Sistemi di Controllo

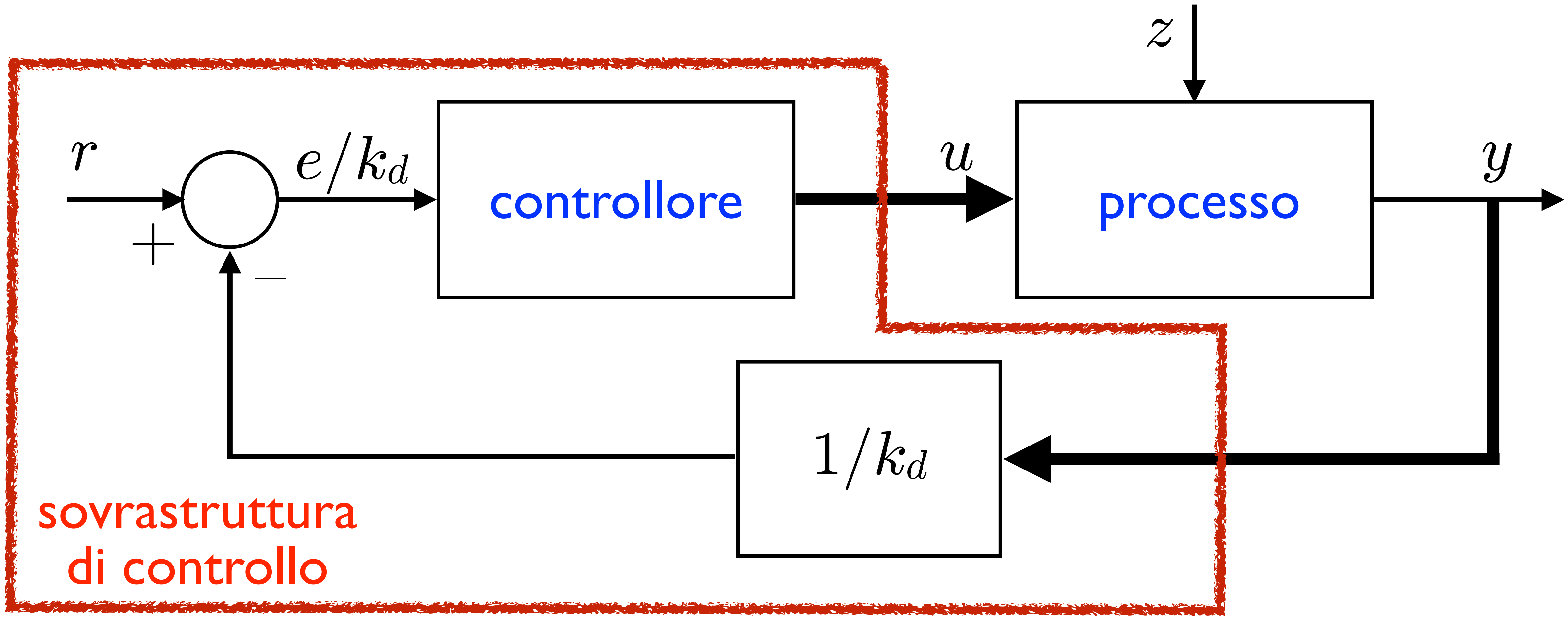
Prof. Giuseppe Oriolo

Specifiche di progetto dei sistemi di controllo

Dipartimento di Ingegneria Informatica
Automatica e Gestionale Antonio Ruberti

Sapienza
Università di Roma

struttura dei sistemi di controllo



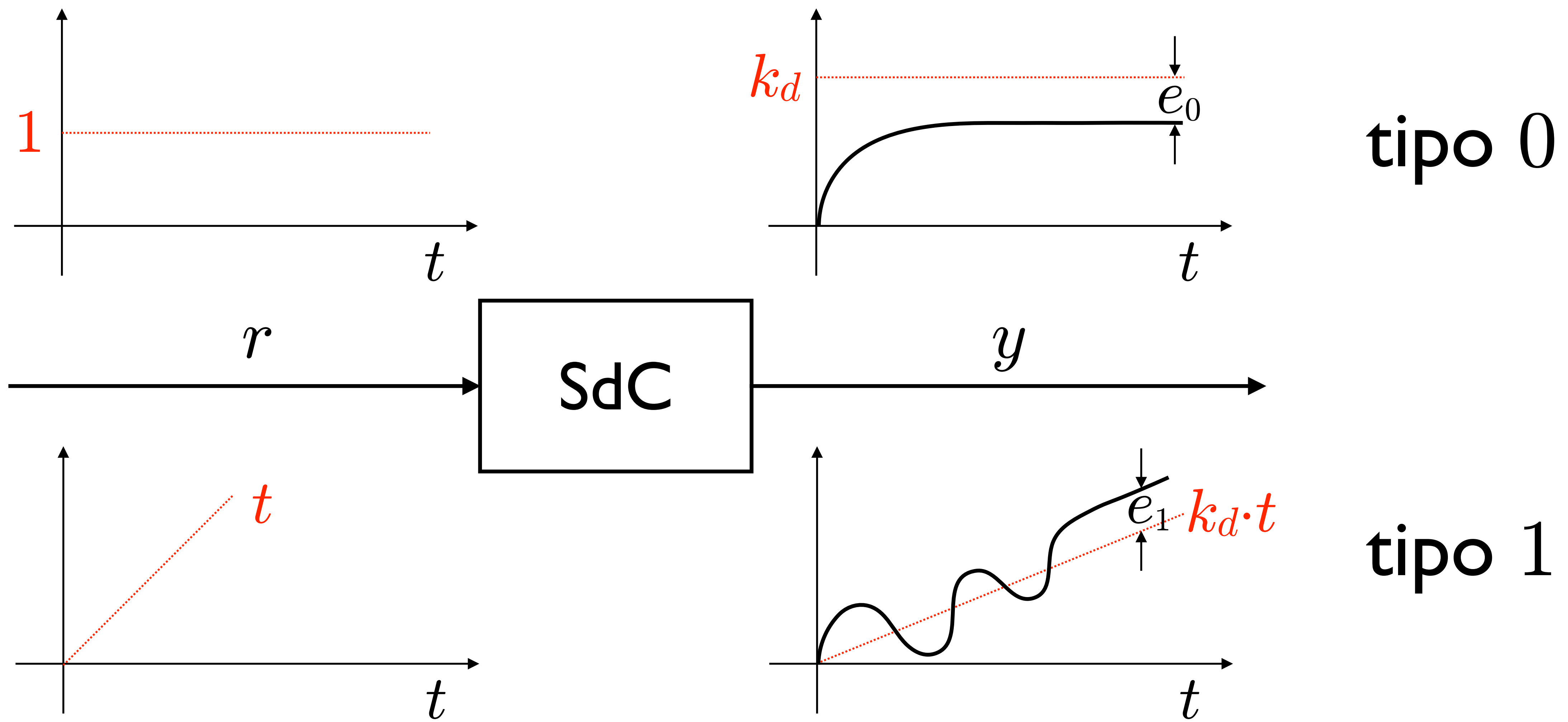
- si vuole riprodurre un'uscita desiderata $y_d(t) = k_d\, r(t)$, dove r è il segnale di riferimento
- la costante k_d consente di effettuare una scalatura di potenza o una conversione di unità tra y_d e r
- le azioni consentite sul processo dal punto di vista del controllo sono solo (1) imporre u (2) misurare y

principali specifiche di progetto

- stabilità asintotica: requisito fondamentale per (1) esistenza regime permanente (2) integrità fisica sistema (3) consistenza modello lineare
