Sistemi di Controllo

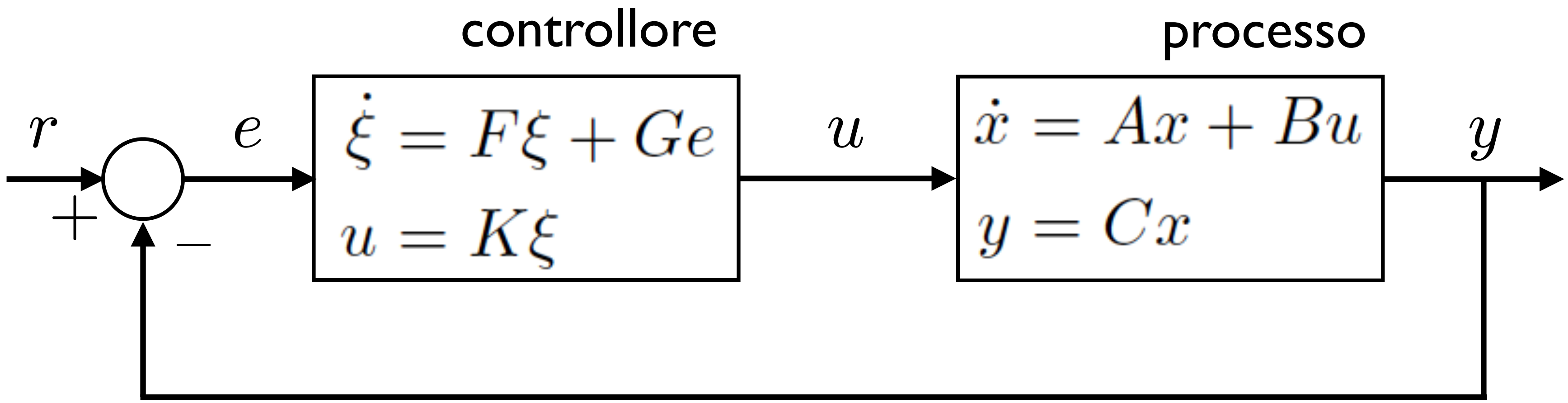
Prof. Giuseppe Oriolo

Progetto nel dominio del tempo

Dipartimento di Ingegneria Informatica
Automatica e Gestionale Antonio Ruberti

Sapienza
Università di Roma

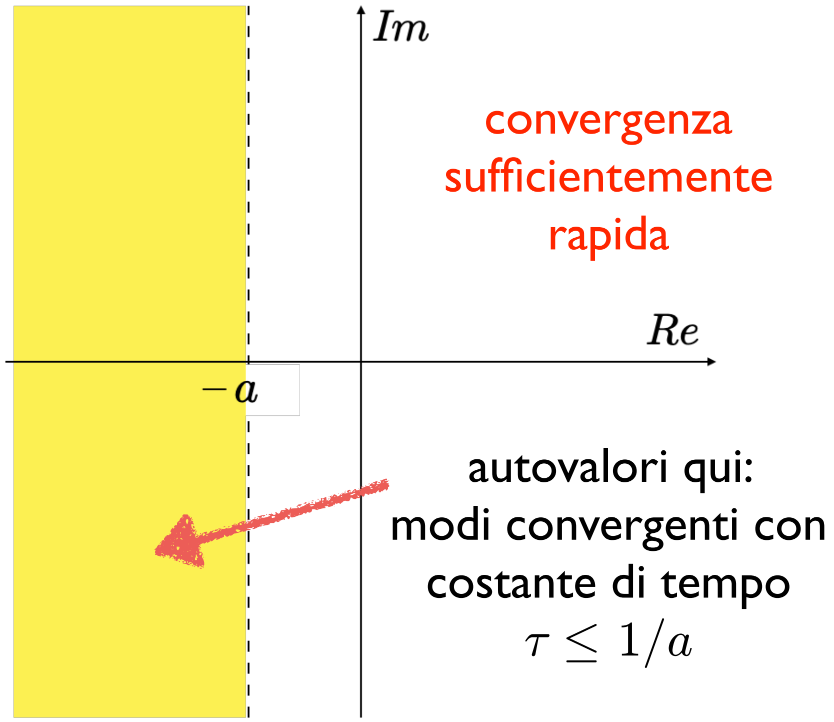
idea di base

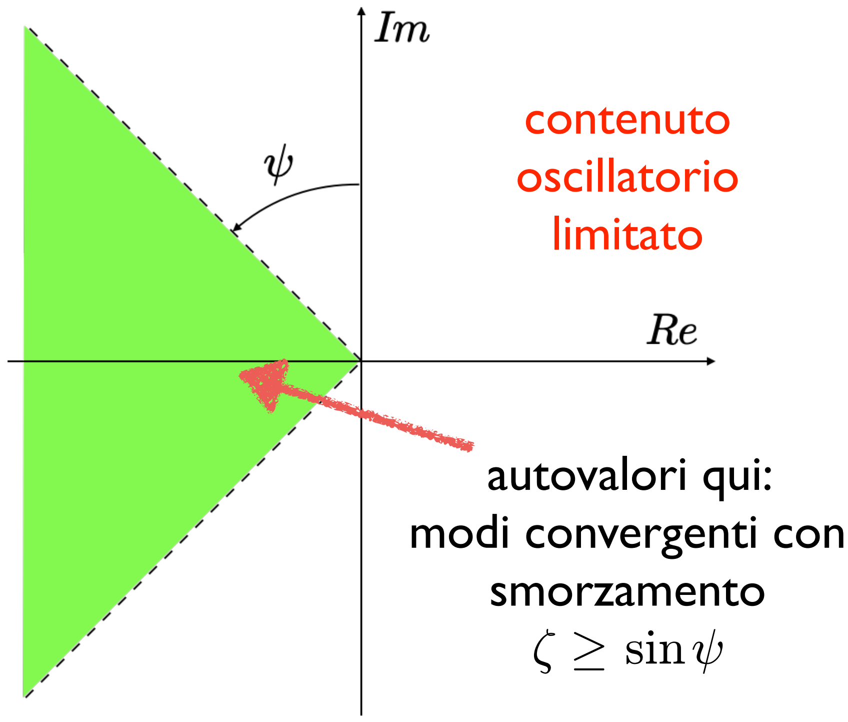


- una metodologia `moderna' basata sull'uso di rappresentazioni nello spazio di stato come modello tanto del processo quanto del controllore
- nessuna hyp sulle proprietà di stabilità del processo, che potrà essere stabile (asintoticamente o semplicemente) o instabile
- a differenza dei metodi di progetto visti finora, si presta all'estensione a processi non lineari, per i quali non esiste un equivalente del concetto di funzione di trasferimento

