

$$\begin{aligned} x_i - M\delta \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_i > 0 \Rightarrow \delta = 1 \\ \delta = 0 \Rightarrow x_i = 0 \end{cases} \\ x_i - \varepsilon\delta \geq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 1 \Rightarrow x_i \geq \varepsilon \\ x_i = 0 \Rightarrow \delta = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Analizziamo, ora, un esempio di miscelazione in cui applichiamo quanto appena esposto.

**Esempio 8.3.1** *Sia data la seguente tavola di valori nutrizionali che riporta il tipo di alimento, il costo unitario, le unità di sostanze (proteine, carboidrati, grassi, vitamine, calcio) per unità di alimento*

	costo	prot.	carb.	grassi	vitam.	calcio
<b>1</b>	0.15	0	7	1	1	0
<b>2</b>	0.23	1	0	3	1	4
<b>3</b>	0.79	5	0	4	0	1
<b>4</b>	0.47	2	2	1	3	0
<b>5</b>	0.52	0	3	0	2	1

*Formulare un problema di PLI che permetta di trovare una dieta di costo minimo sapendo che si devono assumere almeno 3 unità di proteine, 10 unità di carboidrati, 2 unità di grasso, 3 unità di vitamine e 2 unità di calcio e sapendo che se è presente l'alimento 1 la dieta non può contenere l'alimento 5.*

### Formulazione.

È un classico problema di miscelazione; le quantità di alimenti presenti nella dieta si suppongono frazionabili. A causa della presenza di una condizione logica, è necessario utilizzare, in aggiunta alle variabili del problema, una variabile 0 – 1 per modellarla cioè per esprimere con un vincolo il legame tra la presenza nella dieta dell'alimento 1 e dell'alimento 5.

- *Variabili di decisione.* Introduciamo come variabili del problema le unità di alimenti presenti nella dieta,  $x_i$  con  $i = 1, \dots, 5$ . Inoltre, introduciamo la variabile booleana  $\delta \in \{0, 1\}$ .
- *Vincoli.* Si hanno i seguenti vincoli:

- Vincoli di qualità: la dieta deve contenere alcuni valori minimi di sostanze nutrizionali; dalla tabella si ottiene che deve essere

$$x_2 + 5x_3 + 2x_4 \geq 3$$

$$7x_1 + 2x_4 + 3x_5 \geq 10$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 \geq 3$$

$$4x_2 + x_3 + x_5 \geq 2$$

- Vincolo logico: se nella dieta è presente l'alimento 1 allora non deve esserci l'alimento 5. Vogliamo quindi definire dei vincoli che consentano di esprimere le seguenti condizioni logiche

$$\begin{aligned} x_1 > 0 &\Rightarrow \delta = 1 \\ \delta = 1 &\Rightarrow x_5 = 0 \end{aligned}$$

Secondo quanto descritto, ciò può essere modellato introducendo i vincoli

$$x_1 - M\delta \leq 0$$

$$x_5 - M(1 - \delta) \leq 0$$

dove  $M$  è un numero positivo maggiore del più grande valore che possono assumere le variabili.

- Vincoli di non negatività: Si tratta di quantità di alimenti, e quindi deve essere

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 5.$$

– *Funzione obiettivo.* È il costo da minimizzare ed è data da

$$0.15x_1 + 0.23x_2 + 0.79x_3 + 0.47x_4 + 0.52x_5.$$

Complessivamente la formulazione di PLI per questo problema può essere scritta

$$\left\{ \begin{array}{l} \min (0.15x_1 + 0.23x_2 + 0.79x_3 + 0.47x_4 + 0.52x_5) \\ x_2 + 5x_3 + 2x_4 \geq 3 \\ 7x_1 + 2x_4 + 3x_5 \geq 10 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 \geq 3 \\ 4x_2 + x_3 + x_5 \geq 2 \\ x_1 - M\delta \leq 0 \\ x_5 - M(1 - \delta) \leq 0 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 5 \\ \delta \in \{0, 1\}. \end{array} \right.$$

□

### 8.3.1 Problema del costo fisso

Esaminiamo un altro esempio di applicazione di variabili indicatrici: *il problema del costo fisso*. Nei modelli di PL la funzione obiettivo è una funzione lineare nelle variabili di decisione che, di solito, rappresentano livelli di attività. Questa ipotesi, in molti problemi pratici, non è verosimile: può infatti accadere che il costo di un'attività abbia un costo iniziale (set-up), ad esempio l'acquisto di un macchinario, che esiste solo se quell'attività è svolta a livello non nullo.

In riferimento ad un'applicazione industriale, indichiamo con  $c$  il costo della manifattura per unità di prodotto, con  $f \geq 0$  il costo di set-up (costo fisso) e con  $x \geq 0$  la quantità di prodotto da fabbricare.

Quindi se  $x = 0$  il costo totale è ovviamente nullo; se  $x > 0$  allora il costo totale è dato da  $cx + f$ . Quindi la funzione obiettivo è data dall'espressione

$$f(x) = \begin{cases} cx + f & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Tale funzione ha una discontinuità nell'origine e quindi non è lineare (Figura 8.3.1).

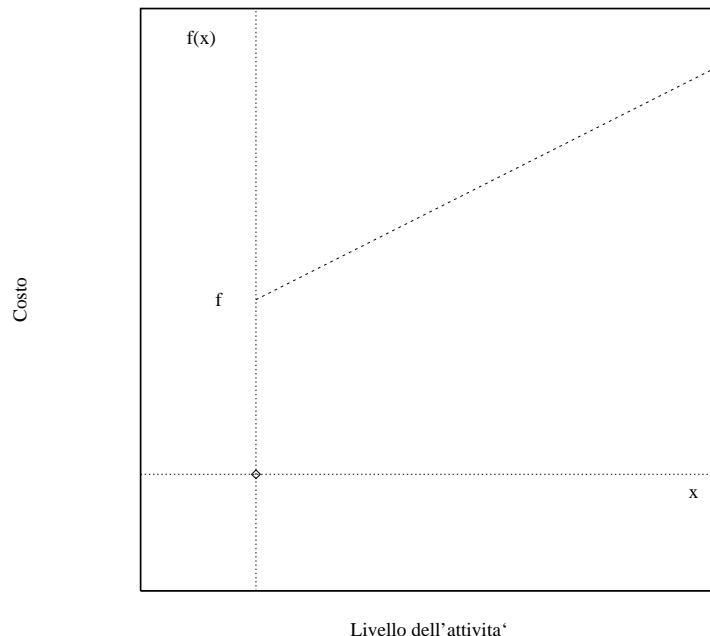


Figura 8.3.1 Problema del costo fisso.

Per formulare questo problema in termini di programmazione lineare, introduciamo una variabile indicatrice  $\delta \in \{0, 1\}$  tale che, se il prodotto rappresentato

dalla  $x$  è fabbricato in una qualsiasi quantità allora  $\delta = 1$ ; se il prodotto non è fabbricato allora  $\delta = 0$ . Dobbiamo, quindi modellare con un vincolo le condizioni logiche

$$x > 0 \Rightarrow \delta = 1 \quad (8.3.5)$$

$$x = 0 \Rightarrow \delta = 0. \quad (8.3.6)$$

L'implicazione (8.3.5) si realizza introducendo il vincolo

$$x - M\delta \leq 0$$

dove  $M$  è un numero positivo maggiore del più grande valore che può assumere la  $x$ . Per realizzare l'implicazione (8.3.6), si dovrebbe introdurre un vincolo del tipo  $x - \varepsilon\delta \geq 0$  con  $\varepsilon > 0$ ; in realtà, ciò non è necessario perché, come vedremo, la condizione (8.3.6) discende direttamente dal fatto che ci troviamo in un problema di minimizzazione. Infatti, il problema può essere formulato come

$$\min (cx + f\delta)$$

con vincolo aggiuntivo

$$x - M\delta \leq 0$$

con  $x \geq 0$  e  $\delta \in \{0, 1\}$ .

Dalla struttura della funzione discende immediatamente che se  $x = 0$  allora, poiché si tratta di un problema di minimo, all'ottimo deve essere  $\delta = 0$ , essendo  $f \geq 0$ . Quindi non è necessario introdurre nella formulazione la condizione logica (8.3.6).

Si può facilmente generalizzare il problema del costo fisso al caso di  $n$  attività. Supponiamo che  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  rappresenti il livello al quale viene svolta ciascuna attività. Supponiamo che il costo della  $i$ -esima attività sia dato da

$$\begin{cases} c_i x_i + f_i & \text{se } x_i > 0 \\ 0 & \text{se } x_i = 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

dove  $f_i \geq 0$  è il costo fisso dell'attività  $i$ -esima e deve essere pagato solo se l'attività  $i$  viene svolta ad un livello non nullo.

Il corrispondente problema di ottimizzazione è:

$$\min z(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{i \in I(x)} f_i$$

dove  $I(x) = \{i \in \{1, \dots, n\} : x_i > 0\}$  e quindi è una funzione discontinua nell'origine, non lineare. Per formularlo come problema di PLI, si introduce per ogni  $i = 1, \dots, n$  una variabile  $\delta_i \in \{0, 1\}$  tale che

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'attività } i \text{ è svolta a livello non nullo} \\ 0 & \text{se l'}i\text{-esima attività non è svolta.} \end{cases}$$

Si vuole quindi che siano verificate le seguenti condizioni logiche

$$x_i > 0 \Rightarrow \delta_i = 1, \quad x_i = 0 \Rightarrow \delta_i = 0.$$

Analogamente al caso precedente, il problema può essere formulato

$$\min \left( \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{i=1}^n \delta_i f_i \right)$$

con vincoli aggiuntivi

$$x_i - M\delta_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

e con

$$x_i \geq 0, \quad \delta_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n.$$

È chiaro che se  $x_i = 0$ , allora all'ottimo  $\delta_i = 0$  perché  $f_i \geq 0$  e quindi la condizione logica  $x_i = 0 \Rightarrow \delta_i = 0$  è automaticamente verificata. Inoltre, se  $x_i > 0$  allora  $\delta_i = 1$  e quindi il suo costo fisso si aggiungerà al valore della funzione costo nella funzione obiettivo. È quindi evidente che una soluzione ottima del problema iniziale è anche ottima per il problema trasformato.

**Esempio 8.3.2** In una centrale elettrica sono a disposizione tre generatori e ogni giorno si deve decidere quali usare di giorno e quali di notte per assicurare una produzione di almeno 4000 megawatts di giorno e di almeno 2800 megawatts di notte. L'uso di un generatore comporta la presenza di personale tecnico che sorvegli il suo funzionamento; tale personale viene retribuito in maniera diversa tra il giorno e la notte e a seconda del tipo di generatore; tali costi di attivazione sono riportati nella tabella che segue (in euro) insieme al costo (in euro) per ogni megawatt prodotta e alla massima capacità di produzione in megawatts per ogni singolo periodo (giorno/notte).

	Costo attivazione giorno	Costo attivazione notte	Costo per megawatt	Capacità max
<b>Generatore A</b>	750	1000	3	2000
<b>Generatore B</b>	600	900	5	1700
<b>Generatore C</b>	800	1100	6	2500

Formulare un modello di PLI che permetta di rappresentare il problema in analisi.

### Formulazione.

È un problema di costo fisso e può essere formulato in termini di Programmazione Lineare Intera come appena descritto in generale. Per brevità di notazione, chiameremo 1<sup>o</sup> periodo il giorno e 2<sup>o</sup> periodo la notte.

– *Variabili.* Indichiamo con  $x_{A_i}$ ,  $x_{B_i}$  e  $x_{C_i}$ ,  $i = 1, 2$ , i megawatts generati rispettivamente dai generatori A, B e C nel periodo  $i$ . Inoltre, per ottenere una formulazione lineare, è necessario introdurre sei variabili 0 – 1,  $\delta_{A_i}$ ,  $\delta_{B_i}$  e  $\delta_{C_i}$ ,  $i = 1, 2$ , definite come segue :

$$\delta_{A_i} = \begin{cases} 1 & \text{se il generatore A è attivato nell'}i\text{-esimo periodo} \\ 0 & \text{se nell'}i\text{-esimo periodo il generatore A non è attivato} \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Analoga è la definizione per le altre variabili  $\delta_{B_i}$  e  $\delta_{C_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare può esser scritta

$$\begin{aligned} 3x_{A_1} + 3x_{A_2} + 5x_{B_1} + 5x_{B_2} + 6x_{C_1} + 6x_{C_2} + 750\delta_{A_1} + \\ + 1000\delta_{A_2} + 600\delta_{B_1} + 900\delta_{B_2} + 800\delta_{C_1} + 1100\delta_{C_2}. \end{aligned}$$

– *Vincoli.* Si devono considerare i vincoli sulla richiesta cioè

$$x_{A_1} + x_{B_1} + x_{C_1} \geq 4000$$

$$x_{A_2} + x_{B_2} + x_{C_2} \geq 2800.$$

Inoltre, per quanto esposto nel caso generale si devono considerare i vincoli

$$x_{A_i} - 2000\delta_{A_i} \leq 0 \quad i = 1, 2$$

$$x_{B_i} - 1700\delta_{B_i} \leq 0 \quad i = 1, 2$$

$$x_{C_i} - 2500\delta_{C_i} \leq 0 \quad i = 1, 2.$$

Quindi la formulazione complessiva può essere scritta

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \left( 3x_{A_1} + 3x_{A_2} + 5x_{B_1} + 5x_{B_2} + 6x_{C_1} + 6x_{C_2} + \right. \\ \left. + 750\delta_{A_1} + 1000\delta_{A_2} + 600\delta_{B_1} + 900\delta_{B_2} + 800\delta_{C_1} + 1100\delta_{C_2} \right) \\ x_{A_1} + x_{B_1} + x_{C_1} \geq 4000 \\ x_{A_2} + x_{B_2} + x_{C_2} \geq 2800 \\ x_{A_1} - 2000\delta_{A_1} \leq 0 \\ x_{B_1} - 1700\delta_{B_1} \leq 0 \\ x_{C_1} - 2500\delta_{C_1} \leq 0 \\ x_{A_2} - 2000\delta_{A_2} \leq 0 \\ x_{B_2} - 1700\delta_{B_2} \leq 0 \\ x_{C_2} - 2500\delta_{C_2} \leq 0 \\ x_{A_i} \geq 0, x_{B_i} \geq 0, x_{C_i} \geq 0, \quad i = 1, 2 \\ \delta_{A_i} \in \{0, 1\}, \delta_{B_i} \in \{0, 1\}, \delta_{C_i} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2. \end{array} \right.$$

□

### 8.3.2 Problemi di “lot sizing” (gestione della scorte)

I modelli multiperiodo esaminati nel paragrafo 3.4.1 rientrano in una classe di modelli per la programmazione della produzione che va sotto il nome di *Modelli per la gestione della scorte* (“*lot sizing*”) che anche da un punto di vista storico costituiscono un argomento centrale della Ricerca Operativa

Attualmente negli USA alcune indagini hanno evidenziato che il 50% delle aziende americane di produzione utilizzano strumenti matematici per la gestione ottima delle scorte. C’è la necessità di integrare la fase produttiva con quella della gestione delle scorte. L’utilizzazione di scorte nei processi produzione ha numerosi vantaggi:

- *economia di scala* che si possono conseguire aumentando i volumi produttivi minimizzando l’incidenza dei costi fissi;
- *flessibilità della produzione*: si riesce a far fronte con le scorte all’eventuale andata fuori servizio di qualche linea di produzione;
- *equipartizione dei carichi di lavoro* sull’intero orizzonte produttivo.