- precisione di risposta a regime permanente: assegnata in termini di entità dell'errore a regime permanente per specifici segnali di riferimento (polinomi canonici, sinusoidi, ...)
- precisione di risposta a regime transitorio: assegnata in termini di caratteristiche della risposta transitoria a specifici segnali di riferimento (in genere, gradino unitario)
- attenuazione/reiezione dei disturbi: assegnata in termini di entità della risposta a regime permanente per specifici segnali di disturbo (costanti, sinusoidi)

precisione di risposta: regime permanente

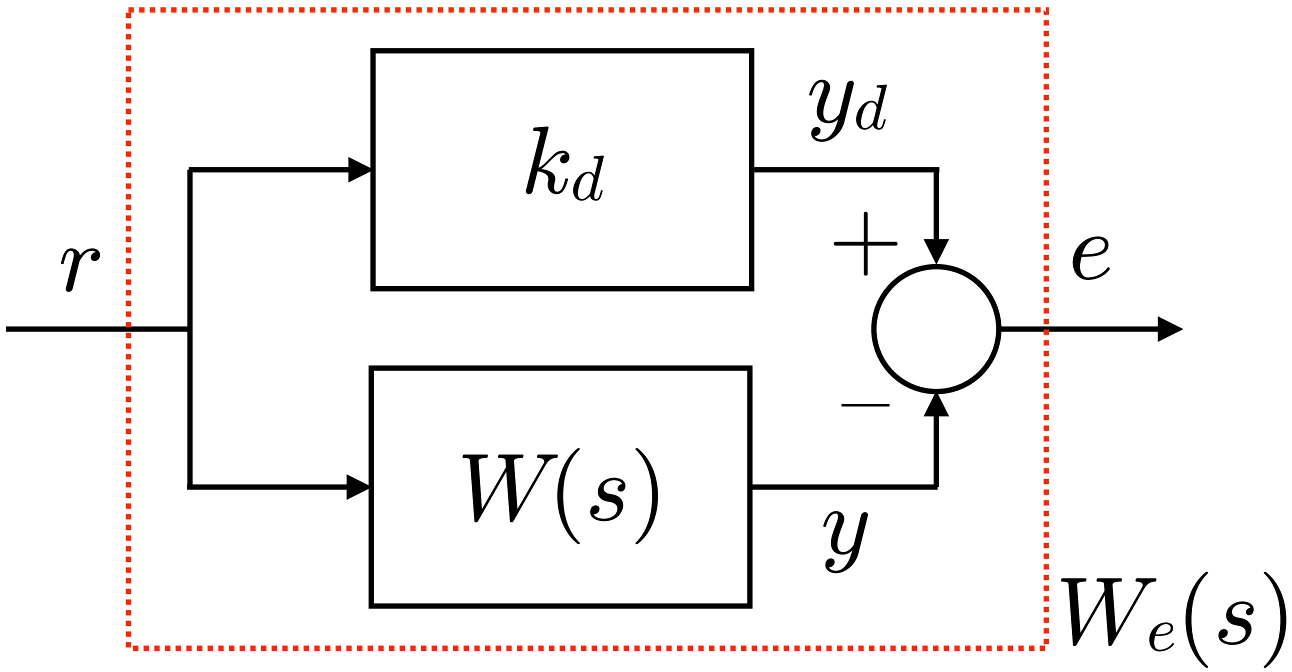
- per studiare la precisione di risposta, si pone $z = 0$
- un sistema di controllo (SdC) si dice di tipo k se l'errore a regime permanente per $r = t^k/k!$ è una costante non nulla