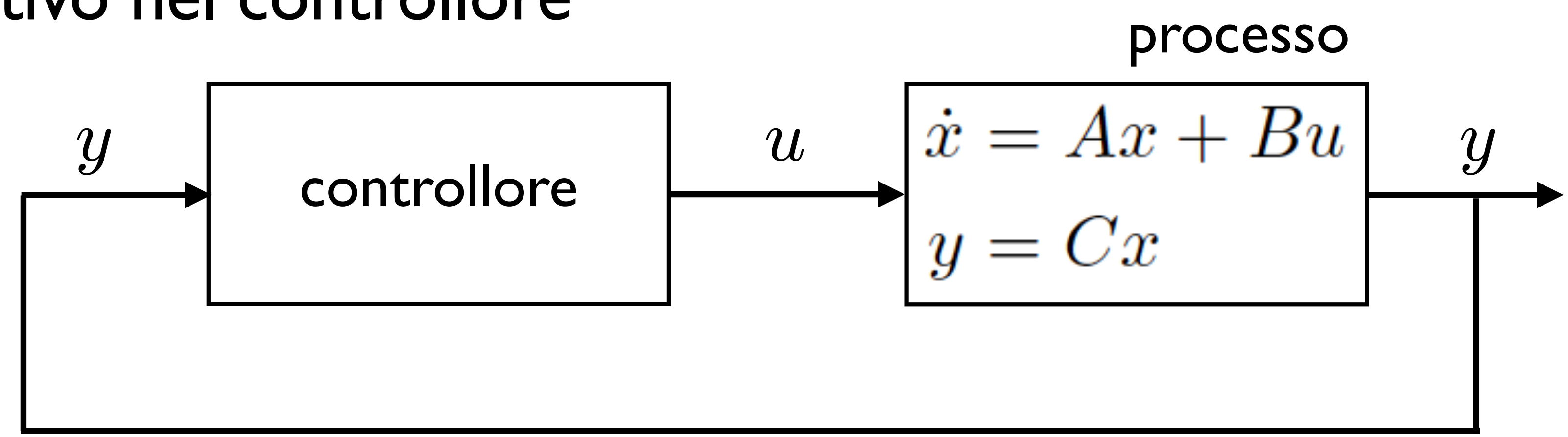
- la specifica sulla stabilità asintotica del sistema retroazionato viene soddisfatta imponendo che gli autovalori di quest'ultimo abbiano tutti $Re[\ ]<0$

- imporre la collocazione degli autovalori ad anello chiuso consente di soddisfare anche specifiche sul regime transitorio (cfr: Progetto nel dominio di Laplace, slide 2):





- consideriamo inizialmente come unico obiettivo quello di garantire la stabilità asintotica del sistema di controllo: poniamo quindi $r = 0$ nello schema precedente, assorbendo il segno negativo nel controllore

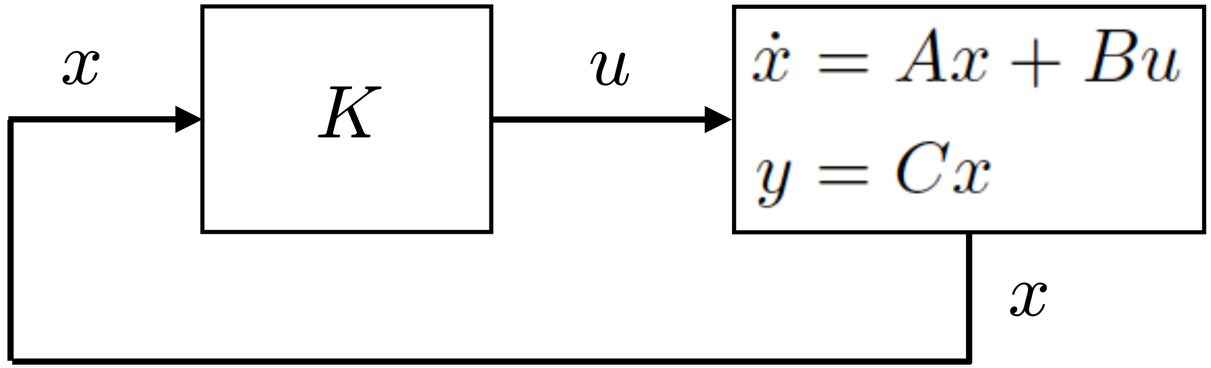


- si formula quindi il seguente problema di Assegnazione degli Autovalori (AA)

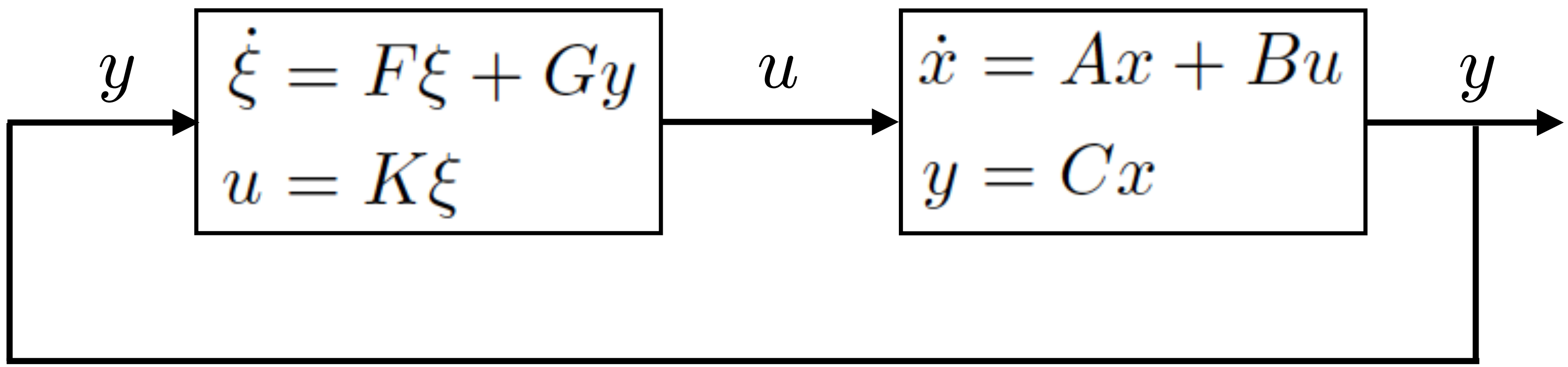
> scegliere il controllore in modo tale che gli autovalori del sistema retroazionato coincidano con certi valori desiderati