Un problema di “lot sizing” si può formalizzare nel seguente modo: si tratta di pianificare la fabbricazione di un bene in assegnato un orizzonte temporale costituito da un insieme finito di periodi di controllo  $T = \{1, \dots, t\}$ . Per ogni periodo  $i \in \{1, \dots, t\}$  è nota la richiesta di questo bene (che deve essere soddisfatta esattamente) che indichiamo con  $d_i$ . Sono noti i costi unitari  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, t$  di produzione del bene in ciascun periodo ed inoltre in ogni periodo, ad eccezione dell’ultimo, è possibile immagazzinare quantità di questo bene che andrà a fare parte della quantità di bene disponibile nel periodo successivo. Anche il costo di stockaggio unitario è assegnato ed è pari a  $b_i$ . La novità rispetto ai modelli multiperiodo consiste nella presenza di costi di setup corrispondenti all’avviamento della produzione in ciascun periodo; si tratta di costi fissi che non dipendono dalle quantità prodotte e vengono sostenuti solamente se si produce qualcosa nel periodo; indichiamo con  $f_i$  questi costi fissi.

Il problema consiste nel determinare le quantità di bene da produrre in ciascun periodo e le quantità da immagazzinare in modo da soddisfare le richieste minimizzando il costo complessivo dato dalla somma dei costi di produzione e di stockaggio tenendo conto che all’inzio del primo periodo non c’è nessuna scorta disponibile e che nell’ultimo periodo non si può effettuare alcuno stockaggio.

#### Formulazione.

- *Variabili*. Indichiamo con  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, t$  il livello di produzione nel periodo  $i$ -esimo, cioè le quantità del bene da produrre in quel periodo. Indichiamo inoltre con  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, t-1$  le quantità di bene che vengono immagazzinate nel periodo

i. Inoltre, per  $i = 1, \dots, t$  introduciamo le seguenti variabili 0 – 1:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se nell'}i\text{--esimo periodo c'è produzione} \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

Il problema può essere efficacemente rappresentato come in Figura 8.3.2

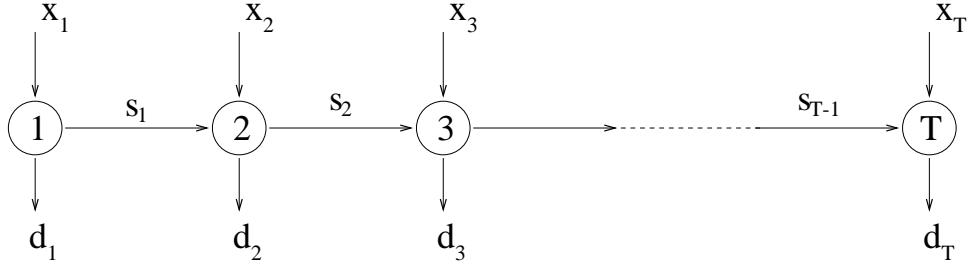


Figura 8.3.2 Un problema di “Lot sizing”

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo sarà data dalla somme dei costi di produzione e dei costi di stockaggio e quindi può essere scritta nella forma

$$\sum_{i=1}^t c_i x_i + \sum_{i=1}^{t-1} b_i s_i + \sum_{i=1}^t f_i \delta_i$$

– *Vincoli.* I vincoli del problema sono i seguenti già esaminati nel caso di modelli multiperiodo:

$$\begin{aligned} x_1 &= d_1 + s_1 \\ s_{i-1} + x_i &= d_i + s_i, \quad i = 2, \dots, t-1 \\ s_{t-1} + x_t &= d_t \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_t \geq 0, \\ s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, \dots, s_{t-1} \geq 0 \end{aligned}$$

Inoltre si devono considerare i vincoli relativi alla presenza dei costi fissi, ovvero i vincoli

$$x_i - M\delta_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, t$$

dove  $M$ , ad esempio, può essere scelta pari a  $\sum_{i=1}^t d_i$ , cioè pari a quanto viene richiesto durante l'intero orizzonte temporale.

Quindi la formulazione complessiva di un problema di “lot sizing” si può scrivere come

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 \min \left( \sum_{i=1}^t c_i x_i + \sum_{i=1}^{i-1} b_i s_i + \sum_{i=1}^t f_i \delta_i \right) \\
 x_1 - s_1 = d_1 \\
 s_{i-1} + x_i - s_i = d_i \quad i = 2, \dots, t-1 \\
 s_{t-1} + x_t = d_t, \\
 x_i - M \delta_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, t \\
 x_1 \geq 0, \dots, x_t \geq 0, \\
 s_1 \geq 0, \dots, s_{t-1} \geq 0 \\
 \delta_1 \in \{0, 1\}, \dots, \delta_t \in \{0, 1\}.
 \end{array}
 \right.$$

□

### 8.3.3 Problemi di localizzazione di impianti

Si tratta di problemi che nascono nell'ambito della pianificazione industriale che possono essere schematizzati nel seguente modo: sono date  $n$  aree  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ , distribuite in un territorio. In ciascuna di esse è possibile costruire una fabbrica che produce merce. Per ciascuna area  $\mathbf{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  è nota la massima capacità produttiva  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  che una fabbrica avrebbe se fosse localizzata in  $\mathbf{A}_i$ . Sia inoltre  $f_i$  il costo fisso di costruzione della fabbrica nell'area  $\mathbf{A}_i$ . Sono inoltre dati  $m$  siti  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_m$ , ove risiedono clienti ai quali deve essere trasportate la merce prodotta. Per ciascun sito  $\mathbf{C}_j$  è assegnato un quantitativo  $r_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , di una data merce richiesta presso il sito  $\mathbf{C}_j$ . Tale richiesta deve essere soddisfatta esattamente. Per soddisfare questa richiesta possono essere costruite  $q \leq n$  fabbriche che producono la merce. Esistono altri costi fissi dovuti alla eventuale costruzione di una strada dall'area  $\mathbf{A}_i$  al sito  $\mathbf{C}_j$ , per ogni  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ ; indicheremo questi costi fissi con  $f_{ij}$ . Siano inoltre  $c_{ij}$  il costo necessario per trasportare una unità di merce dalla fabbrica costruita nell'area  $\mathbf{A}_i$  al sito  $\mathbf{C}_j$  e  $M_{ij}$  il quantitativo massimo di merce trasportabile. Il problema consiste nel determinare quante fabbriche e su quali aree costruirle, insieme a quali strade di collegamento costruire, in modo da soddisfare le richieste di i siti minimizzando i costi di costruzione delle fabbriche, delle strade di collegamento e il costo del trasporto della merce una volta che le costruzioni delle fabbriche sono state ultimate determinando al tempo stesso il piano per il trasporto della merce per soddisfare tutte le richieste.

Questo problema può essere formulato come problema di Programmazione Lineare Intera nel seguente modo: si introducono le seguenti variabili

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se una fabbrica è costruita sull'area } \mathbf{A}_i \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se una strada è costruita da } \mathbf{A}_i \text{ a } \mathbf{C}_j \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si introducono inoltre le variabili  $x_{ij}$  che rappresentano la quantità di merce trasportata dalla fabbrica costruita nell'area  $\mathbf{A}_i$  al sito  $\mathbf{C}_j$ .

I vincoli sono innanzitutto i vincoli di richiesta

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = r_j \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, m.$$

Inoltre per ogni  $i = 1, \dots, m$ , si vuole che se  $\sum_{j=1}^m x_{ij} > 0$  allora  $\delta_i = 1$ . Questa implicazione si realizza con i vincoli

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} - p_i \delta_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, n.$$

Ragionando analogamente si ottengono i vincoli

$$x_{ij} - M_{ij} y_{ij} \leq 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Infine dovrà essere

$$\sum_{i=1}^n \delta_i \leq q.$$

Si devono poi esplicitare i vincoli  $x_{ij} \geq 0$  e  $\delta_i \in \{0, 1\}$ ,  $y_{ij} \in \{0, 1\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

La funzione obiettivo si può quindi scrivere

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^n f_i \delta_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{ij} y_{ij}.$$

Esaminiamo, ora, un esempio molto semplice di problema di localizzazione di impianti.

**Esempio 8.3.3** Una compagnia di distribuzione deve rifornire i suoi clienti  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{C}_3$ ,  $\mathbf{C}_4$  e  $\mathbf{C}_5$  che sono dislocati in località diverse di una regione. Per ottimizzare il rifornimento la compagnia vuole costruire un numero di depositi non superiore a due disponendo di tre possibili zone dove costruirli. A seconda della zona in cui vengono costruiti, i tre possibili depositi hanno un costo di costruzione e una capacità massima diversi. La tabella che segue riporta questi costi in migliaia di euro e queste capacità in tonnellate.

	Costo costruzione	Capacità massima
<b>Deposito 1</b>	10000	180
<b>Deposito 2</b>	15000	230
<b>Deposito 3</b>	13000	500

Il quantitativo di merce (in tonnellate) richiesto da ciascun cliente è riportato nella tabella che segue insieme ai costi (in migliaia di euro) del trasporto di una unità di merce da ciascuno dei possibili depositi a ciascun cliente.

	<b>C<sub>1</sub></b>	<b>C<sub>2</sub></b>	<b>C<sub>3</sub></b>	<b>C<sub>4</sub></b>	<b>C<sub>5</sub></b>
<b>Richiesta</b>	91	170	135	153	110
<b>Deposito 1</b>	15	13	27	9	7
<b>Deposito 2</b>	12	21	34	21	3
<b>Deposito 3</b>	7	10	2	17	12

Costruire un modello lineare che rappresenti il problema in analisi per soddisfare esattamente la richiesta minimizzando il costo complessivo trascurando la possibilità di costruire ulteriori collegamenti rispetto a quelli esistenti e supponendo che non ci siano limitazioni sulle quantità massime di merci trasportabili.

### Formulazione.

È un problema che rientra nello schema generale di un problema di localizzazione di impianti e quindi può essere formulato in termini di Programmazione Lineare Intera come appena descritto nel caso generale.

– *Variabili.* È sufficiente introdurre le variabili binarie

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se è costruito l'}i\text{--esimo deposito} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e le variabili  $x_{ij}$  che rappresentano la quantità di merce da trasportare dal deposito  $i$ –esimo alla zona  $j$ –esima.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare sarà

$$15x_{11} + 13x_{12} + 27x_{13} + 9x_{14} + 7x_{15} + 12x_{21} + 21x_{22} + 34x_{23} + 21x_{24} + 3x_{25} \\ + 7x_{31} + 10x_{32} + 2x_{33} + 17x_{34} + 12x_{35} + 10000\delta_1 + 15000\delta_2 + 13000\delta_3.$$

– *Vincoli.* I vincoli da considerare sono innanzitutto i vincoli di richiesta

$$\sum_{i=1}^3 x_{i1} = 91, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i2} = 170, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i3} = 135, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i4} = 153, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i5} = 110.$$

Inoltre

$$\sum_{j=1}^5 x_{1j} - 180\delta_1 \leq 0,$$

$$\sum_{j=1}^5 x_{2j} - 230\delta_2 \leq 0,$$

$$\sum_{j=1}^5 x_{3j} - 500\delta_3 \leq 0.$$

Poiché non si possono costruire più di due depositi, si deve poi imporre che

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 2.$$

Naturalmente devono essere anche esplicitati i vincoli

$$x_{ij} \geq 0 \quad \delta_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Quindi la formulazione complessiva è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \left( 15x_{11} + 13x_{12} + 27x_{13} + 9x_{14} + 7x_{15} + 12x_{21} + 21x_{22} + 34x_{23} \right. \\ \quad \left. + 21x_{24} + 3x_{25} + 7x_{31} + 10x_{32} + 2x_{33} + 17x_{34} + 12x_{35} \right. \\ \quad \left. + 10000\delta_1 + 15000\delta_2 + 13000\delta_3 \right) \\ \sum_{i=1}^3 x_{i1} = 91 \\ \sum_{i=1}^3 x_{i2} = 170 \\ \sum_{i=1}^3 x_{i3} = 135 \\ \sum_{i=1}^3 x_{i4} = 153 \\ \sum_{i=1}^3 x_{i5} = 110 \\ \sum_{j=1}^5 x_{1j} - 180\delta_1 \leq 0 \\ \sum_{j=1}^5 x_{2j} - 230\delta_2 \leq 0 \\ \sum_{j=1}^5 x_{3j} - 500\delta_3 \leq 0 \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 2 \\ x_{ij} \geq 0 \quad \delta_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{array} \right.$$

□

## 8.4 VARIABILI BINARIE PER INDICARE IL SODDISFACIMENTO DI VINCOLI DISGIUNTIVI

Nell'usuale definizione di problemi di ottimizzazione si assume che tutti i vincoli debbano essere soddisfatti simultaneamente da una soluzione ammissibile. Tuttavia in molte applicazioni può accadere che solo un sottoinsieme dei vincoli debba essere soddisfatto e che tale sottoinsieme sia specificato dal valore che assume un'opportuna variabile di decisione. In questo caso si dice che i vincoli sono *disgiuntivi*.

Come esempio di questo uso delle variabili binarie, analizziamo una importante classe di problemi.

### 8.4.1 Problemi di “scheduling” (sequenziamento)

Si tratta di problemi di produzione in cui si deve decidere l'ordine di processamento di una sequenza di lavori su una macchina in grado di eseguire un lavoro alla volta (capacità unitaria). Si deve quindi esprimere la condizione disgiuntiva

“il lavoro  $i$ -esimo precede il lavoro  $j$ -esimo”  
oppure  
“il lavoro  $j$ -esimo precede il lavoro  $i$ -esimo”.

Questo tipo di problema si presenta spesso in ambito industriale e nei sistemi di elaborazione.

Formalmente si ha la seguente situazione: siano dati  $n$  lavori *indipendenti* (il tempo di esecuzione di ciascun lavoro non dipende da quando viene eseguito rispetto agli altri lavori) e *indivisibili* (ciascun lavoro deve essere completato prima di poter eseguire il successivo).

Supponiamo inoltre che ciascun lavoro sia presente nel sistema fin dall'inizio, cioè che la macchina possa iniziare la lavorazione di un qualunque lavoro in qualsiasi istante.

Sia noto  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  il tempo di processamento di ciascun lavoro sulla macchina.

Il problema consiste nel determinare la sequenza di lavorazione dei lavori sulla macchina, cioè gli istanti  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  in cui la macchina inizia la lavorazione del lavoro  $i$ -esimo, in modo da ottimizzare un opportuno criterio.

Avendo introdotto le variabili  $t_i$  indicanti gli istanti di tempo in cui la macchina inizia a processare l' $i$ -esimo lavoro, formulare un problema di scheduling significa determinare i vincoli sulle variabili  $t_i$  in modo che esse rappresentino sequenze effettivamente realizzabili sulla macchina.

#### Formulazione.

– *Variabili.* Introduciamo formalmente le seguenti variabili: per indicare se il lavoro  $i$  precede il lavoro  $j$  o viceversa, per ogni  $1 \leq i < j \leq n$ , si introducono le

variabili 0 – 1 così definite

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro } i \text{ precede il lavoro } j \\ 0 & \text{se il lavoro } j \text{ precede il lavoro } i. \end{cases}$$

Si introducono, inoltre, le variabili temporali  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  indicanti gli istanti di tempo di inizio dei lavori.

– *Vincoli*. Come già osservato, la macchina ha capacità unitaria e deve completare un lavoro prima di iniziare un altro. Quindi uno solo dei due vincoli “il lavoro  $i$ -esimo precede il lavoro  $j$ -esimo”, oppure “il lavoro  $j$ -esimo precede il lavoro  $i$ -esimo” deve essere soddisfatto.