- questa definizione presuppone la AS del SdC

tipo k: condizioni

- è utile considerare il seguente sistema di errore, dove $W(s)$ è la FdT del SdC



- la FdT del sistema di errore è $W_e(s) = k_d - W(s)$
- se il SdC è AS, anche il sistema di errore è AS, e l'errore a regime permanente per $r = t^k/k!$ si calcola come

$$e_k = M_{e,0}\frac{t^k}{k!} + M_{e,1}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + M_{e,k-1}t + M_{e,k} \quad \text{con } M_{e,i} = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i W_e(s)}{ds^i}\right]_{s=0}$$

- quindi: SdC di tipo k $\Leftrightarrow \begin{cases} M_{e,0} = M_{e,1} = \ldots = M_{e,k-1} = 0 \\ M_{e,k} \neq 0 \end{cases}$

- considerata l'espressione di $M_{e,i}$, questa condizione equivale a richiedere che $W_e(s)$ abbia esattamente k zeri in $s = 0$, cioè

$$W_e(s) = s^k W_e'(s) \qquad \text{con} \quad W_e'(0) \neq 0$$

- per un SdC di tipo k, l'errore a regime per $r = t^k/k!$ vale quindi

$$e_k = M_{e,k} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k W_e(s)}{ds^k}\right]_{s=0} = [W_e'(s)]_{s=0} = \left[\frac{W_e(s)}{s^k}\right]_{s=0}$$

- finora abbiamo considerato il comportamento di un SdC di tipo k per un riferimento $r = t^k/k!$, cioè dello stesso ordine

- cosa succede se a un SdC di tipo k si manda in ingresso un segnale di riferimento $r = t^j/j!$, con ordine j diverso da k?

$$j < k \quad \boxed{e_j} = M_{e,0}\frac{t^j}{j!} + \ldots + M_{e,j} = \boxed{0}$$

$$j > k \quad \boxed{e_j} = M_{e,0}\frac{t^j}{j!} + \ldots + M_{e,k}\frac{t^{j-k}}{(j-k)!} + \ldots + M_{e,j} = \boxed{\infty}$$

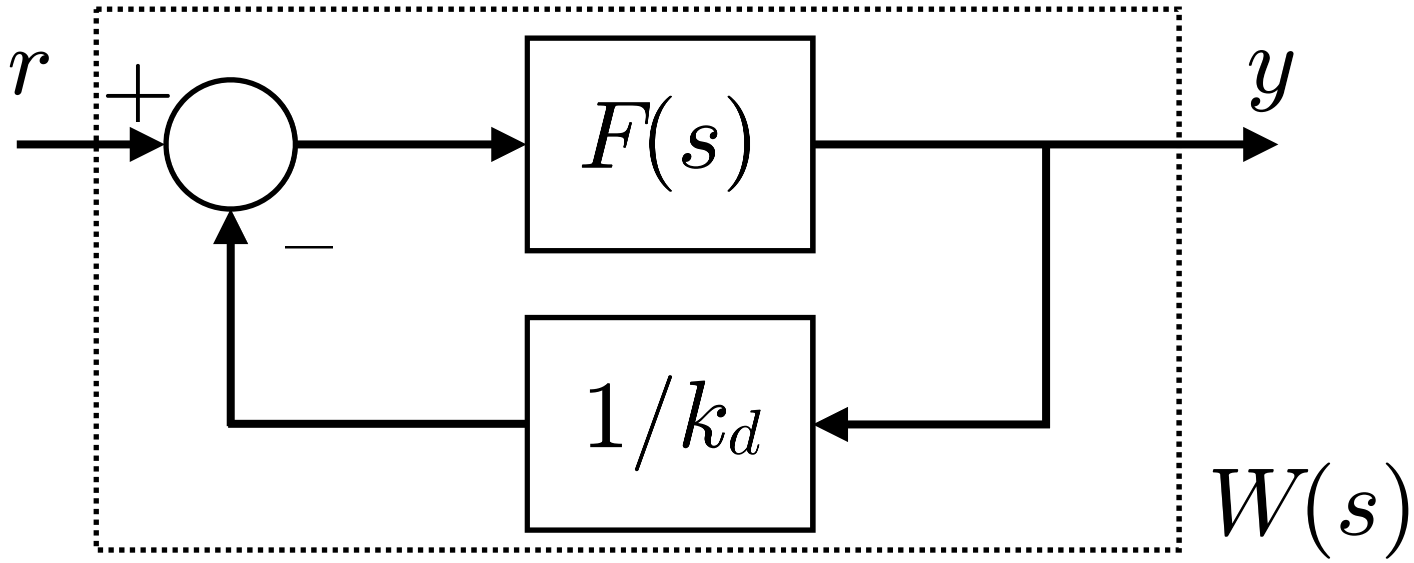
$=0$ $\qquad\qquad$ $\neq 0$

- in forma tabellare

tipo \ ordine	0	1	2	$\cdots$
0	e_0	∞	∞	
1	0	e_1	∞	
2	0	0	e_2	
$\vdots$				

- se $r = \alpha\, t^j/j!$, il valore dell'errore va moltiplicato per α
- SdC tipo 1: riproduce a regime costanti di qualsiasi ampiezza
- SdC tipo 2: riproduce a regime rampe di qualsiasi pendenza
- e così via

- quali caratteristiche deve avere la FdT del sistema ad anello aperto affinché un SdC in retroazione risulti di tipo k?