- come vedremo, la risolubilità del problema AA dipende dalle proprietà di raggiungibilità e osservabilità del processo

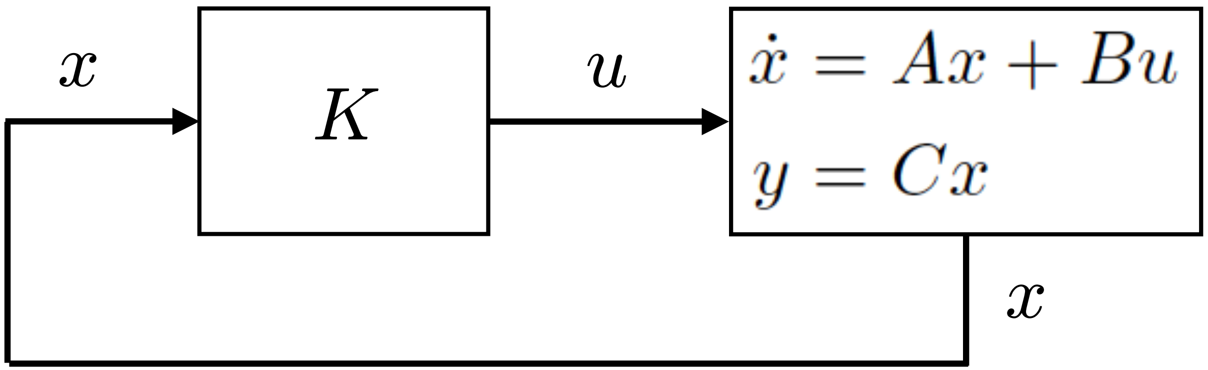
- in particolare, considereremo due versioni del problema AA, a seconda che lo stato x sia misurabile o meno
- se: x misurabile (Assegnazione degli Autovalori con Retroazione dallo Stato, AA-RS), basterà un controllore statico



- se: solo y misurabile (Assegnazione degli Autovalori con Retroazione dall'Uscita, AA-RU), servirà un controllore dinamico



AA-RS



$\underset{p\times 1}{u} = \underset{p\times n}{K}\,\underset{n\times 1}{x} \;\Rightarrow$ ad anello chiuso $\dot{x} = Ax + BKx = (\underset{n\times n}{A + BK})x$

risolvere il problema AA-RS equivale a trovare K tale che gli autovalori di $A + BK$ coincidano con n valori desiderati; si trova che ciò è possibile se e solo se il processo è raggiungibile

dim

necessità se il processo non è raggiungibile, cioè se

$$\text{rango}\, P = \text{rango}\, \left(B\ AB\ A^2B\ \ldots\ A^{n-1}B\right) = m < n$$

esiste una T, $n{\times}n$ e non singolare, tale che nelle coord $\tilde{x} = Tx$ la dinamica del processo è decomposta rispetto alla raggiungibilità:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ O & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}m \\ \}n{-}m \end{array} \\ \underbrace{\qquad}_{m}\ \underbrace{\qquad}_{n-m} \end{array} \qquad \tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ O \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}m \\ \}n{-}m \end{array}$$

dove gli autovalori di $\tilde{A}_{11}$ e di $\tilde{A}_{22}$ sono rispettivamente gli m autovalori raggiungibili (R) e gli $n{-}m$ non raggiungibili (NR) di A (gli autovalori sono invarianti rispetto a trasformazioni di coord!)

nelle nuove coord si ha $u = Kx = KT^{-1}\tilde{x} = \tilde{K}\tilde{x}$ e quindi la dinamica ad anello chiuso è

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}\,u = \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{K}\,\tilde{x} = (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})\,\tilde{x}$$

con la struttura partizionata di $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ vista in precedenza e partizionando in modo analogo $\tilde{K} = (\underbrace{\tilde{K}_1}_{m}\ \underbrace{\tilde{K}_2}_{n-m})$ si ottiene

$$\dot{\tilde{x}} = (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})\,\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1\tilde{K}_1 & \tilde{A}_{22} + \tilde{B}_2\tilde{K}_2 \\ O & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \tilde{x}$$

$\Rightarrow$ gli autovalori ad anello chiuso sono gli autovalori di $\tilde{A}_{11}+\tilde{B}_1\tilde{K}_1$ (risultanti dallo spostamento degli autovalori R di $\tilde{A}$ causato da $\tilde{K}_1$) e gli autovalori di $\tilde{A}_{22}$ (cioè gli autovalori NR di A); questi ultimi $n-m$ autovalori risultano quindi non modificabili, e caratterizzeranno il sistema ad anello chiuso indipendentemente dalla scelta di $\tilde{K}$

ne segue che la raggiungibilità del processo è condizione necessaria per la risolubilità del problema AA-RS (fine necessità) sufficienza (solo caso $p = 1$) se il processo è raggiungibile, esiste una T, $n \times n$ e non singolare, tale che nelle coord $x_c = T_c\, x$ il processo è in forma canonica di controllo

$$\dot{x}_c = A_c\, x_c + B_c\, u \qquad A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

essendo A_c in forma compagna, il suo polinomio caratteristico (che coincide con quello di A) è