Se il lavoro  $i$  è iniziato sulla macchina prima del lavoro  $j$ , si deve avere

$$t_j \geq t_i + p_i.$$

Se invece il lavoro  $j$  inizia prima del lavoro  $i$ , allora si deve avere

$$t_i \geq t_j + p_j.$$

Si devono, quindi, esplicitare le seguenti condizioni logiche:

$$y_{ij} = 1 \Rightarrow t_i - t_j \leq -p_i \quad (8.4.1)$$

$$y_{ij} = 0 \Rightarrow t_j - t_i \leq -p_j. \quad (8.4.2)$$

Se  $M$  è un limite superiore sia per  $t_i - t_j + p_i$  sia per  $t_j - t_i + p_j$ , allora usando la (8.3.1), le condizioni (8.4.1) e (8.4.2) possono essere rispettivamente modellate dai vincoli

$$t_i - t_j + p_i \leq M(1 - y_{ij}) \quad 1 \leq i < j \leq n \quad (8.4.3)$$

$$t_j - t_i + p_j \leq M y_{ij} \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (8.4.4)$$

Infatti se  $y_{ij} = 1$  la (8.4.3) esprime la condizione che la lavorazione del lavoro  $j$  può iniziare solo dopo il completamento del lavoro  $i$  mentre la (8.4.4) è sempre soddisfatta (per la scelta di  $M$ ) e quindi non introduce ulteriori restrizioni. Se  $y_{ij} = 0$ , allora la (8.4.4) esprime la condizione che la lavorazione del lavoro  $i$  può iniziare solo dopo il completamento del lavoro  $j$ , mentre la (8.4.3) è sempre soddisfatta e quindi non introduce alcuna ulteriore restrizione. La (8.4.3) e la (8.4.4) sono di solito chiamati *vincoli di sequenziamento*.

Si devono inoltre esplicitare i vincoli di non negatività sulle variabili  $t_i$ , cioè

$$t_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n.$$

Si può riassumere quanto fino ad ora esposto nel seguente risultato:

**Teorema 8.4.1** *Se un vettore  $(t, y)^T$  con  $t \in \mathbb{R}^n$  ed  $y \in \{0, 1\}^{n \times n}$  soddisfa il sistema*

$$\begin{cases} t_i - t_j + p_i \leq M(1 - y_{ij}) \\ t_j - t_i + p_j \leq My_{ij} \end{cases} \quad 1 \leq i < j \leq n$$

*allora ciascuna componente del vettore  $t$  rappresenta un istante ammissibile di inizio processamento per il corrispondente lavoro. Viceversa, per ogni vettore ammissibile  $t$  esiste sicuramente un vettore  $y$  (che rappresenta l'ordine di processamento dei lavori sulla macchina) tale che il vettore  $(t, y)$  è ammissibile per il precedente sistema di vincoli.*

Naturalmente possono essere facilmente inseriti nel modello vincoli di precedenza o altre restrizioni temporali aggiungendo vincoli lineari sulle variabili  $t$  ed  $y$ .

– *Funzione obiettivo.* Nei problemi di scheduling la funzione obiettivo è di solito costruita in modo da ottimizzare un opportuno criterio. Analizziamo, ora, due dei criteri più diffusi:

- a) *Tempo medio di permanenza nel sistema.*

Ogni istante  $t_i$  può essere, infatti, anche interpretato come tempo di attesa nel sistema del lavoro  $i$  prima di essere processato. Quindi, il tempo medio di permanenza nel sistema può essere scritto

$$\frac{\sum_{i=1}^n (t_i + p_i)}{n}.$$

- b) *Tempo complessivo di utilizzazione della macchina.*

Questo criterio è significativo nel caso dell'uso di più macchine, perché nel caso di una sola macchina questo tempo complessivo è noto; infatti esso è dato da  $\sum_{i=1}^n p_i$ . Tuttavia anche in questo caso esso è esprimibile come nel caso generale cioè nella forma

$$\max_{1 \leq i < j \leq n} (t_i + p_i).$$

Si osservi che questa funzione obiettivo da minimizzare è di tipo “max” e quindi non è lineare.

Analizziamo, ora, un semplice esempio di problema di scheduling.

**Esempio 8.4.1** *Sia data una macchina a capacità unitaria che deve effettuare tre lavori aventi tempo di processamento  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 4$ . Formulare il problema di scheduling che consenta di determinare la sequenza che minimizza il tempo medio di permanenza nel sistema, tenendo conto che, se il primo lavoro precede il secondo, l'inizio del terzo lavoro deve aspettare un tempo  $\Delta_3 = 2$  dopo*

il termine del secondo lavoro, mentre, se il terzo lavoro precede il primo, l'inizio del secondo deve attendere un tempo  $\Delta_2 = 3$  dopo il termine del primo lavoro.

### Formulazione.

Formuliamo questo problema come appena esposto nel caso generale.

– *Variabili.* Introduciamo tre variabili continue  $t_1, t_2, t_3$ , indicanti gli istanti di inizio dei lavori sulla macchina e tre variabili 0 – 1 per esprimere i vincoli di sequenziamento così definite:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro } i \text{ precede il lavoro } j \\ 0 & \text{se il lavoro } j \text{ precede il lavoro } i \end{cases} \quad 1 \leq i < j \leq 3.$$

– *Vincoli di sequenziamento.* Introducendo una costante positiva  $M$  che sia una limitazione superiore per  $t_i - t_j + p_i$  e per  $t_j - t_i + p_j$ , i vincoli di sequenziamento possono essere scritti

$$\begin{aligned} t_1 - t_2 + 2 &\leq M(1 - y_{12}) \\ t_2 - t_1 + 3 &\leq My_{12} \\ t_1 - t_3 + 2 &\leq M(1 - y_{13}) \\ t_3 - t_1 + 4 &\leq My_{13} \\ t_2 - t_3 + 3 &\leq M(1 - y_{23}) \\ t_3 - t_2 + 4 &\leq My_{23} \end{aligned}$$

– *Altri vincoli.* Gli altri vincoli di attese reciproche possono essere rappresentati utilizzando le variabili binarie precedentemente introdotte e la costante positiva  $M$ .

$$\begin{aligned} t_2 + 3 + 2 - t_3 &\leq M(1 - y_{12}) \\ t_1 + 2 + 3 - t_2 &\leq My_{13} \end{aligned}$$

Inoltre, si devono esplicitare i vincoli di non negatività

$$t_1 \geq 0 \quad t_2 \geq 0 \quad t_3 \geq 0.$$

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è data dal tempo medio di permanenza nel sistema e quindi può essere scritta

$$\frac{1}{3}(t_1 + 2 + t_2 + 3 + t_3 + 4).$$

La formulazione finale sarà quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3 + 9) \\ t_1 - t_2 + 2 \leq M(1 - y_{12}) \\ t_2 - t_1 + 3 \leq My_{12} \\ t_1 - t_3 + 2 \leq M(1 - y_{13}) \\ t_3 - t_1 + 4 \leq My_{13} \\ t_2 - t_3 + 3 \leq M(1 - y_{23}) \\ t_3 - t_2 + 4 \leq My_{23} \\ t_2 + 3 + 2 - t_3 \leq M(1 - y_{12}) \\ t_1 + 2 + 3 - t_2 \leq My_{13} \\ t_1 \geq 0 \quad t_2 \geq 0 \quad t_3 \geq 0 \\ y_{12} \in \{0, 1\}, \quad y_{13} \in \{0, 1\}, \quad y_{23} \in \{0, 1\}. \end{array} \right.$$

□



# 9

---

# *Teoria della Programmazione Lineare Intera*

## 9.1 INTRODUZIONE

Come visto precedentemente, molti problemi particolarmente importanti dal punto di vista applicativo sono riconducibili alla soluzione di un Problema di Programmazione Intera. In generale un Problema di Programmazione Intera può essere descritto nella seguente maniera:

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P \\ x \in \mathbf{Z}^n, \end{cases}$$

dove  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  è un generico poliedro e  $\mathbf{Z}^n$  indica l'insieme dei vettori  $n$ -dimensionali a componenti intere. Quindi l'insieme ammissibile del precedente problema è costituito dai soli vettori a componenti intere contenuti nel dato poliedro  $P$  (si veda come esempio la Figura 9.1.1). Intuitivamente sembrerebbe che un possibile modo per affrontare i problemi di Programmazione Lineare Intera sia quello di trascurare il vincolo di interezza sulle componenti del vettore  $x$ , di risolvere, quindi, il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P \\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

ottenendo come soluzione il punto  $\hat{x}$  e, infine, di scegliere un vettore a componenti intere “vicino” al punto  $\hat{x}$  (cioè un vettore che si ottiene da  $\hat{x}$  sostituendo le sue componenti non intere con degli interi “vicini”).

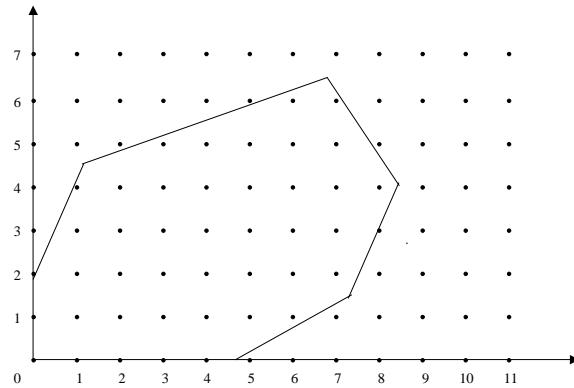


Figura 9.1.1 Esempio di un Problema di Programmazione Lineare Intera

Tale strategia, in alcuni casi permette di ottenere una buona approssimazione di una soluzione  $x^*$  del problema di Programmazione Lineare Intera di partenza. Tuttavia, in generale, può essere non utilizzabile o non efficiente.

Infatti, in molti casi, i punti ottenuti dal precedente arrondamento delle componenti non intere del vettore  $\hat{x}$  possono *non appartenere all'insieme ammissibile* del problema Programmazione Lineare Intera e quindi possono non aver nessun significato dal punto di vista applicativo. Un esempio di questo tipo è descritto nella Figura 9.1.2 (dove le linee tratteggiate sono le linee di livello della funzione obiettivo, supponendo che la direzione di decrescita sia orientata concordemente con la direzione dell'asse delle  $x$ ), in cui si può notare che tutti i punti a componenti intere vicini a  $\hat{x}$  non sono contenuti nel poliedro che definisce l'insieme ammissibile del problema.

Per superare la precedente difficoltà, si può scegliere, come approssimazione della soluzione  $x^*$  del problema di Programmazione Lineare Intera, un punto intero *ammissibile* “vicino” al punto  $\hat{x}$ . Tuttavia, può capitare che questi punti interi ammissibili siano delle *pessime approssimazioni* delle soluzioni suluzioni del problema di partenza. Questo tipo di situazione è descritta dalla Figura 9.1.3 (anche in questa figura le linee tratteggiate sono le linee di livello della funzione obiettivo, supponendo che la direzione di decrescita sia orientata concordemente con la direzione dell'asse delle  $x$ ), in cui si può osservare che tutti i punti interi ammissibili vicini a  $\hat{x}$  sono molto distanti da  $x^*$ .

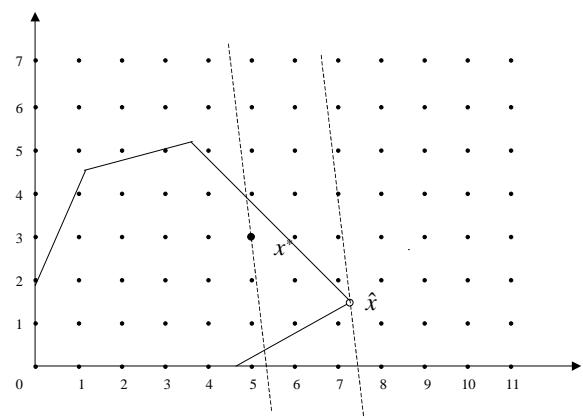


Figura 9.1.2 Esempio di soluzione per arrotondamento

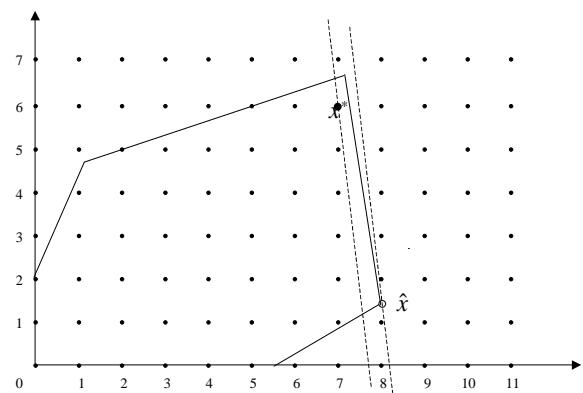


Figura 9.1.3 Esempio di soluzione per arrotondamento

Da quanto detto, emerge chiaramente la necessità di cercare di sviluppare dei metodi per affrontare i problemi di Programmazione Lineare Intera che considerino direttamente la presenza del vincolo che le componenti del vettore  $x$  siano intere.

## 9.2 PRELIMINARI

In questo paragrafo esaminiamo brevemente un importante concetto riguardante in generale i problemi di Programmazione Matematica; questo concetto sarà poi molto utilizzato nei prossimi paragrafi in relazione ai Problemi di Programmazione Lineare Intera.

A questo scopo, si considerino i seguenti problemi di Programmazione Matematica

$$(P) \quad \begin{cases} \min f(x) \\ x \in X \end{cases} \quad (PR) \quad \begin{cases} \min g(x) \\ x \in Y \end{cases}$$

con  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  e  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Definizione 9.2.1 RILASSAMENTO

*Il problema (PR) si dice rilassamento del problema (P) se risulta*

- a)  $X \subseteq Y$
- b)  $g(x) \leq f(x) \quad \text{per ogni } x \in X$

Naturalmente dalla a) e dalla b) si ottiene immediatamente  $\min_{x \in Y} g(x) \leq \min_{x \in X} f(x)$ .

**Teorema 9.2.1** *Sia (PR) un rilassamento del problema (P) e sia  $x^* \in Y$  soluzione ottima del problema rilassato (PR). Se  $x^* \in X$  e  $f(x^*) = g(x^*)$  allora  $x^*$  è soluzione ottima di (P).*

*Dimostrazione:* Se  $x^*$  soluzione ottima del problema (PR) e se  $x^* \in X$  allora si vuole dimostrare che  $x^*$  deve essere ottima anche per il problema (P); infatti se non lo fosse, esisterebbe  $\bar{x} \in X$  tale che  $f(\bar{x}) < f(x^*)$ . Poiché  $X \subseteq Y$ , si ha che  $\bar{x} \in Y$  e per la b) risulta

$$g(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) < f(x^*) = g(x^*)$$

e quindi il punto  $\bar{x}$  sarebbe tale che  $g(\bar{x}) < g(x^*)$  contraddicendo l'ottimalità di  $x^*$  per il problema (PR).  $\square$

**Osservazione 9.2.2** In generale se si hanno due problemi del tipo

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in X \end{cases} \quad \begin{cases} \min f(x) \\ x \in Y \end{cases}$$

(cioè con la stessa funzione obiettivo), se risulta  $X \subseteq Y$  allora il secondo problema è un rilassamento del primo e naturalmente vale  $\min_{x \in Y} f(x) \leq \min_{x \in X} f(x)$

### 9.3 RELAZIONI TRA PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA E PROGRAMMAZIONE LINEARE

Consideriamo un problema di Programmazione Lineare Intera

$$(PLI) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0, \quad \text{intero} \end{cases}$$

e il problema di Programmazione Lineare ottenuto dal problema (PLI) eliminando il vincolo di interezza sulle variabili, cioè il problema

$$(PL) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Poiché risulta che

- a) l'insieme ammissibile di (PLI) è incluso nell'insieme ammissibile di (PL), cioè

$$\{x \in \mathbf{Z}^n \mid Ax \geq b, x \geq 0\} \subseteq \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$$

- b) le funzioni obiettivo dei due problemi coincidono

allora il problema (PL) è un *rilassamento* del problema (PLI) (nel senso specificato dalla Definizione 9.2.1) e prende nome di *rilassamento continuo o lineare*. Naturalmente se  $x^*$  è soluzione ottima del problema (PLI) e  $y^*$  è soluzione ottima del rilassamento (PL), allora risulta  $c^T y^* \leq c^T x^*$ .

Il Teorema 9.2.1 si particolarizza facilmente al caso dei problemi (PLI) e (PL) come espresso nelle seguenti proposizioni.