- essendo

$$W(s) = \frac{k_d F(s)}{k_d + F(s)} \;\Rightarrow\; W_e(s) = \frac{k_d^2}{k_d + F(s)} = \frac{k_d^2\, D_F(s)}{k_d D_F(s) + N_F(s)}$$

gli zeri di $W_e(s)$ coincidono con i poli di $F(s)$, e quindi

$$\boxed{\text{SdC di tipo } k \Leftrightarrow F(s) \text{ ha esattamente } k \text{ poli in } s = 0}$$

ovvero

$$F(s) = \frac{F'(s)}{s^k} \qquad \text{con} \quad F'_s(0) = k_F$$

- per un SdC di tipo k, l'errore a regime per $r = t^k/k!$ vale quindi

$$\boxed{e_0} = [W_e(s)]_{s=0} = \boxed{\frac{k_d^2}{k_d + k_F}} \qquad \text{SdC tipo } 0$$

$$\boxed{e_k} = \left[\frac{W_e(s)}{s^k}\right]_{s=0} = \left[\frac{1}{s^k}\frac{k_d^2}{k_d + \frac{F'(s)}{s^k}}\right]_{s=0} = \boxed{\frac{k_d^2}{k_F}} \qquad \text{SdC tipo } k \geq 1$$

- importanza degli elementi integratori sul ramo diretto: inserire eventualmente nel controllore quelli mancanti per conseguire il tipo richiesto

- importanza del guadagno k_F del ramo diretto: se necessario, utilizzare il guadagno k_G del controllore per aumentare k_F in modo da soddisfare limitazioni sull'entità di e_k

- attenzione però a (1) rischio instabilità sistema retroazionato (2) peggioramento del transitorio (3) saturazioni degli attuatori

precisione per riferimenti sinusoidali

- anche nel caso di riferimenti sinusoidali, le specifiche sono assegnate in termini di entità dell'errore a regime permanente

- l'errore a regime permanente per $r = \sin \omega t$ si calcola come

$$e_\omega = M_e(\omega) \sin\left(\omega t + \varphi_e(\omega)\right)$$

  dove $M_e(\omega)$ e $\varphi_e(\omega)$ sono rispettivamente modulo e fase della risposta armonica $W_e(j\omega)$ del sistema di errore

- in particolare si ha (cfr. slide 8)

$$M_e(\omega) = \left| \frac{k_d^2}{k_d + F(j\omega)} \right|$$

- le specifiche tipiche in questo caso sono di due tipi

a. $|e_\omega| \leq e_{\max}$ per $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$

in questo caso si impone

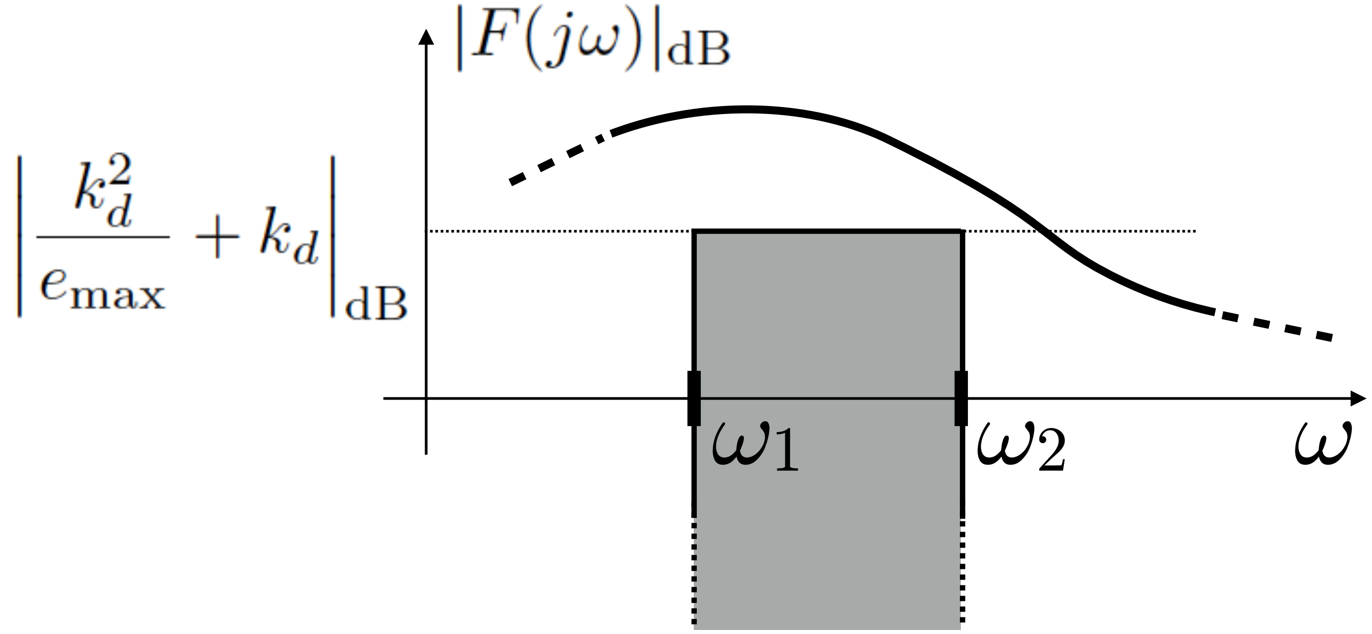
$$M_e(\omega) = \left| \frac{k_d^2}{k_d + F(j\omega)} \right| \leq e_{\max} \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]$$