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

supponiamo di voler assegnare ad $A + B\,K$, cioè ad $A_c + B_c\,K_c$, il polinomio caratteristico corrispondente agli autovalori desiderati

$$p^*(\lambda) = \lambda^n + a^*_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a^*_1\lambda + a^*_0$$

a questo scopo, basta porre

$$K_c = \begin{pmatrix} a_0 - a_0^* & a_1 - a_1^* & \dots & a_{n-1} - a_{n-1}^* \end{pmatrix}$$

infatti così si ottiene

$$A_c + B_c K_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0^* & -a_1^* & -a_2^* & -a_3^* & \dots & -a_{n-1}^* \end{pmatrix}$$

ancora in forma compagna e avente come polinomio caratteristico proprio $p^*(\lambda)$ (fine sufficienza)

per riportare la matrice K nelle coordinate originali, si consideri che $u = Kx = K_c x_c = K_c T_c x$; si avrà dunque $\boxed{K = K_c T_c}$

poiché (no dim)

$$T_c = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu A \\ \vdots \\ \mu A^{n-1} \end{pmatrix}$$

μ: ultima riga di P^{-1}

si ha

$$K = \begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu A^{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0^* & \dots & a_{n-1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu A^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \mu(a_0 I + \ldots + a_{n-1} A^{n-1}) - \mu(a_0^* I + \ldots + a_{n-1}^* A^{n-1})$$

essendo $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_0 I = 0$ (Th di Cayley-Hamilton, *ogni matrice annulla il suo polinomio caratteristico*) si ha infine

$$\boxed{K = -\mu\, p^*(A)}$$

formula di Ackermann

dove $p^*(A) = A^n + a_{n-1}^* A^{n-1} + \ldots + a_1^* A + a_0^* I$ (fine sufficienza)

- per $p = 1$ (sistemi single-input) la K è unica
- una formula alternativa ma equivalente è

$$\boxed{K = (a - a^*)(PW)^{-1}}$$

formula di Bass-Gura

dove $a = \begin{pmatrix} a_{n-1} & \dots & a_0 \end{pmatrix}$, $a^* = \begin{pmatrix} a^*_{n-1} & \dots & a^*_0 \end{pmatrix}$ e

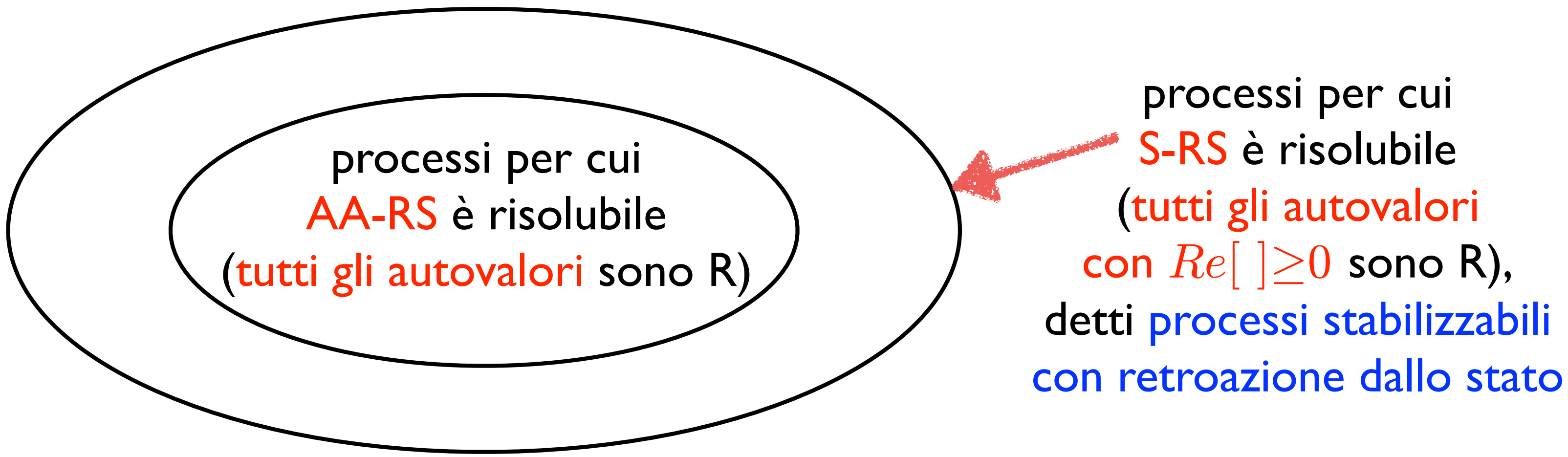
$$W = \begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- questa formula indica che lo sforzo di controllo $u = Kx$ sarà tanto maggiore quanto più si desidera spostare gli autovalori
- inoltre, entrambe le formule indicano che lo sforzo di controllo sarà tanto maggiore quanto più piccolo è $\det P$

- se: processo non raggiungibile, AA-RS non è risolubile, cioè non è possibile assegnare autovalori arbitrari al sistema retroazionato
- può darsi che si possa risolvere il seguente problema, meno stringente (Stabilizzazione con Retroazione dallo Stato, S-RS)

> determinare K in modo tale che gli autovalori di $A+BK$ abbiano tutti $Re[\ ]<0$

- la precedente dimostrazione (necessità) implica che S-RS si può risolvere se e solo se gli eventuali autovalori NR del processo (che non possono essere spostati) hanno già tutti $Re[\ ]<0$
- si ha quindi



- due opzioni per verificare la condizione di risolubilità di S-RS:

  a) effettuare la decomposizione strutturale rispetto alla raggiungibilità e analizzare la $Re[\ ]$ degli autovalori NR (cioè gli autovalori di $\tilde{A}_{22}$)