**Proposizione 9.3.1** *Se una soluzione ottima del problema rilassato (PL) è intera, allora essa è soluzione ottima del problema intero (PLI).*

**Proposizione 9.3.2** *Sia  $\hat{x}$  una soluzione ottima (non necessariamente a componenti intere) del problema rilassato (PL) e sia  $\tilde{x}$  un punto ammissibile per il problema intero (PLI). Se  $c^T \hat{x} = c^T \tilde{x}$  allora il punto  $\tilde{x}$  è una soluzione ottima del problema intero (PLI).*

Le dimostrazioni della precedenti proposizioni discendono immediatamente dal Teorema 9.2.1.

#### 9.4 FORMULAZIONI LINEARI DI PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA

Il questo paragrafo verrà messo in evidenza che ci sono più poliedri in grado di identificare (cioè di separare dagli altri) i punti interi che costituiscono l'insieme ammissibile di un problema di Programmazione Lineare Intera. In particolare verrà introdotto il concetto di “formulazione lineare” di un problema di Programmazione Lineare Intera e verrà fornita una caratterizzazione delle diverse formulazioni lineari di uno stesso problema di Programmazione Lineare Intera. Iniziamo considerando il seguente esempio di problema di Programmazione Lineare Intera

$$\begin{cases} \min -x_1 - x_2 \\ 2x_1 - 5x_2 \geq -5 \\ -2x_1 + 2x_2 \geq -1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ intere.} \end{cases} \quad (9.4.1)$$

L'insieme ammissibile di questo problema è costituito dai punti  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  e  $(1,1)$  come si può facilmente dedurre dalla Figura 9.4.1

Se si denota con  $P$  il poliedro del rilassamento lineare del problema (9.4.1) cioè

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - 5x_2 \geq -5, -2x_1 + 2x_2 \geq -1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}, \quad (9.4.2)$$

si può riscrivere il problema nella forma

$$\begin{cases} \min -x_1 - x_2 \\ x \in P \cap \mathbb{Z}^2. \end{cases}$$

Lo stesso insieme ammissibile del problema intero (9.4.1) (formato quindi dai tre punti  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  e  $(1,1)$ ) può essere ottenuto, ad esempio, sostituendo il secondo vincolo del problema intero (9.4.1) con il vincolo  $-x_1 + x_2 \geq 0$  ottenendo così il

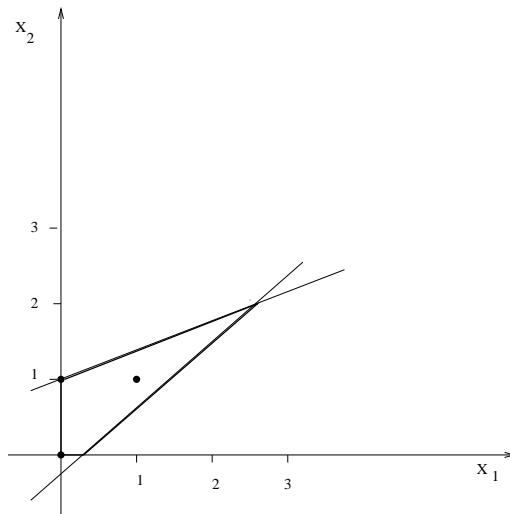


Figura 9.4.1 Regione ammissibile del problema (9.4.1)

seguente problema di Programmazione Lineare Intera

$$\begin{cases} \min -x_1 - x_2 \\ 2x_1 - 5x_2 \geq -5 \\ -x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ intere.} \end{cases} \quad (9.4.3)$$

Con questa sostituzione la regione ammissibile del rilassamento lineare cambia e diventa

$$P' = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - 5x_2 \geq -5, -x_1 + x_2 \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \quad (9.4.4)$$

ma l'insieme ammissibile di questo nuovo problema di Programmazione Lineare Intera (9.4.3) continua ad essere costituito dai soli tre punti  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  e  $(1,1)$  (si veda la Figura 9.4.2); quindi il problema (9.4.3), che può essere riscritto nella forma

$$\begin{cases} \min -x_1 - x_2 \\ x \in P' \cap \mathbb{Z}^2, \end{cases}$$

è equivalente al problema (9.4.1).

Si possono ulteriormente variare i vincoli e ottenere gli stessi punti ammissibili per il problema intero; infatti possiamo, ad esempio, modificare il primo vincolo del problema (9.4.3) sostituendolo con il vincolo  $x_2 \leq 1$ , ottenendo così il seguente problema di Programmazione Lineare Intera

$$\begin{cases} \min -x_1 - x_2 \\ x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ intere.} \end{cases} \quad (9.4.5)$$

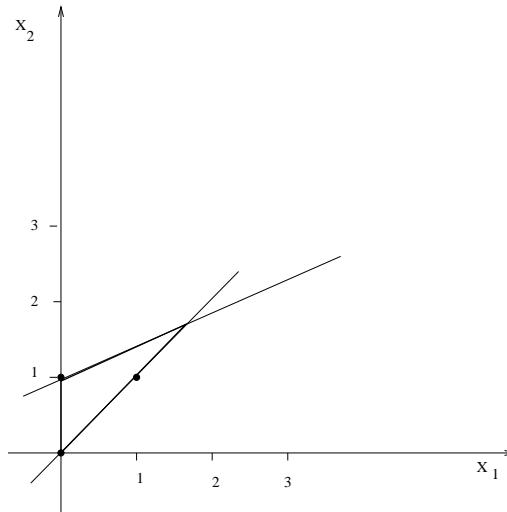


Figura 9.4.2 Regione ammissibile del problema (9.4.3)

Con questa sostituzione la regione ammissibile del rilassamento lineare cambia e diventa

$$P'' = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq 1, -x_1 + x_2 \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \quad (9.4.6)$$

ma l'insieme ammissibile di questo nuovo problema di Programmazione Lineare Intera (9.4.5) continua ad essere costituito dai soli tre punti  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  e  $(1,1)$  (si veda la Figura 9.4.3); quindi il problema (9.4.5), che può essere riscritto nella

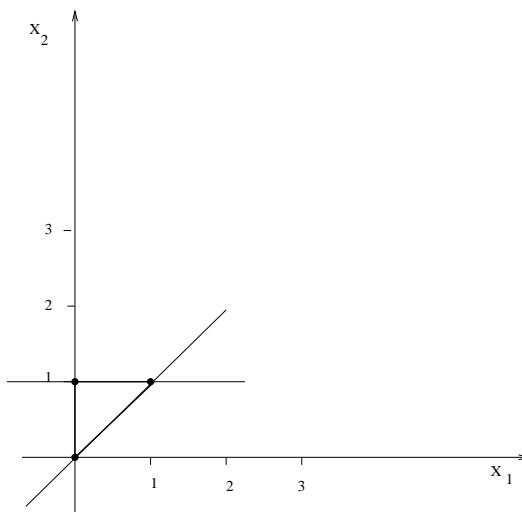


Figura 9.4.3 Regione ammissibile del problema (9.4.5)

forma

$$\begin{cases} \min(-x_1 - x_2) \\ x \in P'' \cap \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

è equivalente al problema (9.4.3).

I tre problemi (9.4.1), (9.4.3), (9.4.5) ora considerati sono equivalenti dal punto di vista della Programmazione Lineare Intera avendo essi la stessa funzione obiettivo e lo stesso insieme ammissibile. Sono però, diverse le rappresentazioni fornite. Questo concetto si può formalizzare nella seguente definizione.

**Definizione 9.4.1 FORMULAZIONE LINEARE**

*Un poliedro  $P$  è una formulazione lineare per un problema di Programmazione Lineare Intera*

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0, \quad \text{intero} \end{cases}$$

se detto

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, \quad x \geq 0, \quad x \text{ intero}\}$$

*l'insieme ammissibile del problema di Programmazione Lineare Intera, risulta*

$$S = P \cap \mathbb{Z}^n.$$

In accordo a questa definizione, i tre problemi poliedri  $P$ ,  $P'$  e  $P''$  rispettivamente definiti in (9.4.2), (9.4.4), (9.4.6) costituiscono formulazioni lineari di uno stesso problema di Programmazione Lineare Intera.

Quindi per una stesso problema di Programmazione Lineare Intera possono esistere più formulazioni lineari; infatti, in generale, definendo due poliedri

$$\bar{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{A}x \geq \bar{b}, \quad x \geq 0\}, \quad \tilde{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{A}x \geq \tilde{b}, \quad x \geq 0\},$$

se risulta  $P \cap \mathbb{Z}^n = \bar{P} \cap \mathbb{Z}^n$ , allora  $\bar{P}$  e  $\tilde{P}$  rappresentano formulazioni per uno stesso problema di Programmazione Lineare Intera. Naturalmente i rilassamenti lineari associati sono diversi; infatti se si considerano i problemi rilassati

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in \bar{P} \end{cases} \quad \begin{cases} \min c^T x \\ x \in \tilde{P} \end{cases}$$

si avranno diversi valori ottimi; siano  $\bar{z}$  e  $\tilde{z}$  rispettivamente i valori ottimi di questi due problemi rilassati; se  $z^*$  è la soluzione ottima del corrispondente problema intero, ovviamente si ha

$$\bar{z} \leq z^* \quad \text{e} \quad \tilde{z} \leq z^*.$$

Quindi in entrambi i casi il valore ottimo dei due rilassamenti fornisce una limitazione inferiore (‘‘lower bound’’) del valore ottimo della soluzione ottima del

problema di Programmazione Lineare Intera. Se inoltre vale  $\bar{P} \subseteq \tilde{P}$  risulta

$$\tilde{z} \leq \bar{z} \leq z^*,$$

e si ha quindi che il primo rilassamento fornisce un “lower bound” più stringente del valore ottimo  $z^*$  e in questo senso è da preferirsi all’altro; questo permette di definire un ordinamento delle formulazioni. In particolare, il concetto di formulazione migliore si può formalizzare nella seguente definizione.

**Definizione 9.4.2** *Date due formulazioni  $P_1$  e  $P_2$  di un problema di Programmazione Lineare Intera, si dice che  $P_1$  è migliore di  $P_2$  se*

$$P_1 \subseteq P_2.$$

La definizione è giustificata dal fatto che, se risulta  $P_1 \subseteq P_2$ , allora la soluzione del rilassamento corrispondente a  $P_1$  approssima meglio il valore dell’ottimo intero. Sulla base di questa definizione è possibile affermare che dato un problema di Programmazione Lineare Intera, può esistere una formulazione “ottima”, cioè una formulazione migliore, nel senso specificato dalla definizione, di qualsiasi altra formulazione lineare del problema di Programmazione Lineare Intera; tale formulazione ottima è costituita dal poliedro contenuto in tutti i poliedri che contengono la regione ammissibile del problema intero. Infatti, formalmente si ha il seguente teorema.

**Teorema 9.4.1** *Sia dato un problema di Programmazione Lineare Intera*

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P \cap \mathbf{Z}^n \end{cases}$$

*con  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$ . Se  $A$  e  $b$  sono a componenti razionali, allora esiste sempre una formulazione ottima costituita da un poliedro  $P^*$  che è il più piccolo insieme convesso che contiene  $P \cap \mathbf{Z}^n$ .*

Se fosse noto il poliedro  $P^*$ , il problema di Programmazione Lineare Intera si potrebbe riformulare come

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P^* \end{cases} \quad (9.4.7)$$

Negli esempi visti nelle pagine precedenti la formulazione  $P''$  data dalla (9.4.6) è la formulazione ottima del problema di Programmazione Lineare Intera (9.4.1). È molto importante notare che il poliedro  $P''$  definito nella (9.4.6) ha tutti vertici a componenti intere. Questo è vero in generale; infatti vale il seguente teorema.

**Teorema 9.4.2** *La formulazione ottima  $P^*$  di un problema di Programmazione Lineare Intera ha tutti i vertici a componenti intere. Viceversa, se un polidero  $P$  ha tutti i vertici interi allora esso costituisce la formulazione ottima di ogni problema di Programmazione Lineare Intera con insieme ammissibile  $P \cap \mathbf{Z}^n$ .*

Sarebbe molto importante conoscere  $P^*$  perché i vertici di  $P^*$  risultano essere tutti a componenti intere e quindi sarebbe sufficiente risolvere (ad esempio con il metodo del simplesso) il problema rilassato (9.4.7) ed ottenere la soluzione del problema di Programmazione Lineare Intera originario.

Questo fatto è di notevole importanza in quanto se si utilizza il metodo del simplesso per risolvere il problema rilassato, la soluzione ottenuta, che è un vertice del poliedro, sicuramente è a componenti intere.

Purtroppo però, tale formulazione ottima in generale non è nota oppure non è utilizzabile per il numero eccessivo dei vincoli (c'è una crescita esponenziale dei vincoli con la dimensione del problema). Tuttavia esistono importanti classi di problemi di Programmazione Lineare Intera per cui tale rappresentazione è nota. In particolare, si può dimostrare che alcune di queste classi sono già descritte attraverso le loro formulazione ottime e che, quindi, il vincolo di interezza può essere trascurato. Una di queste classi è rappresentata dai problemi di assegnamento (si veda paragrafo 8.2.1), per cui è stato possibile notare (cfr. Osservazione 8.2.2) che il vincolo  $x_{ij} \in \{0, 1\}$  del problema di assegnamento poteva essere rilassato con il vincolo  $0 \leq x_{ij} \leq 1$  ottenendo comunque una soluzione ottima a componenti intere, cioè 0–1.

## 9.5 PROPRIETÀ DI INTEREZZA E TOTALE UNIMODULARITÀ

Abbiamo visto come una condizione sufficiente affinché sia possibile trovare una soluzione del problema di PLI risolvendo il suo rilassamento, è che tutti i vertici del rilassamento lineare siano interi. Alcune condizioni che assicurano tale interezza si basano sulla nozione di totale unimodularità che esaminiamo di seguito.

**Definizione 9.5.1** *Una matrice  $A$   $m \times n$  di rango  $m$  si dice unimodulare se ogni sottomatrice quadrata non singolare  $m \times m$  di  $A$  ha determinante pari a 1 o -1. Si dice invece totalmente unimodulare se ogni sottomatrice quadrata non singolare di  $A$  ha determinante pari a 1 o -1.*

Quindi una matrice  $m \times n$  con  $m \leq n$  e rango  $m$  si dice unimodulare se tutte le sue sottomatrici quadrate non singolari di ordine massimo hanno determinante pari a 1 o  $-1$ . Mentre si dice totalmente unimodulare se tutte le sue sottomatrici quadrate (non solo quelle di ordine massimo) non singolari hanno determinante pari a 1 o  $-1$ .

Si riportano di seguito due teoremi che consentono di caratterizzare le proprietà di integralità dei poliedri. Iniziamo con una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice  $A$  a componenti intere definisca per ogni  $b$  intero un poliedro in forma standard con vertici interi.

**Teorema 9.5.1** *Sia  $A$  una matrice  $m \times n$  di rango  $m$  a componenti intere. Allora condizione necessaria e sufficiente affinché il poliedro*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$$

*abbia tutti i vertici interi, per ogni  $b$  intero, è che la matrice  $A$  sia unimodulare.*

Il teorema che segue mostra che per una matrice  $A$  a componenti intere la totale unimodularità è condizione necessaria e sufficiente affinché per ogni vettore  $b$  intero il poliedro

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0\}$$

abbia vertici a componenti intere.

**Teorema 9.5.2** *Sia  $A$  una matrice  $m \times n$  a componenti intere. Allora condizione necessaria e sufficiente affinché il poliedro*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0\}$$

*abbia tutti i vertici interi, per ogni  $b$  intero, è che la matrice  $A$  sia totalmente unimodulare.*

Una ovvia condizione necessaria per la totale unimodularità è che la matrice abbia tutti elementi  $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$  in quanto ogni elemento di  $A$  è una sottomatrice di  $A$  di ordine 1. Non è però una condizione sufficiente, infatti basta scegliere banalmente una matrice del tipo  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  con determinante pari a 2.