da cui si ricava facilmente

$$|F(j\omega)| \geq \frac{k_d^2}{e_{\max}} + k_d \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]$$

ovvero sui ddB

maschera



b. $|e_\omega| = 0$ per $\omega = \bar{\omega}$

in questo caso, dovendo essere

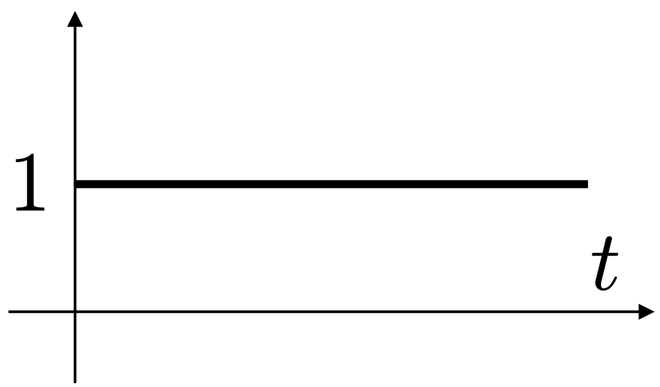
$$M_e(\bar{\omega}) = \left| \frac{k_d^2}{k_d + F(j\bar{\omega})} \right| = 0$$

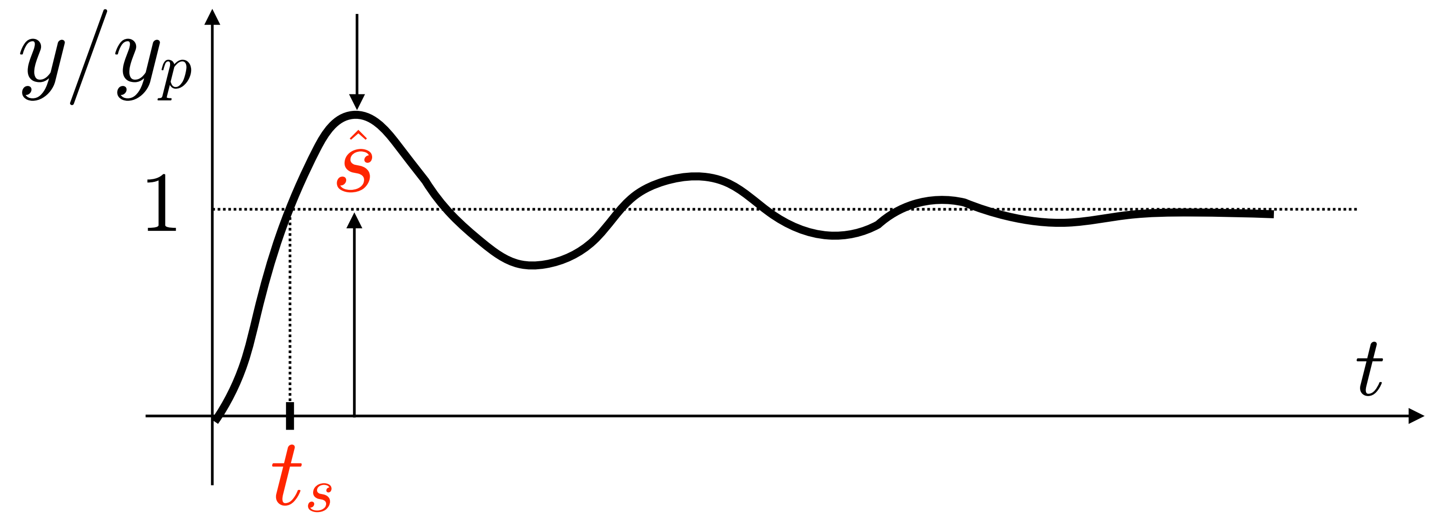
si deduce che $F(s)$ deve avere una coppia di poli c.c. in $\pm j\bar{\omega}$ (cioè, un elemento risonante puro con pulsazione naturale $\bar{\omega}$)