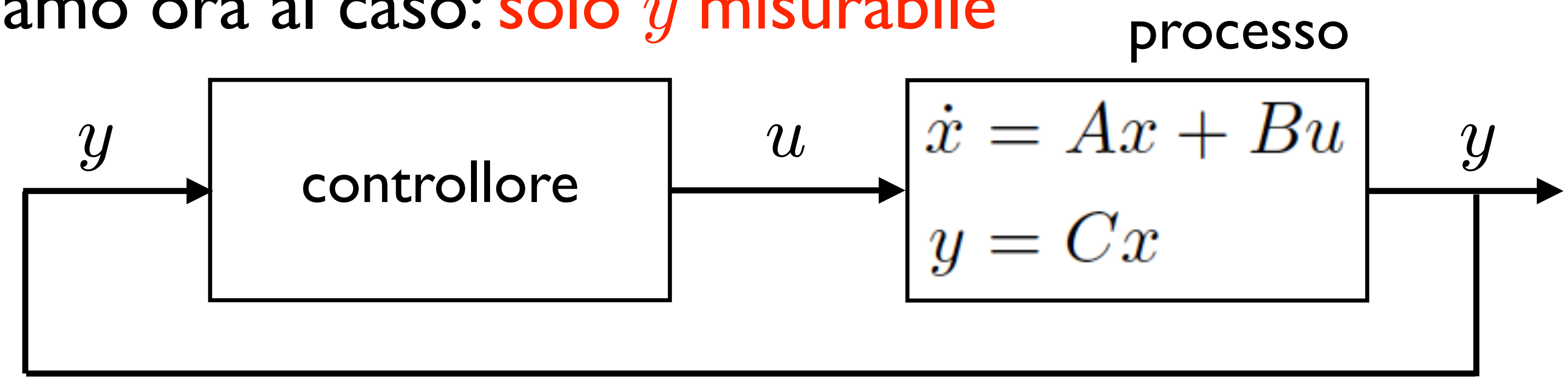
  b) individuare tutti gli autovalori con $Re[\ ]\geq 0$ e usare il PBH test per studiarne la raggiungibilità

- se S-RS è risolubile, per calcolare una K (ne esistono infinite):

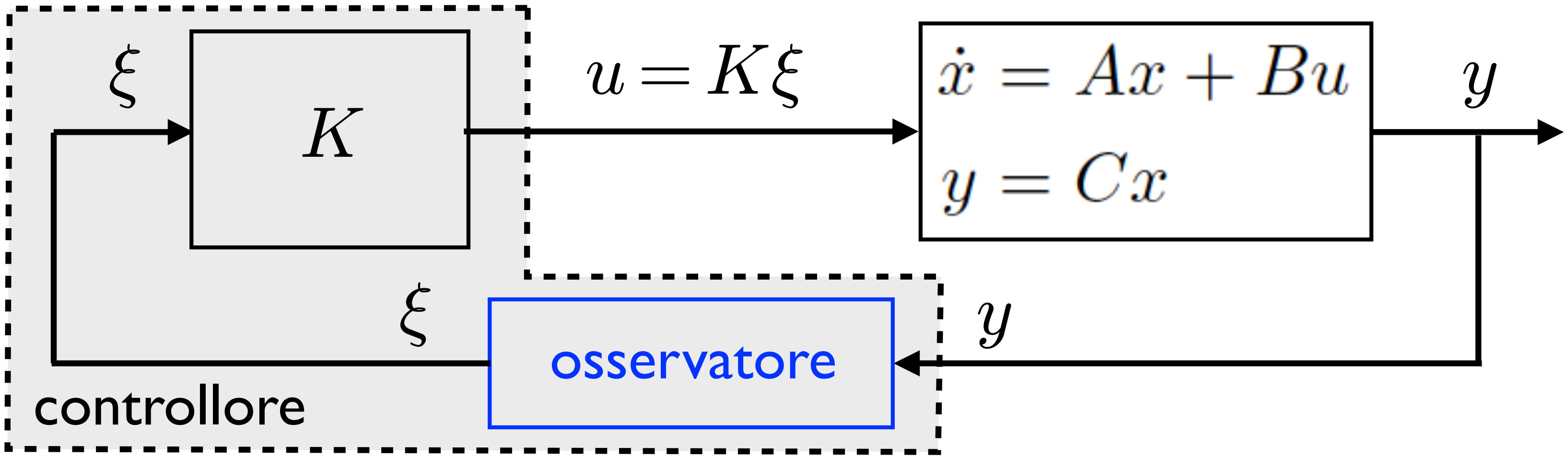
  1. effettuare la decomposizione strutturale rispetto alla raggiungibilità, evidenziando $\tilde{A}_{11}$ $(m\times m)$
  2. porre $\tilde{K} = (\tilde{K}_1\ \tilde{K}_2)$, con $\tilde{K}_1$ $m\times m$, e determinare $\tilde{K}_1$ in modo da assegnare ad $\tilde{A}_{11}+\tilde{B}_1\tilde{K}_1$ m autovalori con $Re[\ ]<0$; a questo scopo si può applicare la formula di Ackermann al sottosistema $(\tilde{A}_{11},\tilde{B}_1)$, che è R per ipotesi, o semplicemente ricavare gli elementi di $\tilde{K}_1$ eguagliando il polinomio caratteristico di $\tilde{A}_{11}+\tilde{B}_1\tilde{K}_1$ a quello desiderato (vista la dimensione ridotta del sottosistema); $\tilde{K}_2$ si sceglie arbitrariamente
  3. ritornare nelle coordinate originali ponendo $K = \tilde{K}\,\tilde{T}$

AA-RU: costruzione di un osservatore

- passiamo ora al caso: solo y misurabile



per assegnare gli autovalori mediante retroazione dall'uscita, si può concepire uno schema di questo tipo



dove l'osservatore è un dispositivo che produce una stima ξ dello stato x a partire dalla misura dell'uscita