Si osservi comunque che la definizione di totale unimodularità non ha un'applicazione pratica. Infatti richiederebbe il calcolo di tutti i determinanti di tutte

le sue sottomatrici quadrate. Quindi è opportuno fornire una caratterizzazione alternativa della totale unimodularità che sia verificabile in tempo polinomiale. A tale scopo si riporta di seguito una condizione sufficiente per matrici che hanno elementi pari a 0, 1 o  $-1$ . Vale infatti il seguente risultato:

**Teorema 9.5.3** *Sia  $A$  una matrice  $m \times n$  con elementi  $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ . Allora  $A$  è totalmente unimodulare se*

1. *ogni colonna abbia al più due elementi diversi da zero.*
2. *è possibile partizionare gli indici di riga in due sottoinsiemi  $Q_1$  e  $Q_2$  tali che:*
  - (i) *se la colonna  $j$  contiene due elementi  $a_{ij} \neq 0$  e  $a_{kj} \neq 0$  dello stesso segno allora  $i \in Q_1$  e  $k \in Q_2$ ;*
  - (ii) *se la colonna  $j$  contiene due elementi  $a_{ij} \neq 0$  e  $a_{kj} \neq 0$  di segno opposto allora o  $i, k \in Q_1$  oppure  $i, k \in Q_2$ .*

*Dimostrazione:* La dimostrazione procede per induzione. Ovviamente ogni sottomatrice di  $A$  con un solo elemento ha determinante pari a 0, 1 o  $-1$ . Supponiamo ora che tutte le sottomatrici di  $A$  di ordine  $r \leq k - 1$  abbiano determinante pari a 0, 1 o  $-1$  e dimostriamo che questo è vero anche per tutte le sottomatrici di ordine  $k$ .

Sia  $C$  una qualsiasi sottomatrice di ordine  $k$ :

- se  $C$  contiene un vettore nullo allora il suo determinante è nullo;
- se  $C$  contiene una colonna con un solo elemento  $a_{ij} \neq 0$  allora il suo determinante è pari al prodotto di  $a_{ij}$  per il suo complemento algebrico. Ora, poiché  $|a_{ij}| = 1$  e, per ipotesi induttiva, il complemento algebrico può assumere solo valori in  $\{0, 1, -1\}$ , allora anche il determinante di  $C$  può assumere valori solo in  $\{0, 1, -1\}$ ;
- rimane il caso in cui ogni colonna di  $C$  contiene due elementi non nulli. Per l'ipotesi (ii), per ogni colonna  $j$  si ha

$$\sum_{i \in Q_1} a_{ij} = \sum_{i \in Q_2} a_{ij}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (9.5.1)$$

Sia ora  $d_i$  la  $i$ -esima riga di  $C$ . Dalla precedente equazione (9.5.1) si ha

$$\sum_{i \in Q_1} d_i - \sum_{i \in Q_2} d_i = 0,$$

ovvero una combinazione lineare di righe vale zero. Ma allora il determinante di  $C$  è nullo e questo conclude la dimostrazione.

□

**Esempio 9.5.2** Applicando il Teorema 9.5.3 verifichiamo se la seguente matrice è totalmente unimodulare.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sono verificate le ipotesi del Teorema 9.5.3. Esiste una partizione degli indici di riga,  $Q_1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $Q_2 = \{4, 5, 6\}$ , che soddisfa le condizioni (i) (ii), quindi la matrice è totalmente unimodulare.

**Osservazione 9.5.3** Si osservi che la condizione espressa dal Teorema 9.5.3 è una *condizione sufficiente*. Questo vuol dire che esistono matrici con elementi in  $\{0, 1, -1\}$  totalmente unimodulari che non soddisfano le ipotesi 1 e 2 del Teorema 9.5.3. Tuttavia è possibile dimostrare che per le matrici con elementi in  $\{0, 1, -1\}$  che soddisfano la condizione 1 del Teorema 9.5.3 la condizione 2 dello stesso teorema è anche necessaria.

**Esempio 9.5.4** Applicando quanto espresso nell'Osservazione 9.5.3 verifichiamo se la seguente matrice è totalmente unimodulare.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli elementi sono tutti 0, 1. Inoltre, la condizione 1 è verificata, poiché ogni colonna di  $A$  ha al più due elementi non nulli. Cerchiamo di costruire la partizione degli indici di riga. Se la riga 1  $\in Q_1$  allora la riga 2  $\in Q_2$ , ma la riga 3 non può stare né in  $Q_1$  per l'elemento  $a_{12}$  né in  $Q_2$  per l'elemento  $a_{13}$ . Quindi la matrice non è totalmente unimodulare.

# 10

## *Metodi generali per la soluzione di problemi di PLI*

Per la soluzione di problemi di PLI non esistono metodi universalmente efficienti. Molto spesso è necessario utilizzare algoritmi “ad hoc” che siano in grado di sfruttare la particolare struttura del problema. Esistono però dei metodi applicabili ad una larga classe di problemi di PLI. Essi sono il metodo del “Branch and Bound” ed il metodo dei piani di taglio. In questo paragrafo verrà descritta in dettaglio la tecnica del “Branch and Bound”. Preliminarmente, mettiamo subito in evidenza il fatto che un problema di Programmazione Lineare Intera risulta, in generale, molto più difficile da risolvere di un problema di Programmazione Lineare; questo è vero anche se il problema intero ha tutte le variabili 0–1.

Consideriamo un problema di Programmazione Lineare Intera,

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0, \text{ intero.} \end{cases} \quad (\text{PLI})$$

Nel trattare i metodi per la soluzione di problemi di Programmazione Lineare Intera faremo la seguente ipotesi sulla regione ammissibile del problema (PLI):

**Assunzione A:** la regione ammissibile è costituita da un numero finito di punti

Questa assunzione non è restrittiva soprattutto in relazione al fatto che nella realtà i problemi che si formulano verificano intrinsecamente questa assunzione. Naturalmente questa assunzione implica che la formulazione del problema è rappresentata da un politopo.

Vediamo ora alcune tecniche che possono essere utilizzate (alcune solo in linea teorica) per risolvere un generico problema di Programmazione Lineare Intera.

### 10.1 ENUMERAZIONE TOTALE

Abbiamo avuto modo di far notare più volte che in problema di Programmazione Lineare 0–1 una soluzione ottima può essere determinata teoricamente enumeran-tutte le possibili soluzioni ammissibili; in linea di principio, sarebbe possibile enumerare tutti i vettori binari a  $n$  componenti, (verificarne l'ammissibilità) e determinare quelli ammissibili selezionando quelli corrispondenti al valore più basso della funzione obiettivo. Nell'ipotesi che l'Assunzione A sia soddisfatta, questa tecnica di enumerazione totale è teoricamente possibile anche per risolvere un problema di Programmazione Lineare Intera. Purtroppo però, ciò è possibile solo per problemi di dimensioni molto ridotte in quanto c'è una crescita esponenziale dei vettore da esaminare con il numero delle variabili del problema.

Si osservi che un algoritmo di questo tipo (enumerativo) non potrebbe essere assolutamente applicato al caso di un problema di Programmazione Lineare in quanto l'insieme ammissibile in questo caso è non numerabile. Tuttavia, nonostante ciò, come è noto, per la Programmazione Lineare esistono algoritmi (non enumerativi) che permettono di risolvere problemi di Programmazione Lineare a grandi dimensioni, mentre per la Programmazione Lineare Intera non esistono algoritmi in grado di risolvere qualunque problema con tempi di calcolo che non crescono con rapidità esponenziale al crescere dimensione del problema.

In conclusione, possiamo affermare che l'enumerazione totale non rappresenta una tecnica praticabile se non in rari casi di problemi con un numero molto basso di variabili.

### 10.2 SOLUZIONE APPROXIMATA PER ARROTONDAMENTO

Come descritto precedentemente, questa strategia si basa sull'idea di risolvere il problema rilassato, cioè il rilassamento lineare, e poi approssimare la soluzione non intera al punto a componenti intere “più vicino”. Questa strategia sembrerebbe avere senso soprattutto se ci si aspetta che le variabili assumano valori abbastanza grandi (ad esempio, se si considera la produzione di bene in una azienda costruttrice che si aggira intorno alle 10000 unità mensili, in questo caso se si ha un valore frazionario pari ad esempio a 9837.8 è verosimile “arrotondarlo” a 9838). Anche se si perde l'ottimalità della soluzione, la soluzione “arrotondata” potrebbe avere senso.

Come detto, questa strategia non è in generale una buona strategia. Soprattutto quando le variabili assumono valori relativamente piccoli; in questo caso una siffatta strategia può risultare completamente errata; questo è vero soprattutto in

relazione a problemi di Programmazione Lineare 0–1; in questi problemi le variabili 0–1 indicano scelte alternative e ogni arrotondamento può essere totalmente privo di senso.

Come ulteriore esempio di una situazione che può verificarsi effettuando un arrotondamento della soluzione si può considerare l'Esempio 9.4.1 già visto. L'insieme ammissibile di questo problema intero è costituito dai punti  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 1)$ . La soluzione ottima del problema rilassato è nel punto  $(5/2, 2)$  con valore  $9/2$ . Arrotondando la componente non intera sia per eccesso, sia per difetto, si ottengono punti che non sono ammissibili e quindi non utilizzabili.

Tuttavia anche nel caso in cui si possa trovare un punto ammissibile "vicino" al punto di ottimo del rilassamento lineare in realtà può accadere che tale punto può essere anche molto "lontano" dalla soluzione ottima intera.

### 10.3 LA TECNICA DEL "BRANCH AND BOUND"

Si vuole ora esaminare una particolare tecnica che è molto utilizzata per la soluzione di problemi di Programmazione Lineare Intera. Abbiamo già visto che una possibile, semplice tecnica di risoluzione di un problema di Programmazione Lineare Intera, purtroppo quasi mai utilizzabile in pratica, è l'enumerazione totale. Il "Branch and Bound" (BB), invece, è una metodologia di ricerca della soluzione ottima che effettua un'esplorazione *parziale* dell'insieme delle soluzioni ammissibili. In particolare la funzione obiettivo viene calcolata per una sottoinsieme di cardinalità abbastanza piccola delle soluzioni ammissibili con la proprietà di contenere almeno una soluzione ottima.

Per descrivere in dettaglio questa tecnica facciamo riferimento al generico problema di Programmazione Lineare Intera

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0, \text{ intero} \end{cases} \quad (10.3.1)$$

che può essere riscritto nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in S \end{cases}$$

dove  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, x \geq 0, \text{ intero}\}$  è l'insieme ammissibile che per l'Assunzione A ha cardinalità finita e quindi il problema non può essere illimitato inferiormente. Indicheremo con  $x^*$  l'ottimo del problema (10.3.1) e con  $z^* = c^T x^*$  il suo valore ottimo corrispondente.

La strategia che è alla base della tecnica del "branch and bound" è la decomposizione del problema originario (10.3.1) in sottoproblemi. Questo viene realizzato

effettuando una partizione dell'insieme ammissibile  $S$  in una famiglia  $\{S_1, \dots, S_q\}$  di sottoinsiemi di  $S$  con  $q \geq 2$ , cioè tali che

$$S_i \cap S_j = \emptyset \quad \text{per ogni coppia} \quad 1 \leq i < j \leq r$$

e

$$\bigcup_{i=1}^q S_i = S.$$

A seguito di questa partizione si possono considerare  $q$  sottoproblemi (che indichiamo con  $Prob^{(i)}$ ) del tipo

$$\begin{cases} \min_{x \in S_i} c^T x & i = 1, \dots, q. \end{cases} \quad (Prob^{(i)})$$

Ora, se  $x^{(i)}$  è l'ottimo dell' $i$ -esimo sottoproblema  $Prob^{(i)}$  e  $z^{(i)} = c^T x^{(i)}$  il valore ottimo corrispondente, si ha che la soluzione ottima del problema originario è data dalla  $x^{(i)}$  corrispondente al minimo tra i valori  $z^{(i)} = c^T x^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, q$ . Identificando il problema originario (10.3.1) con il problema  $Prob^{(0)}$  e il suo insieme ammissibile  $S$  con  $S_0$  si può dire che i nuovi problemi generati  $Prob^{(1)}, \dots, Prob^{(q)}$  sono *“figli”* del problema *“padre”*  $Prob^{(0)}$ .

Se un sottoproblema  $Prob^{(i)}$  dovesse risultare, a sua volta, di difficile soluzione si partiziona ulteriormente l'insieme  $S_i$  producendo nuovi sottoproblemi (figli) ed iterando la procedura fino a che il problema originario non risulti decomposto in problemi elementari di facile soluzione. Si osservi che questa generazione progressiva di sottoproblemi (figli) produce un *albero genealogico* detto *albero di enumerazione*.

In generale però, risolvere un sottoproblema può essere difficile tanto quanto risolvere il problema originario ed è per questo motivo che invece della soluzione esatta del problema  $Prob^{(i)}$  si preferisce calcolare una limitazione inferiore *“lower bound”*  $L_i$  di  $z^{(i)}$  e cioè un valore  $L_i \leq z^{(i)}$ . Tale valore viene poi confrontato, ad un certo passo della procedura, con il miglior valore della funzione obiettivo trovato fino a quel momento che chiameremo *valore ottimo corrente* e indicheremo con  $\tilde{z}$ . Se il lower bound trovato  $L_i$  risulta non inferiore a quello del valore ottimo corrente, ovvero se

$$\tilde{z} \leq L_i \leq z^{(i)}$$

allora nell'insieme  $S_i$  non esiste un punto in cui la funzione obiettivo abbia un valore migliore (cioè minore) di  $\tilde{z}$ . Questo permette di sospendere l'esame del sottoproblema  $Prob^{(i)}$  senza risolverlo e di non considerarlo ulteriormente nella soluzione del problema originario.

Da quanto detto emerge che la tecnica del *“branch and bound”* è caratterizzata da due fasi principali:

## i) FASE DI "BOUNDING"

Calcolo dei "lower bound" dei sottoproblemi allo scopo di acquisire l'informazione necessaria per capire se scartare o meno un sottoproblema.

## ii) FASE DI "BRANCHING"

Generazione di sottoproblemi e quindi dell'albero di enumerazione.

È importante osservare che entrambi le fasi devono essere realizzabili attraverso procedure efficienti. Inoltre il numero dei sottoproblemi generati deve essere estremamente limitato affinché la strategia nel suo complesso risulti efficiente.

Riportiamo, ora, uno schema algoritmico che implementa il metodo del "branch and bound". Indicheremo con  $\mathcal{L}$  l'insieme dei sottoproblemi candidati (generati nelle varie fasi di branching) che devono ancora essere analizzati; tali sottoproblemi vengono detti *aperti*. Con  $\tilde{z}$  indicheremo il *valore ottimo corrente* e con  $\tilde{x}$  la *soluzione ottima corrente* che vengono dapprima inizializzati e poi aggiornati nel corso dell'algoritmo non appena vengono individuate soluzioni ammissibili per il problema originario "migliori" cioè con valori inferiori della funzione obiettivo. Per ciascun problema  $Prob^{(i)} \in \mathcal{L}$  indicheremo con  $L_i$  il valore di un "lower bound" e con  $\bar{x}^{(i)}$  un vettore in corrispondenza del quale è raggiunto questo "lower bound", cioè un vettore  $\bar{x}^{(i)}$  tale che risulti  $L_i = c^T \bar{x}^{(i)}$ .

## Metodo del "Branch and Bound"

### Inizializzazione

- Si inizializzano  $\tilde{z}$  e  $\tilde{x}$  determinando una soluzione ammissibile (facile da calcolare) del problema originario. Naturalmente risulta  $\tilde{z} \geq z^*$ . Se tale soluzione  $\tilde{x}$  non è facile da individuare si lascia per ora non definito  $\tilde{x}$  e si pone  $\tilde{z} = +\infty$ .
- Si applica una *strategia di "bounding"* per determinare un "lower bound"  $L_0$  del valore ottimo del problema  $Prob^{(0)}$  e un vettore  $\bar{x}^{(0)}$  in corrispondenza del quale si ha  $L_0 = c^T \bar{x}^{(0)}$ .
  - Se  $\bar{x}^{(0)} \in S_0$  oppure  $L_0 = \tilde{z}$ , l'algoritmo termina; nel primo caso si ha che la soluzione ottima del problema originario è  $\bar{x}^{(0)}$ , nel secondo tale soluzione ottima è l'ottimo corrente  $\tilde{x}$ .
  - Altrimenti si applica una *strategia di "branching"* per generare nuovi sottoproblemi che vengono inseriti nella lista dei sottoproblemi aperti  $\mathcal{L}$ .