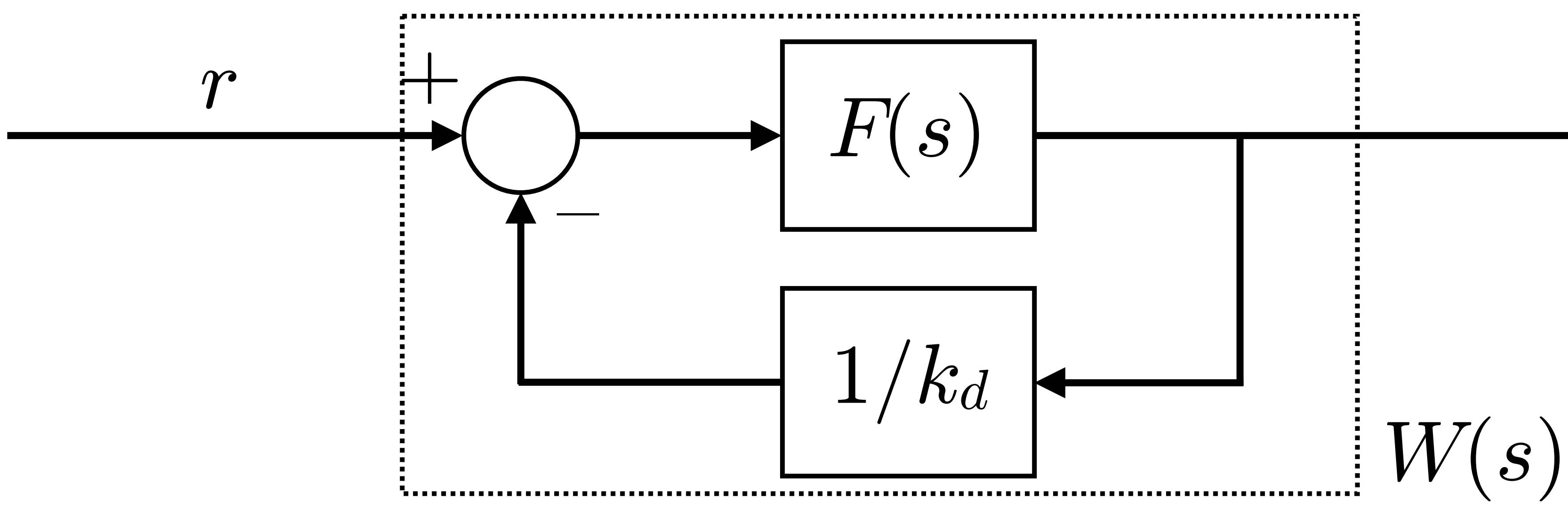
- come per gli elementi integratori necessari per conseguire il tipo k, anche gli elementi risonanti devono essere inseriti nel controllore se non sono già presenti nel processo
- quest'ultima condizione (come del resto la condizione per il tipo k) è una manifestazione del principio del modello interno: *"per annullare l'errore a regime, il ramo diretto deve contenere un elemento dinamico in grado di generare il segnale di riferimento"*

precisione di risposta: regime transitorio

- in genere si considera la risposta forzata del SdC a un segnale di riferimento a gradino unitario, detta risposta indiciale

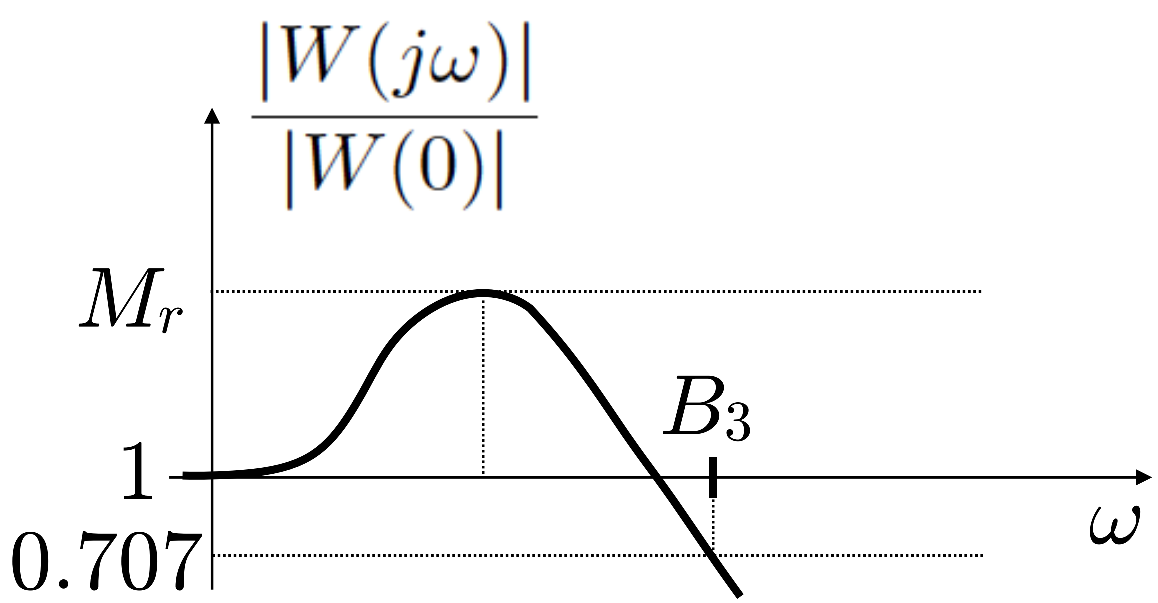






- parametri di interesse: t_s (tempo di salita), $\hat{s}$ (sovraelongazione)
- specifiche tipiche: $\hat{s} \leq \hat{s}_{\max}$, $t_s \leq t_{s,\max}$

- t_s e $\hat{s}$ sono funzioni del guadagno, degli zeri e dai poli di $F(s)$ attraverso il guadagno, gli zeri e i poli di $W(s)\ldots$
- si usano delle relazioni empiriche più semplici che legano tempo di salita e sovralongazione a pochi (due) parametri di $F(j\omega)$
- passo 1: legami tra t_s, $\hat{s}$ e B_3, M_r di $W(j\omega)$



M_r : modulo alla risonanza

B_3 : banda passante (a -3 dB)

$$\boxed{t_s \cdot B_3 \approx \text{cost} \approx 3 \qquad 1 + \hat{s} \approx 0.85\, M_r}$$

in effetti, queste relazioni sono vere "in media" (al variare dello smorzamento) per $W(s)$ aventi due poli c.c. e nessuno zero