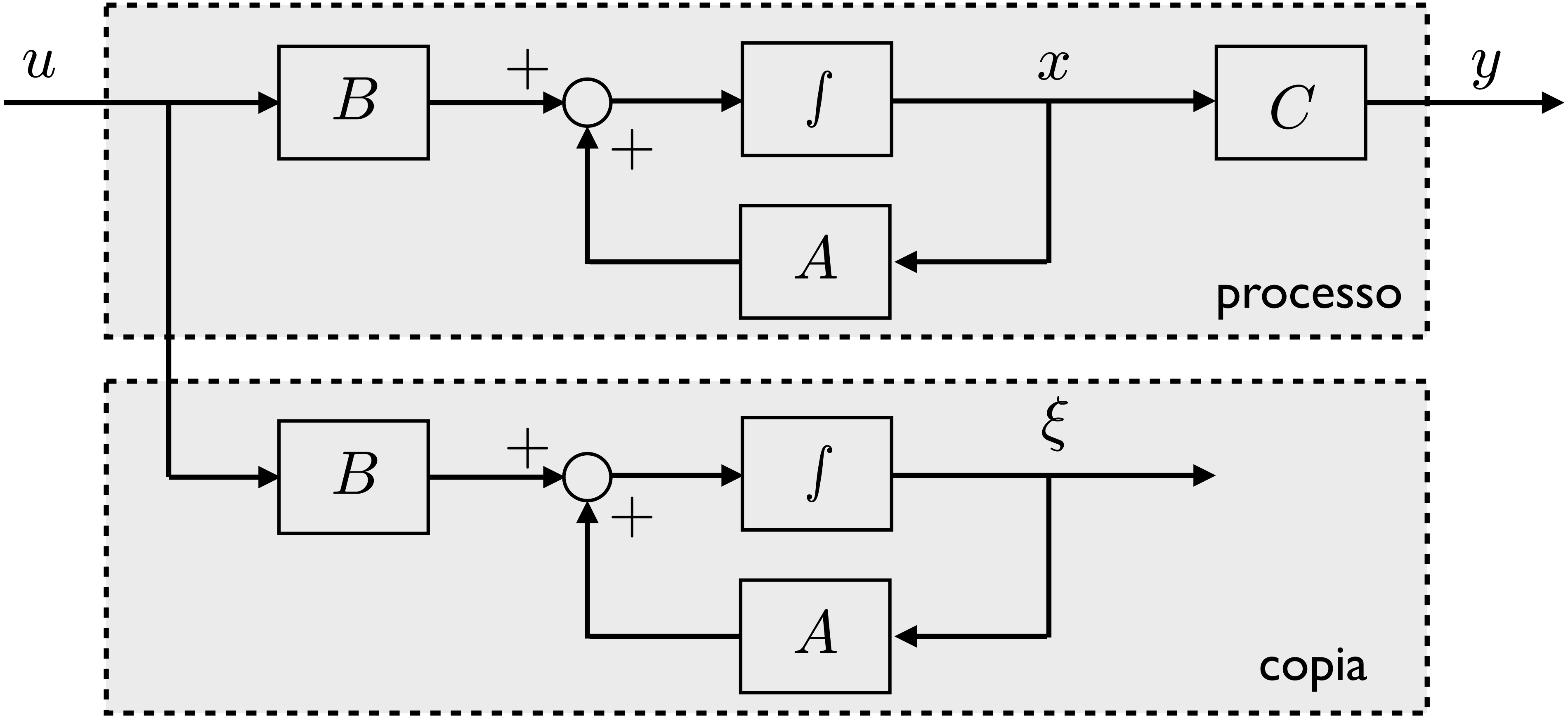
- questo schema concettuale pone due ordini di problemi
  1. come si può realizzare un osservatore? e sotto quali condizioni ciò è possibile?
  2. è efficace usare ξ al posto di x nella legge di controllo? ovvero, il controllore risultante sarà ancora in grado di assegnare arbitrariamente gli autovalori ad anello chiuso, come accadeva nel problema AA-RS?

- in merito al primo problema, si noti che uno schema algebrico basato sull'inversione istantanea dell'equazione $y = Cx$ non è possibile, poiché C è una matrice $q \times n$ con $q < n$; in altri termini, $Cx = y$ è un sistema lineare con meno equazioni che incognite, che ammette quindi infinite soluzioni x per ogni y

- si ricorre dunque a uno schema dinamico (cioè con memoria) che realizza una forma di inversione iterativa dell'equazione di uscita utilizzando anche la conoscenza dell'ingresso u

osservatore asintotico dello stato

- idea: usare una copia del processo, con lo stesso forzamento u



processo $\dot{x} = Ax + Bu$ copia $\dot{\xi} = A\xi + Bv = A\xi + Bu$

- posto $e = x - \xi$ (errore di osservazione) si ha

$$\boxed{\dot{e} = \dot{x} - \dot{\xi} = Ax + Bu - A\xi - Bu = Ae}$$

quindi, con questo dispositivo e converge a zero (cioè, la stima ξ converge allo stato x) purché tutti gli autovalori di A abbiano $Re[\ ]<0$, ovvero, solo se e solo se il processo è AS