### Iterazione generica

Si esamina la lista  $\mathcal{L}$  dei sottoproblemi aperti. Se  $\mathcal{L} = \emptyset$  si pone  $x^* = \tilde{x}$  e  $z^* = \tilde{z}$  e l'algoritmo termina. Se invece  $\mathcal{L} \neq \emptyset$  si estrae un sottoproblema aperto  $Prob^{(j)}$  dalla lista  $\mathcal{L}$  e si procede come segue:

- si applica una *strategia di “bounding”* per calcolare un “lower bound”  $L_j$  del valore ottimo del sottoproblema  $Prob^{(j)}$  e un vettore  $\bar{x}^{(j)}$  in corrispondenza del quale si ha  $L_j = c^T \bar{x}^{(j)}$ , con la convenzione di porre  $L_j = +\infty$  e chiudendo il problema  $Prob^{(j)}$  se esso risultasse inammissibile.
  - Se  $L_j \geq \tilde{z}$  allora il sottoproblema  $Prob^{(j)}$  viene chiuso in quanto nessuna soluzione “migliore” dell’ottimo corrente può essere contenuta nell’insieme ammissibile del sottoproblema  $Prob^{(j)}$ .
  - Se invece  $L_j < \tilde{z}$  il sottoproblema  $Prob^{(j)}$  potrebbe permettere di migliorare l’ottimo corrente e quindi
    - se  $\bar{x}^{(j)} \in S_j$ , allora  $\bar{x}^{(j)}$  è soluzione ottima del sottoproblema  $Prob^{(j)}$  e poiché si sta considerando il caso  $L_j < \tilde{z}$ , si ha che  $\bar{x}^{(j)}$  è una soluzione ammissibile del problema originario (in quanto  $S_j \subseteq S_0$ ) in cui il valore  $L_j = c^T \bar{x}^{(j)}$  è minore (e pertanto migliore) del valore ottimo corrente. Si aggiorna quindi l’ottimo corrente ponendo  $\tilde{x} = \bar{x}^{(j)}$  e  $\tilde{z} = L_j = c^T \bar{x}^{(j)}$  e si chiude il problema  $Prob^{(j)}$ .
    - se invece  $\bar{x}^{(j)} \notin S_j$  allora si applica una *strategia di “branching”* al problema  $Prob^{(j)}$  in modo da generare nuovi sottoproblemi che vengono inseriti nella lista dei problemi candidati  $\mathcal{L}$ .

Evidentemente la risoluzione del problema originario sarà tanto più efficiente quanto migliori saranno i valori dei “lower bound” ed a loro volta tali valori approssimeranno tanto meglio il valore ottimo del sottoproblema quanto più efficace sarà stata la decomposizione del problema originario. Di conseguenza l’efficienza del metodo del “branch and bound” dipende essenzialmente dalla qualità delle strategie che ne caratterizzano la struttura che sono:

- a) *la strategia di bounding*, ovvero la strategia per determinare i “lower bound” cioè per calcolare un valore che approssimi per difetto il valore ottimo dei sottoproblemi.
- b) *la strategia di branching*, ovvero la strategia per determinare la partizione dell’insieme delle soluzioni ammissibili di un sottoproblema.

- c) la strategia per la scelta del sottoproblema da esaminare, ovvero come decidere, ad ogni iterazione, quale sottoproblema selezionare dalla lista  $\mathcal{L}$  dei problemi aperti.

Ovviamente a seconda della strategia di bounding, di branching e di scelta del sottoproblema da estrarre da  $\mathcal{L}$  adottate, lo schema generale appena descritto si concretizzerà in un algoritmo differente.

Qui di seguito descriveremo alcune delle strategie più utilizzate nella pratica.

### Strategie di "bounding".

Esistono varie strategie per il calcolo dei "lower bound". Per descriverne due delle più utilizzate consideriamo

$$P^i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^i x \geq b^i, x \geq 0\}$$

una possibile formulazione del sottoproblema  $Prob^{(i)}$  che quindi può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P^i \cap \mathbb{Z}^n. \end{cases} \quad (Prob^{(i)})$$

#### 1. Rilassamento lineare.

Un possibile modo di calcolare i "lower bound" è quello di considerare il rilassamento lineare del problema  $Prob^{(i)}$  cioè il problema ottenuto eliminando il vincolo di interezza, ovvero il problema

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P^i \end{cases} \quad (10.3.2)$$

e di porre

$$L_i = c^T \bar{x}^{(i)}$$

dove  $\bar{x}^{(i)}$  è soluzione ottima del rilassamento lineare, cioè del problema (10.3.2). Infatti, come abbiamo già visto nel paragrafo 9.3, il valore ottimo del problema rilassato è sempre minore o uguale al valore ottimo del problema intero  $Prob^{(i)}$  ed inoltre se la soluzione ottima del problema rilassato è intera, allora essa è anche soluzione ottima del problema  $Prob^{(i)}$  (si veda la Proposizione 9.3.1). Si osservi che il problema rilassato è risolubile in maniera molto efficiente (ad esempio con il metodo del simplesso).

#### 2. Rilassamento della formulazione.

Per ottenere un "lower bound" è possibile considerare oltre al rilassamento lineare un qualsiasi altro rilassamento del problema intero  $Prob^{(i)}$ . Infatti, il valore ottimo di qualunque problema del tipo

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P' \end{cases}$$

con  $P'$  poliedro tale che  $S_i \subseteq P'$ , fornisce un “lower bound” per il problema  $Prob^{(i)}$ . È però molto importante notare che il poliedro  $P'$  non è necessariamente una formulazione del problema  $Prob^{(i)}$  e quindi può contenere punti a coordinate intere che non appartengono all’insieme ammissibile  $S_i$  del problema  $Prob^{(i)}$ . Quindi non è più vero che una soluzione ottima intera del problema rilassato è una soluzione ottima del problema intero

### Strategie di “branching”.

Vediamo ora una semplice strategia per separare un generico problema  $Prob^{(i)}$ . Limiteremo la trattazione ad una strategia di tipo binario ovvero ad una strategia che genera sempre due sottoproblemi; nonostante la sua semplicità questa strategia si rivela in pratica molto efficiente.

Supponiamo di aver risolto il rilassamento lineare di  $Prob^{(i)}$  e sia, come già detto,  $\bar{x}^{(i)}$  la sua soluzione ottima e  $L_i = c^T \bar{x}^{(i)}$  il corrispondente valore ottimo.

Se  $\bar{x}^{(i)}$  ha tutte componenti intere allora  $\bar{x}^{(i)} \in S_i$  e quindi è una soluzione ottima del problema  $Prob^{(i)}$  e quindi il problema non va separato, ma chiuso.

Se  $L_i$  è maggiore o uguale al valore ottimo corrente  $\tilde{z}$ , il problema non può dare origine ad un punto in cui il valore della funzione obiettivo sia migliore di quello corrente e non è necessario separarlo per trovare la sua soluzione ottima intera e quindi va chiuso.

Supponiamo quindi che nessuno di questi due casi si sia verificato, cioè  $\bar{x}^{(i)}$  abbia almeno una componente frazionaria e  $L_i < \tilde{z}$ , e vediamo come separare questo sottoproblema  $Prob^{(i)}$ .

Sia  $\bar{x}_k^{(i)}$  una componente non intera del vettore  $\bar{x}^{(i)}$ . Sepriamo il problema  $Prob^{(i)}$  nei seguenti due problemi:

$$Prob^{(i,1)} \left\{ \begin{array}{l} \min c^T x \\ x \in S_i \\ x_k \leq \lfloor \bar{x}_k^{(i)} \rfloor \end{array} \right. \quad \text{e} \quad Prob^{(i,2)} \left\{ \begin{array}{l} \min c^T x \\ x \in S_i \\ x_k \geq \lceil \bar{x}_k^{(i)} \rceil \end{array} \right.$$

dove  $\lfloor \bar{x}_k^{(i)} \rfloor$  indica la sua parte intera inferiore (ossia il più grande intero minore di  $\bar{x}_k^{(i)}$ ) e  $\lceil \bar{x}_k^{(i)} \rceil$  la sua parte intera superiore (ossia il più piccolo intero maggiore di  $\bar{x}_k^{(i)}$ ).  $Prob^{(i,1)}$  è ottenuto da  $Prob^{(i)}$  semplicemente aggiungendo a  $Prob^{(i)}$  il vincolo  $x_k \leq \lfloor \bar{x}_k^{(i)} \rfloor$  e  $Prob^{(i,2)}$  aggiungendo a  $Prob^{(i)}$  il vincolo  $x_k \geq \lceil \bar{x}_k^{(i)} \rceil$ . È facile verificare che l’unione delle regioni ammissibili di questi due problemi coincide con la regione ammissibile  $S_i$  e che la loro intersezione è vuota; abbiamo così realizzato una partizione di  $S_i$ .

### Strategie per la scelta del sottoproblema da esaminare.

Esistono diverse strategie di scelta, tra queste le più usate sono le seguenti:

1. Scelta del sottoproblema con il minimo “lower bound”. Tale scelta ha lo scopo di esaminare per primi quei sottoproblemi in cui è più probabile

trovare una soluzione ottima. Infatti, se la strategia di bounding produce buone approssimazioni dei valori ottimi dei sottoproblemi, a valori bassi del "lower bound" corrisponderanno bassi valori delle soluzioni ottime dei sottoproblemi. Pertanto, esaminando il sottoproblema aperto cui corrisponde il minimo valore del "lower bound" si avrà una maggiore probabilità di individuare la soluzione ottima del problema originario.

2. Scelta con criterio di priorità LIFO (Last In First Out). In questo caso i sottoproblemi da esaminare sono gestiti dalla procedura secondo lo schema a *pila* (*stack*). In particolare, il sottoproblema scelto in  $\mathcal{L}$  è quello che da meno tempo si trova in  $\mathcal{L}$ .
3. Scelta con criterio di priorità FIFO (First In First Out). In questo caso i sottoproblemi da esaminare sono gestiti dalla procedura secondo lo schema a *coda*. In particolare, il sottoproblema scelto in  $\mathcal{L}$  è quello che da più tempo si trova in  $\mathcal{L}$ .

Integrando lo schema algoritmico già esaminato con queste strategie si ottiene un algoritmo effettivamente realizzabile.

Le Figure 10.3.1 e 10.3.2 riassumono con dei diagrammi di flusso i passi fondamentali di un algoritmo *Branch and Bound* per la soluzione del generico problema di PLI

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in S = P \cap \mathbf{Z}^n. \end{cases}$$

che utilizza il *rilassamento lineare* per calcolare i lower bound.

**Osservazione 10.3.1** Se il problema originario è un problema di Programmazione Lineare 0–1, ovvero le variabili del problema possono assumere solo i valori 0 o 1, si può supporre che la formulazione del problema sia contenuta nell'insieme  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_h \leq 1, h = 1, \dots, n\}$ . Quindi ogni componente  $\bar{x}_k^{(i)}$  dell'ottimo  $\bar{x}^{(i)}$  del rilassato lineare del problema  $Prob^{(i)}$  è compresa tra 0 e 1; quindi poiché ovviamente risulta  $\lfloor \bar{x}_k^{(i)} \rfloor = 0$  e  $\lceil \bar{x}_k^{(i)} \rceil = 1$ , i sottoproblemi che eventualmente vengono generati nella fase di "branching" si ottengono ponendo  $x_k = 0$  in uno e  $x_k = 1$  nell'altro.

**Osservazione 10.3.2** Se il problema di Programmazione Lineare Intera in esame è un problema di massimizzazione invece che di minimizzazione (come assunto fino ad ora), la tecnica del "branch and bound" si applica in maniera analoga sostituendo i "lower bound"  $L_i$  con "upper bound"  $U_i$ , ovvero con delle limitazioni superiori del valore ottimo del problema intero. Ovviamente l'"upper bound" associato ad un sottoproblema con regione ammissibile vuota sarà posto per convenzione uguale a  $-\infty$ . Inoltre la chiusura dei sottoproblemi dominati dall'ottimo corrente avverrà nel caso in cui  $U_i \leq \tilde{z}$ .

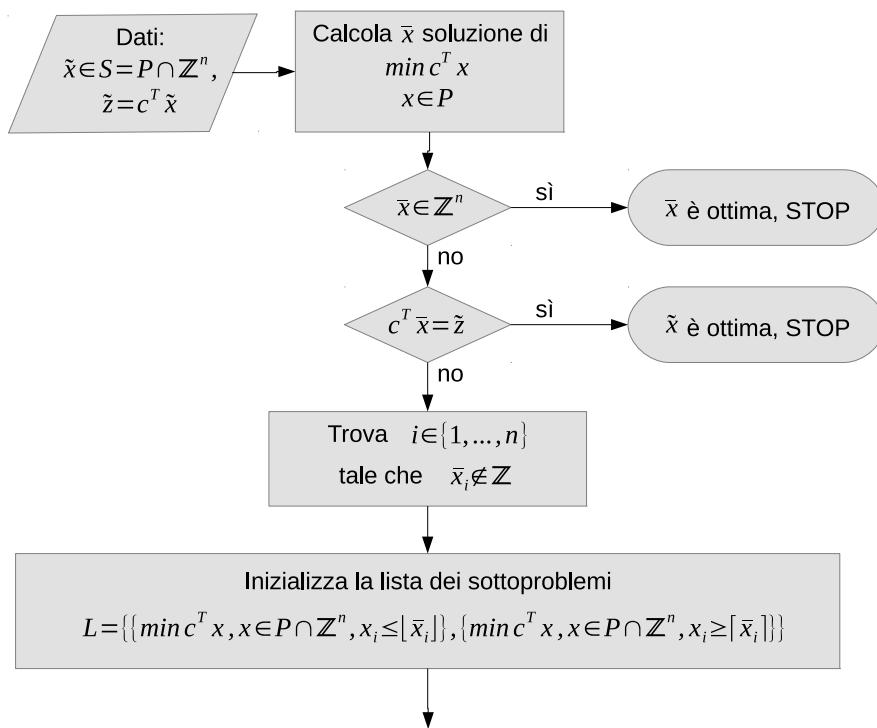


Figura 10.3.1 Inizializzazione del Branch and Bound

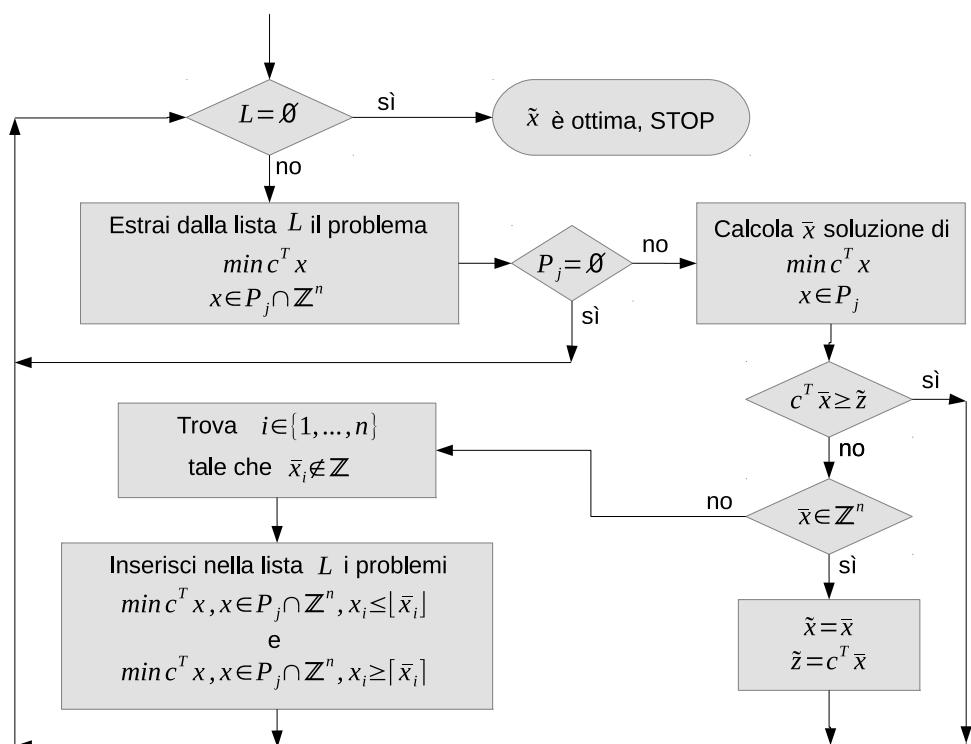


Figura 10.3.2 Generica iterazione del Branch and Bound

Vediamo ora un esempio di applicazione del metodo del “Branch and Bound” appena descritto.