- passo 2: legami tra B_3, M_r di $W(j\omega)$ e ω_t, m_φ di $F(j\omega)$

$$\boxed{\begin{array}{l} B_3 > \omega_t \;\; \text{(purché } m_\varphi < 90^\circ\text{)} \\ m_\varphi \nearrow \;\Rightarrow\; M_r \searrow \end{array}}$$

queste relazioni sono derivate dalla Carta di Nichols, che è una rappresentazione grafica dei legami tra $F(j\omega)$ e $W(j\omega)$

per la prima, si trova spesso $B_3 \approx 1.5 \div 1.7\,\omega_t$, mentre per la seconda si può pensare di disporre di una tabella del tipo

per avere $M_r < \ldots$	serve $m_\varphi > \ldots$
12 dB	14°
9 dB	20°
4 dB	35°
2 dB	45°
1 dB	55°

- questi legami consentono di trasformare specifiche sul regime transitorio in condizioni sulla risposta armonica ad anello aperto

  in particolare:

$$\boxed{t_s \leq t_{s,\max}} \Rightarrow B_3 \geq B_{3,\min} \Rightarrow \boxed{\omega_t \geq \omega_{t,\min}}$$

passo I passo II

$$\boxed{\hat{s} \leq \hat{s}_{\max}} \Rightarrow M_r \leq M_{r,\max} \Rightarrow \boxed{m_\varphi \geq m_{\varphi,\min}}$$

- in ogni caso, avendo usato relazioni empiriche per trasformare le specifiche, al termine del progetto sarà necessario verificarne l'efficacia valutando B_3, M_r di $W(j\omega)$ e, per simulazione, t_s e $\hat{s}$ della risposta indiciale

attenuazione/reiezione dei disturbi

- così come per studiare la precisione di risposta si pone $z = 0$, per studiare l'attenuazione/reiezione dei disturbi si pone $r = 0$

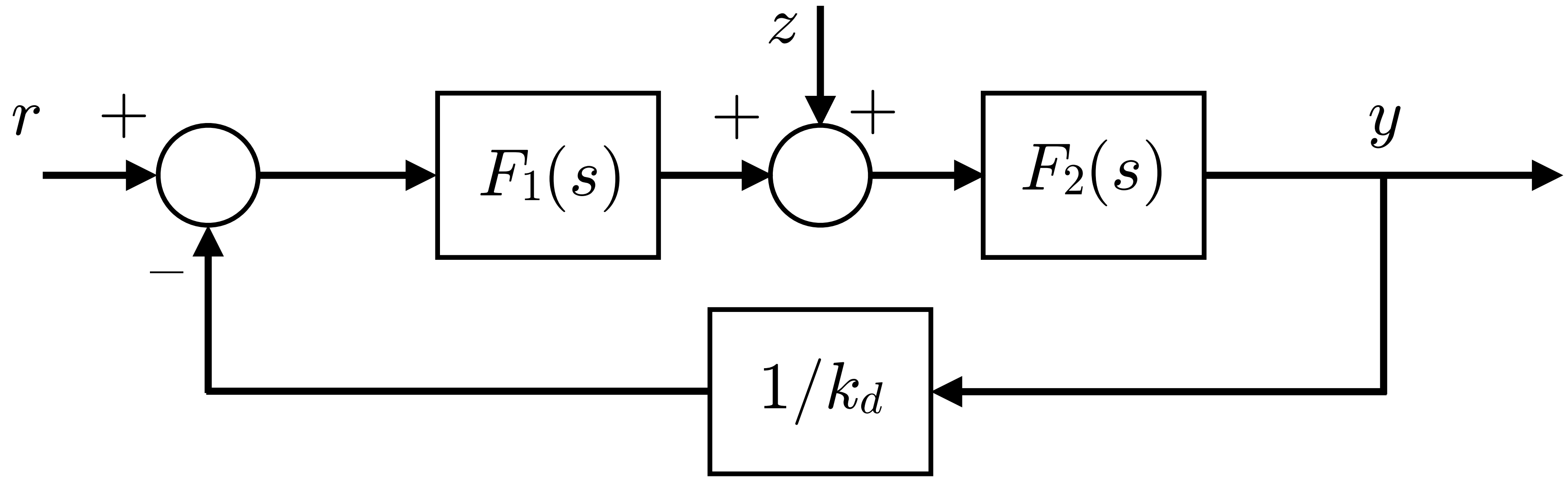
- un SdC si dice astatico rispetto a un disturbo z se la risposta a regime permanente y_z a $z = \bar{z}$ (cost) è nulla (reiezione a regime)

- come la definizione di tipo k, anche la definizione di astatismo presuppone che il SdC sia AS

- essendo $y_z = W_z(0)\bar{z}$, per avere astatismo rispetto a z la FdT del disturbo $W_z(s)$ deve avere uno zero in $s = 0$

- questo dà luogo a condizioni diverse a seconda del punto di accesso del disturbo

- caso 1: disturbo sul ramo diretto



si ha $W_z(s) = \dfrac{k_d F_2(s)}{k_d + F_1(s)F_2(s)}$ e quindi

SdC astatico rispetto a z $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{a. } F_2(s) \text{ ha uno zero in } s = 0, \text{ oppure} \\ \text{b. } F_1(s) \text{ ha un polo in } s = 0 \end{cases}$

nel caso a, anche $W(s)$ ha uno zero in $s = 0 \Rightarrow$ si annulla anche la risposta a regime a qualsiasi r costante (caso patologico)

per avere astatismo rispetto a un disturbo sul ramo diretto, è necessario un polo in $s = 0$ (integratore) a monte del disturbo