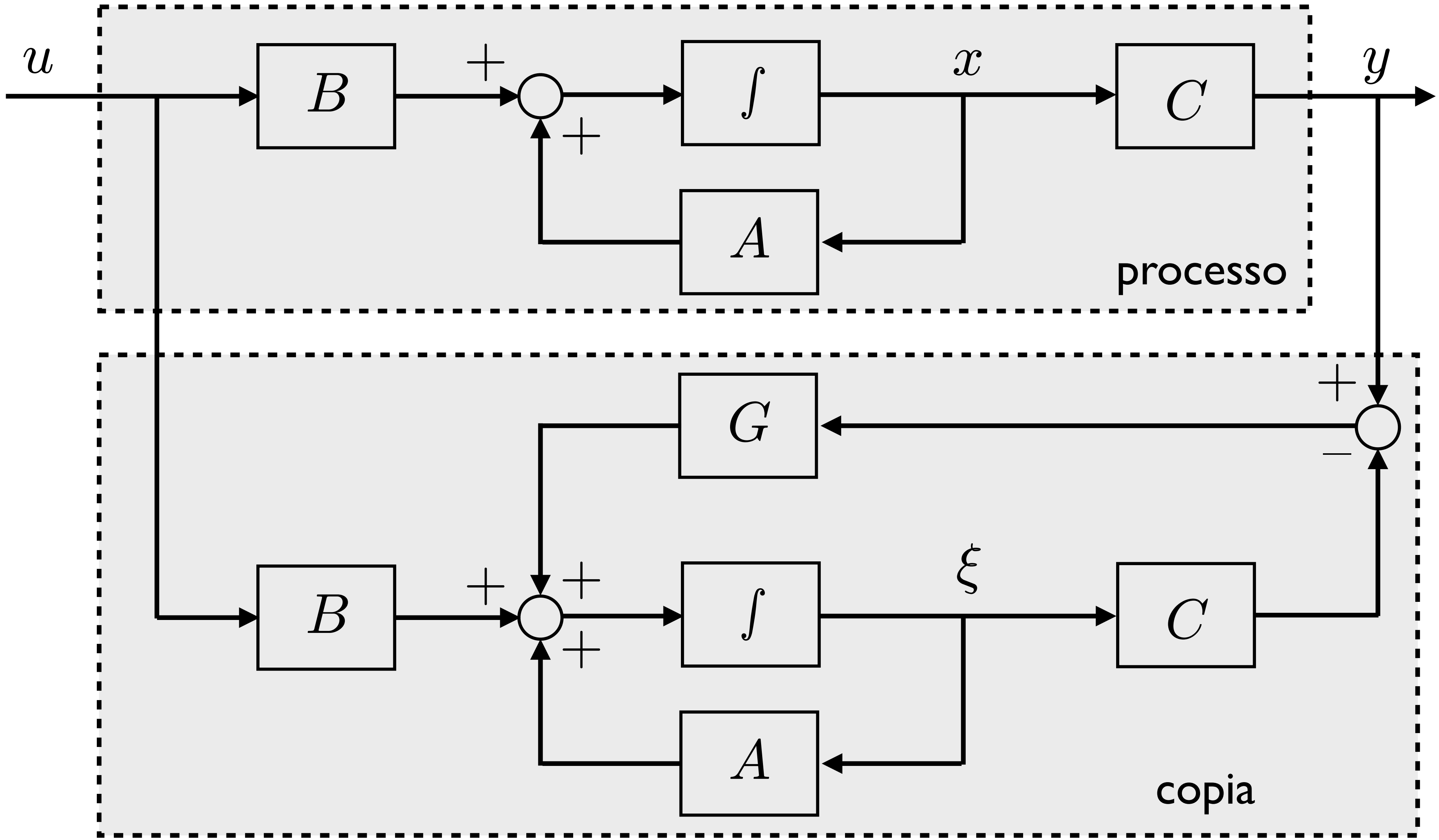
- un'analisi del precedente schema mostra che il dispositivo non utilizza la misura di y, che pure è disponibile; lo modifichiamo quindi aggiungendo un ulteriore forzamento per la copia

$$\boxed{\dot{\xi} = A\xi + Bu + G(y - C\xi)}$$

osservatore asintotico dello stato

dove G, che è un parametro di progetto, ha dimensioni $q \times n$, mentre $y - C\xi$ rappresenta la differenza tra l'uscita vera e quella calcolata sulla base di ξ

- il nuovo schema a blocchi è il seguente



dinamica di osservazione

ora $\dot{e} = Ax + Bu - A\xi - Bu - G(y - C\xi) = \boxed{(A - GC)}e$

- è possibile scegliere G in modo tale da imporre a e una dinamica convergente a zero e anzi caratterizzata da autovalori arbitrari?
- si formula il seguente problema (Osservazione dall'Uscita, O-U)

> determinare G in modo tale che gli autovalori di $A - GC$ coincidano con n valori desiderati

- poichè gli autovalori di una matrice coincidono con gli autovalori della trasposta, ed essendo

$$(A - GC)^T = A^T + C^T(-G^T) = A' + B'K'$$

un'opportuna K' (e quindi G) esiste se e solo se la coppia A', B' soddisfa la condizione di raggiungibilità; visto che

$$\left(B' \; \ldots \; (A')^{n-1}B' \right) = \left(C^T \; \ldots \; (A^T)^{n-1}C^T \right) = \begin{pmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}^T$$

segue che O-U è risolubile se e solo se il processo è osservabile

- K' si calcola applicando la formula di Ackermann al problema AA-RS ausiliario associato alla coppia A', B'; al termine si pone $G = -(K')^T$ per definire completamente l'osservatore

- se: processo non osservabile, O-U non è risolubile, cioè non è possibile assegnare autovalori arbitrari alla dinamica di e

- può darsi però che si possa risolvere il seguente problema meno stringente (Rilevazione dall'Uscita, R-U)

  determinare G in modo tale che gli autovalori di $A - GC$ abbiano tutti $Re[\ ] < 0$

  il dispositivo così ottenuto (detto anche rilevatore) fornirà comunque una stima asintotica ξ dello stato x

- si trova facilmente che R-U si può risolvere se e solo se gli eventuali autovalori non osservabili (NO) del processo hanno tutti $Re[\ ] < 0$

dim necessità

se il processo non è osservabile, cioè se

$$\text{rango}\, Q = \text{rango} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = m < n$$

esiste una T, $n \times n$ e non singolare, tale che nelle coord $\tilde{x} = Tx$ la dinamica del processo è decomposta rispetto all'osservabilità:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\tilde{A}_{11} \\ \tilde{A}_{21}\end{matrix}}_{m} & \underbrace{\begin{matrix}O \\ \tilde{A}_{22}\end{matrix}}_{n-m} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}m \\ \}n{-}m \end{matrix} \qquad \tilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} \underbrace{\tilde{C}_1}_{m} & \underbrace{O}_{n-m} \end{pmatrix}$$

dove gli autovalori di $\tilde{A}_{11}$ e di $\tilde{A}_{22}$ sono rispettivamente gli m autovalori osservabili (O) e gli $n{-}m$ non osservabili (NO) di A

lavorando nelle nuove coord, e partizionando $\tilde{G}$ in modo analogo ad $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_1 \\ \tilde{G}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}m \\ \}n\!-\!m \end{matrix}$$

la dinamica di osservazione assume una forma triangolare a blocchi

$$\tilde{A} - \tilde{G}\tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} - \tilde{G}_1\tilde{C}_1 & O \\ \tilde{A}_{11} - \tilde{G}_2\tilde{C}_1 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ gli autovalori della dinamica di osservazione sono gli autovalori di $\tilde{A}_{11} - \tilde{G}_1\tilde{C}_1$ (risultanti dallo spostamento degli autovalori O di A causato da $\tilde{G}_1$) e gli autovalori di $\tilde{A}_{22}$ (cioè gli autovalori NO di A); questi ultimi $n - m$ autovalori risultano non modificabili, e dunque caratterizzano la dinamica di osservazione indipendentemente dalla scelta di $\tilde{G}$ (fine dim)