**Esempio 10.3.3** *Sia dato il seguente problema lineare intero:*

$$\begin{cases} \min -2x_1 - 8x_2 \\ -2x_1 + 6x_2 \geq -2 \\ x_1 - 4x_2 \geq -5 \\ -2x_1 - 2x_2 \geq -13 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ intere.} \end{cases}$$

*Dato un punto ammissibile  $(3, 2)^T$ , risolvere il problema con la tecnica del Branch and Bound.*

Chiameremo  $Prob^{(0)}$  il problema dato. Poiché il problema è in due variabili, possiamo risolvere tutti i rilassamenti lineari per via grafica (si veda la Figura 10.3.3).

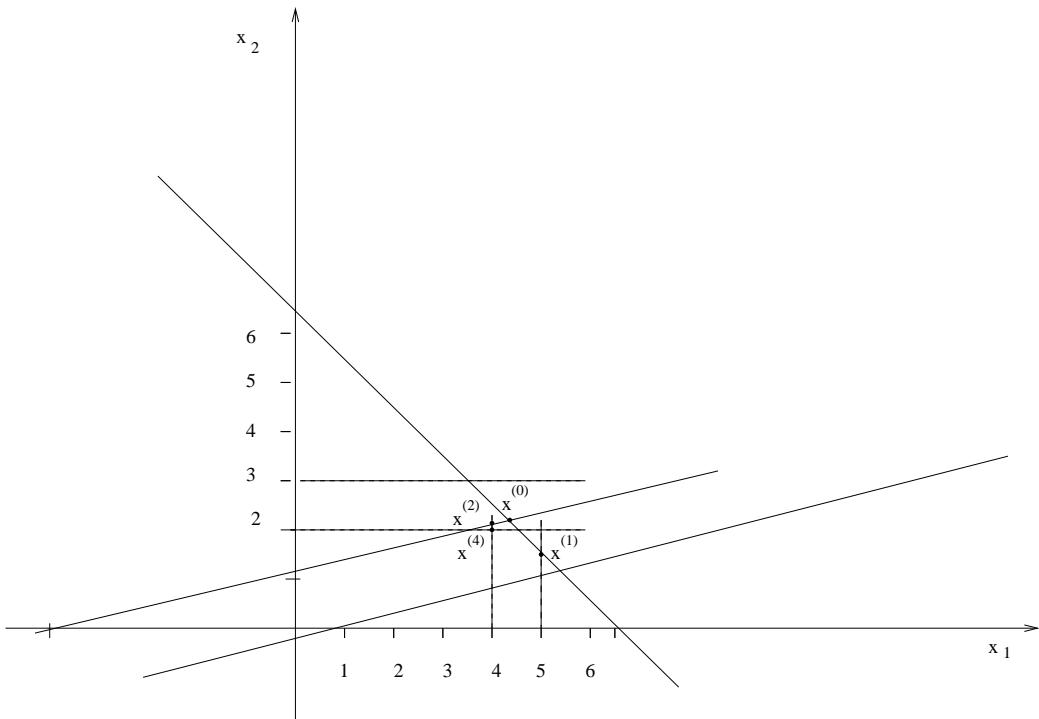


Figura 10.3.3 Rappresentazione grafica del problema dell’Esercizio 10.3.3

### Inizializzazione

Innanzitutto inizializziamo l’ottimo corrente utilizzando la soluzione ammissibile fornita, ovvero  $\tilde{x} = (3, 2)^T$  e  $\tilde{z} = -22$ .

Calcoliamo  $L_0$  risolvendo graficamente il rilassamento lineare di  $Prob^{(0)}$  e ottieniamo

$$\bar{x}^{(0)} = (21/5, 23/10)^T, \quad L_0 = -2 \cdot 21/5 - 8 \cdot 23/10 = -26.8.$$

Poichè  $\bar{x}^{(0)}$  non è a componenti intere, non possiamo dichiararlo soluzione del problema. Inoltre poichè  $L_0 < \tilde{z} = -22$ , neanche  $\tilde{x}$  può essere dichiarato ottimo del problema. Il vettore  $\bar{x}^{(0)}$  non è intero e quindi separiamo rispetto a una sua componente frazionaria, per esempio rispetto a quella con indice più basso, cioè  $x_1$ ; vengono allora generati i due sottoproblemi

$$Prob^{(1)} \quad \begin{cases} \min -2x_1 - 8x_2 \\ -2x_1 + 6x_2 \geq -2 \\ x_1 - 4x_2 \geq -5 \\ -2x_1 - 2x_2 \geq -13 \\ x_1 \geq \lceil 21/5 \rceil = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in Z. \end{cases} \quad \text{e} \quad Prob^{(2)} \quad \begin{cases} \min -2x_1 - 8x_2 \\ -2x_1 + 6x_2 \geq -2 \\ x_1 - 4x_2 \geq -5 \\ -2x_1 - 2x_2 \geq -13 \\ x_1 \leq \lfloor 21/5 \rfloor = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

e viene inizializzata la lista  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} = \{Prob^{(1)}, Prob^{(2)}\}.$$

### Prima iterazione

La lista  $\mathcal{L}$  non è vuota, e quindi estraiamo  $Prob^{(1)}$  dalla lista:

$$\mathcal{L} = \{Prob^{(2)}\}.$$

Siccome  $Prob^{(1)}$  risulta ammissibile, risolviamo geometricamente il suo rilassamento lineare. Si ottiene

$$\bar{x}^{(1)} = (5, 3/2)^T, \quad L_1 = -22,$$

Poichè risulta  $L_1 = \tilde{z} = -22$  il problema  $Prob^{(1)}$  si può chiudere.

### Seconda iterazione

La lista  $\mathcal{L}$  non è vuota, e quindi estraiamo l'unico problema in esso contenuto, cioè  $Prob^{(2)}$ :

$$\mathcal{L} = \emptyset.$$

Siccome  $Prob^{(2)}$  risulta ammissibile, risolviamo geometricamente il suo rilassamento lineare. Si ottiene

$$\bar{x}^{(2)} = (4, 9/4)^T, \quad L_2 = -26.$$

Poiché risulta  $L_2 = -26 < \tilde{z} = -22$  ed inoltre  $\bar{x}^{(2)}$  non è a componenti intere, il problema  $Prob^{(2)}$  non si può chiudere e quindi si effettua un'operazione di separazione rispetto all'unica componente non intera di  $\bar{x}^{(2)}$ , ovvero la seconda componente; vengono generati i due sottoproblemi

$$Prob^{(3)} \quad \begin{cases} \min -2x_1 - 8x_2 \\ -2x_1 + 6x_2 \geq -2 \\ x_1 - 4x_2 \geq -5 \\ -2x_1 - 2x_2 \geq -13 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \geq \lceil 9/4 \rceil = 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in Z. \end{cases} \quad \text{e} \quad Prob^{(4)} \quad \begin{cases} \min -2x_1 - 8x_2 \\ -2x_1 + 6x_2 \geq -2 \\ x_1 - 4x_2 \geq -5 \\ -2x_1 - 2x_2 \geq -13 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq \lfloor 9/4 \rfloor = 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

e vengono inseriti nella lista  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} = \{Prob^{(3)}, Prob^{(4)}\}.$$

### Terza iterazione

La lista  $\mathcal{L}$  non è vuota, e quindi estraiamo  $Prob^{(3)}$  dalla lista:

$$\mathcal{L} = \{Prob^{(4)}\}.$$

Il  $Prob^{(3)}$  risulta inammissibile e quindi si può chiudere.

### Quarta iterazione

La lista  $\mathcal{L}$  non è vuota, e quindi estraiamo l'unico problema in esso contenuto, cioè  $Prob^{(4)}$ :

$$\mathcal{L} = \emptyset.$$

Siccome  $Prob^{(4)}$  risulta ammissibile, risolviamo geometricamente il suo rilassamento lineare. Si ottiene

$$\bar{x}^{(4)} = (4, 2)^T, \quad L_4 = -24.$$

Poiché si ha  $L_4 = -24 < \tilde{z} = -22$  e  $\bar{x}^{(4)}$  è a componenti intere, si può chiudere il problema  $Prob^{(4)}$  e si aggiorna la soluzione ottima corrente e il valore ottimo corrente ponendo

$$\tilde{x} = (4, 2)^T \quad \tilde{z} = -24.$$

### Quinta iterazione

Siccome la lista  $\mathcal{L}$  è vuota l'algoritmo termina e la soluzione ottima è data da

$$x^* = \tilde{x} = (4, 2)^T \quad \text{con valore ottimo} \quad z^* = \tilde{z} = -24.$$

□

### 10.3.1 Il problema del knapsack binario.

Dato un problema di knapsack

$$\begin{aligned} & \max c^T x \\ & a^T x \leq b \\ & x \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

il suo rilassamento continuo è

$$\begin{aligned} & \max c^T x \\ & a^T x \leq b \\ & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Possiamo supporre che i coefficienti  $a_i$  e  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  siano positivi (vedere osservazione di seguito).

Per determinare la soluzione del problema rilassato si può procedere come segue

- (i) Si riordinano le variabili in modo che i rapporti peso/ingombro siano ordinati in modo non crescente, cioè

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \dots \geq \frac{c_n}{a_n}.$$

- (ii) Si determina l'indice critico  $k$  per cui

$$\sum_{i=1}^k a_i > b \quad \sum_{i=1}^{k-1} a_i \leq b.$$

- (iii) La soluzione ottima è quindi

$$\begin{aligned} x_i^* &= 1, \quad \text{per } i = 1, \dots, k-1 \\ x_k^* &= \frac{b - \sum_{i=1}^{k-1} a_i}{a_k}, \\ x_i^* &= 0, \quad \text{per } i = k+1, \dots, n \end{aligned}$$

**Osservazione** Dato un problema di knapsack continuo limitato, possiamo sempre supporre che il coefficienti  $a_i$  e  $c_i$  per  $i = 1, \dots, n$  siano positivi. Infatti negli altri casi è possibile ricondursi a questa situazione come descritto nel seguito.

- 1) La variabile  $x_i$  non compare nella funzione obiettivo, ovvero  $c_i = 0$ . In questo caso si può fissare la variabile  $x_i$  in base al segno di  $a_i$ :
  - se  $a_i > 0$  allora si fissa  $x_i = 0$  e il problema può essere riformulato escludendo la variabile  $i$ -esima (senza modificare il termine noto  $b$ ),

- se  $a_i < 0$  allora si fissa  $x_i = 1$  e il problema può essere riformulato escludendo la variabile  $i$ -esima (ovviamente sommando al termine noto  $b$  il valore  $-a_i$ ).
- 2) La variabile  $x_i$  non compare nel vincolo, ovvero  $a_i = 0$ . In questo caso si può fissare la variabile  $x_i$  in base al segno di  $c_i$ :
- se  $c_i > 0$  allora si fissa  $x_i = 1$  e il problema può essere riformulato escludendo la variabile  $i$ -esima (senza modificare il termine noto  $b$ ),
  - se  $c_i < 0$  allora si fissa  $x_i = 0$  e il problema può essere riformulato escludendo la variabile  $i$ -esima (senza modificare il termine noto  $b$ ).
- 3) L' $i$ -esimo coefficiente della funzione obiettivo è negativo, ed il corrispondente coefficiente nel vincolo è positivo:  $c_i < 0$ ,  $a_i > 0$ . In questo caso si può fissare la variabile  $x_i = 0$ . Il problema può quindi essere riformulato escludendo la variabile  $i$ -esima senza modificare il termine noto  $b$ .
- 4) L' $i$ -esimo coefficiente della funzione obiettivo è positivo, ed il corrispondente coefficiente nel vincolo è negativo:  $c_i > 0$ ,  $a_i < 0$ . In questo caso si può fissare la variabile  $x_i = 1$ . Il problema può quindi essere riformulato escludendo la variabile  $i$ -esima e sommando al termine noto  $b$  il valore  $-a_i$ .
- 5) Entrambi i coefficienti  $c_i < 0$ ,  $a_i < 0$ . In questo caso si può sostituire la variabile  $x_i$  con un'altra variabile  $x'_i$  ponendo  $c'_i = -c_i$ ,  $a'_i = -a_i$  (che risultano quindi entrambi positivi) e si somma al termine noto  $b$  il valore  $-a_i$ . Una volta risolto questo problema trasformato è possibile ottenere il valore ottimo della variabile originaria  $x_i$  ponendo  $x_i^* = 1 - x'^*_i$ .

**Esempio 10.3.4** Risolvere con il metodo del Branch and Bound il seguente problema di knapsack binario:

$$\begin{aligned} \max \quad & 1.2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 1.5x_5 + 0.3x_6 + 0.3x_7 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 \leq 3 \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, 7. \end{aligned}$$

Innanzitutto si fissa  $x_2 = 0$ . Si deve risolvere il problema nelle variabili rimanenti. Si riordinano le variabili in modo decrescente rispetto al rapporto peso-ingombro  $c_k/a_k$  (rinominandole con  $y$ ); si ottiene il problema

$$Prob^{(0)} \left\{ \begin{array}{l} \max 1.5y_1 + y_2 + 1.2y_3 + y_4 + 0.3y_5 + 0.3y_6 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 + 2y_6 \leq 3 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 6. \end{array} \right.$$

### Inizializzazione

Una soluzione del rilassamento lineare è data da

$$\bar{y}^{(0)} = \left( 1, 1, \frac{3-2}{2}, 0, 0, 0 \right)^T = \left( 1, 1, \frac{1}{2}, 0, 0, 0 \right)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound  $U_0 = 3.1$ . Siccome  $\bar{y}^{(0)}$  non è intera, essa non può essere la soluzione del problema di knapsack binario. Per inizializzare l'ottimo corrente è sufficiente ottenere una qualunque soluzione ammissibile intera. Ne possiamo individuare una approssimando all'intero inferiore la componente frazionaria di  $\bar{y}^{(0)}$ , ovvero  $\tilde{y} = (1, 1, 0, 0, 0, 0)^T$ . Il valore dell'ottimo corrente è quindi  $\tilde{z} = c^T \tilde{y} = 2.5$ . Siccome risulta  $2.5 = \tilde{z} < U_0 = 3.1$ ,  $\tilde{y}$  non è ottimo.