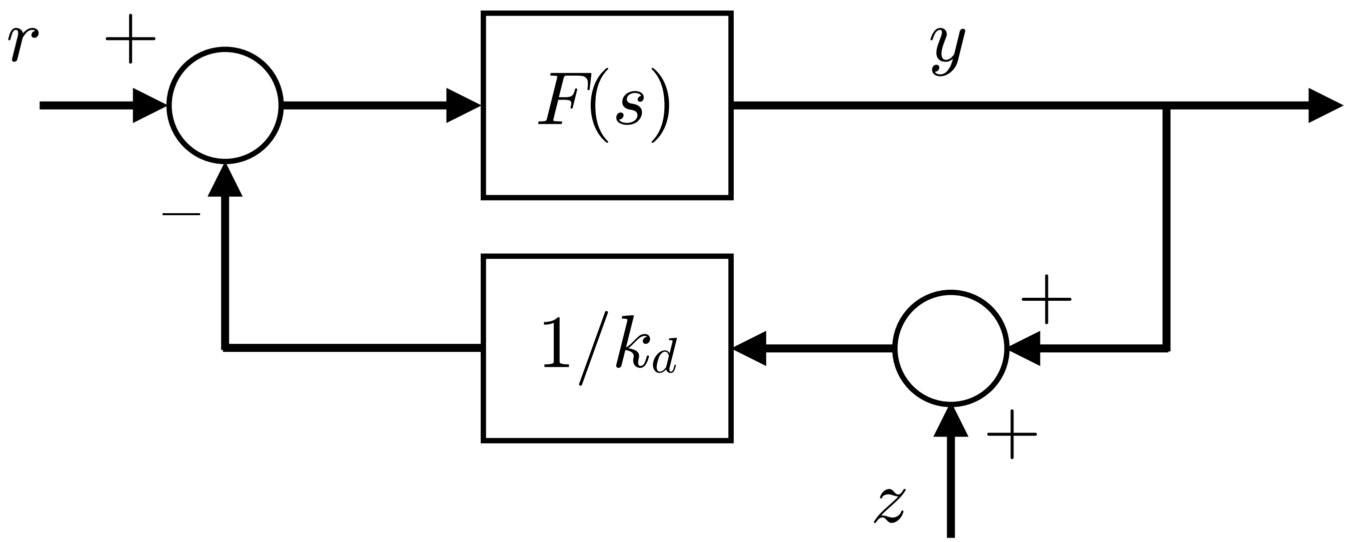
- sempre nel caso 1, in assenza di poli nell'origine in $F_1(s)$ il SdC non è astatico e la risposta a regime permanente a $z = \delta_{-1}(t)$ è

$$y_z = \left. \frac{k_d F_2(s)}{k_d + F_1(s)F_2(s)} \right|_{s=0} = \begin{cases} \dfrac{k_d k_2}{k_d + k_1 k_2} & \text{se } F_2(s) \text{ non ha poli in } s = 0 \\[2ex] \dfrac{k_d}{k_1} & \text{se } F_2(s) \text{ ha poli in } s = 0 \end{cases}$$

avendo posto $k_i =$ guadagno di $F_i(s)$ $(i{=}1{,}2)$

- importanza degli elementi integratori a monte del disturbo: inserirlo eventualmente nel controllore per garantire l'astatismo
- importanza del guadagno k_1 a monte del disturbo: se necessario, utilizzare il guadagno del controllore per aumentare k_1 in modo da soddisfare limitazioni sull'entità di y_z (attenuazione a regime)
- attenzione però a (1) rischio instabilità sistema retroazionato (2) peggioramento del transitorio (3) saturazioni degli attuatori

- caso 2: disturbo sul ramo di reazione (disturbo di misura)



si ha $W_z(s) = -\dfrac{F(s)}{k_d + F(s)} = -\dfrac{W(s)}{k_d}$ e quindi

SdC astatico rispetto a z $\Leftrightarrow W(s)$ ha uno zero in $s = 0$ (caso patologico)

i disturbi sul ramo di reazione vanno il più possibile evitati perché "subiscono lo stesso trattamento" del riferimento

attenuazione/reiezione per disturbi sinusoidali

- per quanto detto prima, si considerano disturbi sul ramo diretto
- se $z = \sin \omega t$, la risposta a regime permanente è

$$y_\omega = M_z(\omega) \sin (\omega t + \varphi_z(\omega))$$

dove $M_z(\omega)$ e $\varphi_z(\omega)$ sono modulo e fase della risposta armonica $W_z(j\omega)$ del disturbo, che ha la forma vista nella slide 18

- specifiche tipiche:

a. $|y_\omega| \leq y_{\max}$ per $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ (attenuazione in banda)

imponendo la medesima limitazione a $M_z(\omega)$ si ottiene una maschera sui ddB di $F_1(j\omega)$ (cfr. slide 11)

b. $|e_\omega| = 0$ per $\omega = \bar{\omega}$ (reiezione a una specifica pulsazione)

imponendo che $M_z(\bar{\omega}) = 0$ si deduce che $F_1(s)$ deve avere una coppia di poli c.c. in $\pm j\bar{\omega}$