Si separa rispetto alla variabile  $y_3$  e si ottengono i due sottoproblemi:

$$\begin{aligned} Prob^{(1)} & \left\{ \begin{array}{l} \max 1.5y_1 + y_2 + y_4 + 0.3y_5 + 0.3y_6 \\ y_1 + y_2 + 2y_4 + y_5 + 2y_6 \leq 3 \\ y_3 = 0 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 6. \end{array} \right. \\ Prob^{(2)} & \left\{ \begin{array}{l} \max 1.5y_1 + y_2 + 1.2 + y_4 + 0.3y_5 + 0.3y_6 \\ y_1 + y_2 + 2y_4 + y_5 + 2y_6 \leq 1 \\ y_3 = 1 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 6. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Si inizializza la lista  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} = \left\{ Prob^{(1)}, Prob^{(2)} \right\}.$$

### Prima iterazione

Si estrae  $Prob^{(1)}$  dalla lista:

$$\mathcal{L} = \left\{ Prob^{(2)} \right\}.$$

Si ottiene:

$$\bar{y}^{(1)} = \left( 1, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, 0 \right)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound  $U_1 = 3$ . Poiché  $U_1 = 3 > 2.5 = \tilde{z}$  e  $\bar{y}^{(1)}$  non è intera si separa rispetto alla variabile  $y_4$  e si ottengono i due sottoproblemi:

$$\begin{aligned} Prob^{(3)} & \left\{ \begin{array}{l} \max 1.5y_1 + y_2 + 0.3y_5 + 0.3y_6 \\ y_1 + y_2 + y_5 + 2y_6 \leq 3 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 6. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$Prob^{(4)} \left\{ \begin{array}{l} \max 1.5y_1 + y_2 + 1 + 0.3y_5 + 0.3y_6 \\ y_1 + y_2 + y_5 + 2y_6 \leq 1 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 1 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 6. \end{array} \right.$$

e si inseriscono nella lista:

$$\mathcal{L} = \{Prob^{(2)}, Prob^{(3)}, Prob^{(4)}\}.$$

### Seconda iterazione

Si estrae  $Prob^{(2)}$  dalla lista:

$$\mathcal{L} = \{Prob^{(3)}, Prob^{(4)}\}.$$

Si ottiene:

$$\bar{y}^{(2)} = (1, 0, 1, 0, 0, 0)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound  $U_2 = 2.7$ . Poiché  $U_2 = 2.7 > 2.5 = \tilde{z}$  e  $\bar{y}^{(2)}$  è intera, si aggiorna l'ottimo corrente  $\tilde{y} = \bar{y}^{(2)}$  e  $\tilde{z} = 2.7$  e si chiude il  $Prob^{(2)}$ .

### Terza iterazione

Si estrae  $Prob^{(3)}$  dalla lista:

$$\mathcal{L} = \{Prob^{(4)}\}.$$

Si ottiene:

$$\bar{y}^{(3)} = (1, 1, 0, 0, 1, 0)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound  $U_3 = 2.8$ . Poiché  $U_3 = 2.8 > 2.7 = \tilde{z}$  e  $\bar{y}^{(3)}$  è intera, si aggiorna l'ottimo corrente  $\tilde{y} = \bar{y}^{(3)}$  e  $\tilde{z} = 2.8$  e si chiude il  $Prob^{(3)}$ .

### Quarta iterazione

Si estrae  $Prob^{(4)}$  dalla lista:

$$\mathcal{L} = \emptyset.$$

Si ottiene:

$$\bar{y}^{(4)} = (1, 0, 0, 1, 0, 0)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound  $U_4 = 2.5$ . Poiché  $U_4 = 2.5 < \tilde{z}$  si chiude il  $Prob^{(4)}$ .

### Quinta iterazione

A questo punto la lista  $\mathcal{L}$  è vuota per cui si ha

$$y^* = \tilde{y} = \bar{y}^{(3)} = (1, 1, 0, 0, 1, 0)^T$$

con valore ottimo pari a 2.8. Nelle variabili originarie la soluzione ottima è  $x^* = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)^T$ .  $\square$

**Esempio 10.3.5** Risolvere con il metodo del Branch and Bound il seguente problema di knapsack binario:

$$\begin{aligned} \max \quad & 0.8x_1 + 0.6x_2 + 3x_3 + x_4 + 2.2x_5 + 5x_6 + 0.5x_7 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 \leq 4 \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, 7. \end{aligned}$$

Innanzitutto si fissa  $x_4 = 1$ . Si deve risolvere il problema nelle variabili rimanenti. Si riordinano le variabili in modo decrescente rispetto al rapporto peso-ingombro  $c_k/a_k$  (rinominandole con  $y$ ) e si aumenta di 2 il valore del termine noto (in seguito alla rimozione della variabile  $x_4$ ); si ottiene il problema

$$Prob^{(0)} \left\{ \begin{array}{l} \max 5y_1 + 2.2y_2 + 3y_3 + 0.8y_4 + 0.6y_5 + 0.5y_6 + 1 \\ 2y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 + 2y_5 + 2y_6 \leq 6 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 6. \end{array} \right.$$

### Inizializzazione

Una soluzione del rilassamento lineare è data da

$$\bar{y}^{(0)} = \left( 1, 1, \frac{6-4}{3}, 0, 0, 0 \right)^T = \left( 1, 1, \frac{2}{3}, 0, 0, 0 \right)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound  $U_0 = 10.2$ . Siccome  $\bar{y}^{(0)}$  non è intera, essa non può essere la soluzione del problema di knapsack binario. Per inizializzare l'ottimo corrente è sufficiente ottenere una soluzione ammissibile intera, approssimando all'intero inferiore la componente frazionaria, ovvero  $\tilde{y} = (1, 1, 0, 0, 0, 0)^T$  ed il valore dell'ottimo corrente è  $\tilde{z} = 8.2$ . Siccome risulta  $8.2 = \tilde{z} < U_0 = 10.2$ ,  $\tilde{y}$  non è ottimo.

Si separa rispetto alla variabile  $y_3$  e si ottengono i due sottoproblemi:

$$\begin{aligned} Prob^{(1)} & \left\{ \begin{array}{l} \max 5y_1 + 2.2y_2 + 0.8y_4 + 0.6y_5 + 0.5y_6 + 1 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_4 + 2y_5 + 2y_6 \leq 6 \\ y_3 = 0 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 6. \end{array} \right. \\ Prob^{(2)} & \left\{ \begin{array}{l} \max 5y_1 + 2.2y_2 + 0.8y_4 + 0.6y_5 + 0.5y_6 + 4 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_4 + 2y_5 + 2y_6 \leq 3 \\ y_3 = 1 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 6. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Si inizializza la lista  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} = \left\{ Prob^{(1)}, Prob^{(2)} \right\}.$$

**Prima iterazione**

Si estrae  $Prob^{(1)}$  dalla lista:

$$\mathcal{L} = \left\{ Prob^{(2)} \right\}.$$

Si ottiene:

$$\bar{y}^{(1)} = \left( 1, 1, 0, 1, \frac{1}{2}, 0 \right)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound  $U_1 = 9.3$ . Poiché  $U_1 = 9.3 > 8.2 = \tilde{z}$  e  $\bar{y}^{(1)}$  non è intera, si separa rispetto alla variabile  $y_5$ , si ottengono i seguenti due sottoproblemi:

$$Prob^{(3)} \left\{ \begin{array}{l} \max 5y_1 + 2.2y_2 + 0.8y_4 + 0.5y_6 + 1 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_4 + 2y_6 \leq 6 \\ y_3 = 0 \\ y_5 = 0 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 6. \end{array} \right.$$

$$Prob^{(4)} \left\{ \begin{array}{l} \max 5y_1 + 2.2y_2 + 0.8y_4 + 0.5y_6 + 1.6 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_4 + 2y_6 \leq 4 \\ y_3 = 0 \\ y_5 = 1 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 6. \end{array} \right.$$

e si inseriscono nella lista:

$$\mathcal{L} = \left\{ Prob^{(2)}, Prob^{(3)}, Prob^{(4)} \right\}.$$

**Seconda iterazione**

Si estrae  $Prob^{(2)}$  dalla lista:

$$\mathcal{L} = \left\{ Prob^{(3)}, Prob^{(4)} \right\}.$$

Si ottiene:

$$\bar{y}^{(2)} = \left( 1, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0 \right)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound  $U_2 = 10.1$ . Poiché  $U_2 = 10.1 > 8.2 = \tilde{z}$  e  $\bar{y}^{(2)}$  non è intera, si separa rispetto alla variabile  $y_2$  e si ottengono i seguenti due sottoproblemi:

$$Prob^{(5)} \left\{ \begin{array}{l} \max 5y_1 + 0.8y_4 + 0.6y_5 + 0.5y_6 + 4 \\ 2y_1 + y_4 + 2y_5 + 2y_6 \leq 3 \\ y_3 = 1 \\ y_2 = 0 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 6. \end{array} \right.$$

$$Prob^{(6)} \left\{ \begin{array}{l} \max 5y_1 + 0.8y_4 + 0.6y_5 + 0.5y_6 + 6.2 \\ 2y_1 + y_4 + 2y_5 + 2y_6 \leq 1 \\ y_3 = 1 \\ y_2 = 1 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 6. \end{array} \right.$$

e si inseriscono nella lista:

$$\mathcal{L} = \{Prob^{(3)}, Prob^{(4)}, Prob^{(5)}, Prob^{(6)}\}.$$

### Terza iterazione

Si estrae  $Prob^{(5)}$  dalla lista:

$$\mathcal{L} = \{Prob^{(3)}, Prob^{(4)}, Prob^{(6)}\}.$$

Si ottiene:

$$\bar{y}^{(5)} = (1, 0, 1, 1, 0, 0)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound  $U_5 = 9.8$ . Poiché  $U_5 = 9.8 > 8.2 = \tilde{z}$  e  $\bar{y}^{(5)}$  è intera, si aggiorna l'ottimo corrente  $\tilde{y} = \bar{y}^{(5)}$  e  $\tilde{z} = 9.8$  e si chiude il  $Prob^{(5)}$ .

### Quarta iterazione

Si estrae  $Prob^{(3)}$  dalla lista:

$$\mathcal{L} = \{Prob^{(4)}, Prob^{(6)}\}.$$

Si ottiene:

$$\bar{y}^{(3)} = \left(1, 1, 0, 1, 0, \frac{1}{2}\right)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound  $U_3 = 9.25$ . Poiché  $U_3 = 9.25 < \tilde{z}$  si chiude il  $Prob^{(3)}$ .

### Quinta iterazione

Si estrae  $Prob^{(4)}$  dalla lista:

$$\mathcal{L} = \{Prob^{(6)}\}.$$

Si ottiene:

$$\bar{y}^{(4)} = (1, 1, 0, 0, 1, 0)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound  $U_4 = 8.8$ . Poiché  $U_4 = 8.8 < \tilde{z}$  si chiude il  $Prob^{(4)}$ .

### Sesta iterazione

Si estrae  $Prob^{(6)}$  dalla lista:

$$\mathcal{L} = \emptyset.$$

Si ottiene:

$$\bar{y}^{(6)} = \left( \frac{1}{2}, 1, 1, 0, 0, 0 \right)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound  $U_6 = 8.7$ . Poiché  $U_6 = 8.7 < \tilde{z}$  si chiude il  $Prob^{(6)}$ .

### Settima iterazione

La lista  $\mathcal{L}$  è vuota, quindi si ha

$$y^* = \tilde{y} = \bar{y}^{(5)} = (1, 0, 1, 1, 0, 0)^T$$

con valore ottimo pari a 9.8. Nelle variabili originarie la soluzione ottima è  $x^* = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0)^T$ .  $\square$

# *Indice*

Prefazione	iii
1 Introduzione	1
1.1 Che cosa è la Ricerca Operativa	1
1.2 Breve storia della Ricerca Operativa	2
1.3 La Ricerca Operativa oggi	3
1.4 L'approccio modellistico	7
1.5 Modelli della Ricerca Operativa	8
1.5.1 Costruzione di un modello matematico	10
1.5.2 Vantaggi dell'approccio modellistico	11
1.5.3 Critiche all'approccio modellistico	11
2 La Programmazione Matematica	13
2.1 Problemi di Ottimizzazione	13
2.1.1 Definizioni fondamentali	14
2.1.2 Classificazione dei problemi di Ottimizzazione	14
2.2 Problemi di Programmazione Matematica	15
2.3 Modelli di Programmazione Matematica	17
2.3.1 Esempi di modelli di Programmazione Matematica	18
3 Modelli di Programmazione Lineare	25

3.1	Generalità	25
3.2	Struttura di un modello di Programmazione Lineare	26
3.3	Generalità sui modelli di Programmazione Lineare	28
3.4	Classi di modelli di Programmazione Lineare	29
3.4.1	Modelli di allocazione ottima di risorse	30
3.4.2	Modelli di miscelazione	46
3.4.3	Modelli di trasporto	55
4	Introduzione alla Programmazione Lineare	61
4.1	Introduzione	61
4.2	Struttura di un problema di Programmazione Lineare	62
4.3	Interpretazione geometrica di un Problema di Programmazione Lineare	63
4.3.1	Rappresentazione di vincoli lineari	63
4.3.2	Rappresentazione di funzioni obiettivo lineari	66
4.3.3	Esempi di risoluzione grafica	67
5	Teoria della Programmazione Lineare	79
5.1	Elementi di geometria in $\mathbb{R}^n$	79
5.1.1	Rette, semirette, segmenti	79
5.1.2	Insiemi Convessi	81
5.1.3	Vertici	85
5.1.4	Caratterizzazione dei vertici dell'insieme ammissibile di un problema di PL	86
5.2	Il Teorema fondamentale della Programmazione Lineare	95
6	Il metodo del simplex	101
6.1	La forma standard	103
6.2	Vertici e soluzioni di base	106
6.3	Introduzione al metodo del simplex	119
6.4	La Fase II del metodo del simplex	121
6.4.1	Criterio di ottimalità	122
6.4.2	Criterio di illimitatezza	125
6.4.3	Determinazione di una nuova base ammissibile	126
6.4.4	Calcolo della nuova matrice $\widetilde{B}^{-1}N$ e del nuovo vettore $\widetilde{B}^{-1}b$ : operazione di pivot	131
6.4.5	Struttura dell'algoritmo ed esempi	136

6.4.6	Convergenza del metodo del simplesso	145
6.5	La Fase I del metodo del simplesso	149
6.5.1	Ammisibilità del problema originario	150
6.5.2	Individuazione di una matrice di base ammissibile $B$ del problema originario e determinazione della matrice $B^{-1}N$ ed del vettore $B^{-1}b$	152
6.5.3	Esempi	158
7	La dualità nella Programmazione Lineare	173
7.1	Teoria della dualità	173
7.1.1	Risultati fondamentali della teoria della dualità	178
7.1.2	Condizioni di complementarità	183
7.2	Interpretazione della Dualità	190
7.2.1	Interpretazione economica della dualità e prezzi ombra	190
7.2.2	Il duale del problema di allocazione ottima di risorse	197
7.2.3	Il duale del problema di miscelazione	199
7.2.4	Il duale del problema dei trasporti	201
8	Modelli di Programmazione Lineare Intera	205
8.1	Variabili intere per rappresentare quantità indivisibili	205
8.2	Variabili binarie per rappresentare scelte alternative	206
8.2.1	Problemi di assegnamento	206
8.2.2	Problemi di Knapsack binario	213
8.2.3	Problemi di “Capital Budgeting” (pianificazione degli investimenti)	215
8.3	Variabili binarie come variabili indicatrici	218
8.3.1	Problema del costo fisso	221
8.3.2	Problemi di “lot sizing” (gestione della scorte)	225
8.3.3	Problemi di localizzazione di impianti	227
8.4	Variabili binarie per indicare il soddisfacimento di vincoli disgiuntivi	231
8.4.1	Problemi di “scheduling” (sequenziamento)	231
9	Teoria della Programmazione Lineare Intera	237
9.1	Introduzione	237
9.2	Preliminari	240

9.3	Relazioni tra Programmazione Lineare Intera e Programmazione Lineare	241
9.4	Formulazioni lineari di problemi di Programmazione Lineare Intera	242
9.5	Proprietà di interezza e totale unimodularità	247
10	Metodi generali per la soluzione di problemi di PLI	251
10.1	Enumerazione totale	252
10.2	Soluzione approssimata per arrotondamento	252
10.3	La tecnica del “Branch and Bound”	253
10.3.1	Il problema del knapsack binario.	265