- se R-U è risolubile, per calcolare una G (ne esistono infinite):

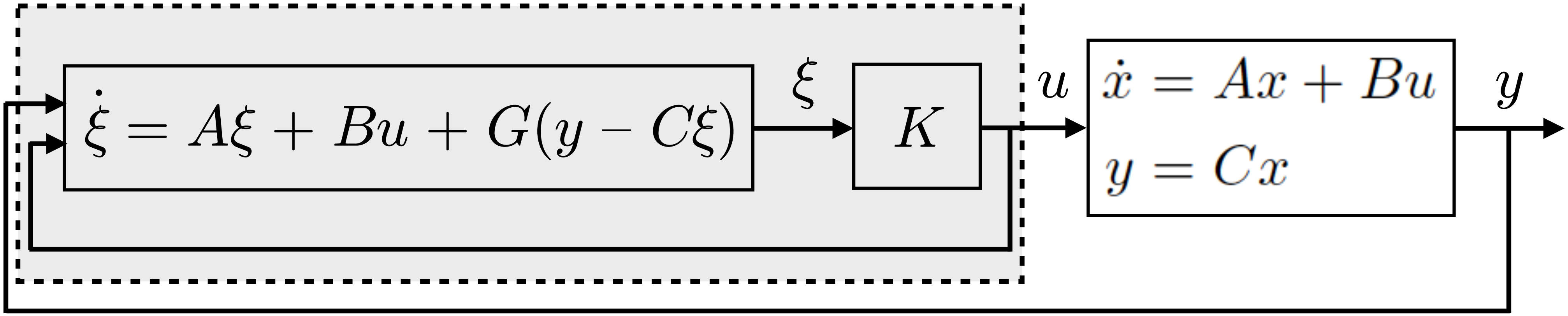
  1. effettuare la decomposizione strutturale rispetto all'osservabilità, evidenziando $\tilde{A}_{11}$ $(m \times m)$
  2. porre $\tilde{G} = (\tilde{G}_1{}^T \; \tilde{G}_2{}^T)^T$, con $\tilde{G}_1$ $m \times m$, e determinare $\tilde{G}_1$ in modo da assegnare ad $\tilde{A}_{11} - \tilde{G}_1 \tilde{C}_1$ m autovalori con $Re[\;] < 0$, mentre $\tilde{G}_2$ si sceglie arbitrariamente
  3. ritornare nelle coordinate originali ponendo $G = T^{-1} \tilde{G}$ (in questo modo infatti $\tilde{A} - \tilde{G}\tilde{C} = TAT^{-1} - TGCT^{-1} = T(A - GC)T^{-1}$ cosicché $A - GC$ ha gli stessi autovalori di $\tilde{A} - \tilde{G}\tilde{C}$)

- si ha quindi

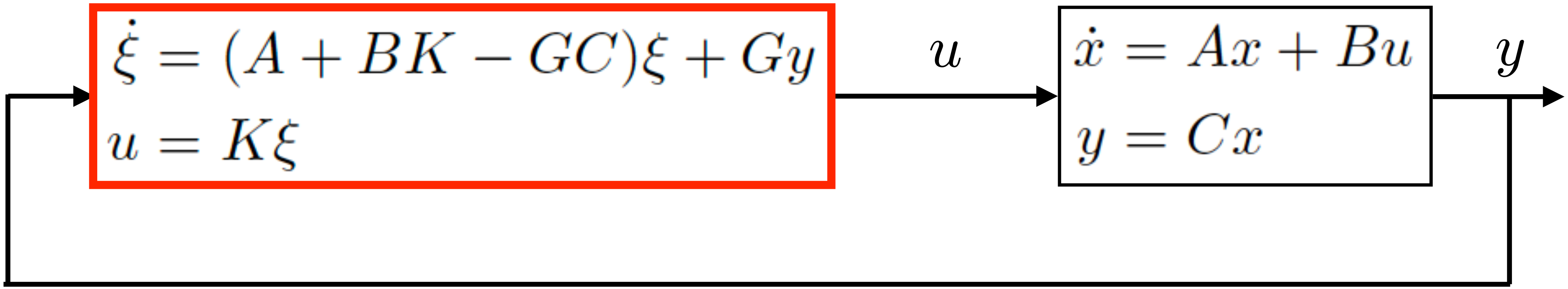
processi per cui R-U è risolubile (tutti gli autovalori con $Re[\;] \geq 0$ sono O), detti processi rilevabili dall'uscita

AA-RU: principio di separazione

- avendo chiarito la struttura dell'osservatore, che utilizza tanto l'ingresso u che l'uscita y del processo, lo schema di controllo per la soluzione del problema AA-RU assume questa forma



ovvero, essendo $u = K\xi$



(cfr. il secondo schema della slide 5)

- a questo punto possiamo affrontare la seconda domanda posta in precedenza, cioè: è efficace usare ξ al posto di x nella legge di controllo? ovvero, il controllore risultante sarà ancora in grado di assegnare arbitrariamente gli autovalori ad anello chiuso, come accadeva nel problema AA-RS?

- le equazioni di stato del sistema retroazionato sono

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + BK\xi$$
$$\dot{\xi} = (A + BK - GC)\xi + Gy = (A + BK - GC)\xi + GCx$$

ovvero, in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BK \\ GC & A + BK - GC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$$

da cui però non è agevole vedere gli autovalori

- effettuiamo perciò una trasformazione di coordinate da (x, ξ) a $(x, e) = (x, x - \xi)$; si vede facilmente che tale trasformazione è invertibile e che l'equazione di stato assume la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ O & A - GC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$$

da cui si conclude che (principio di separazione)

autovalori sistema retroazionato	$=$	autovalori $A + BK$	$\cup$	autovalori $A - GC$

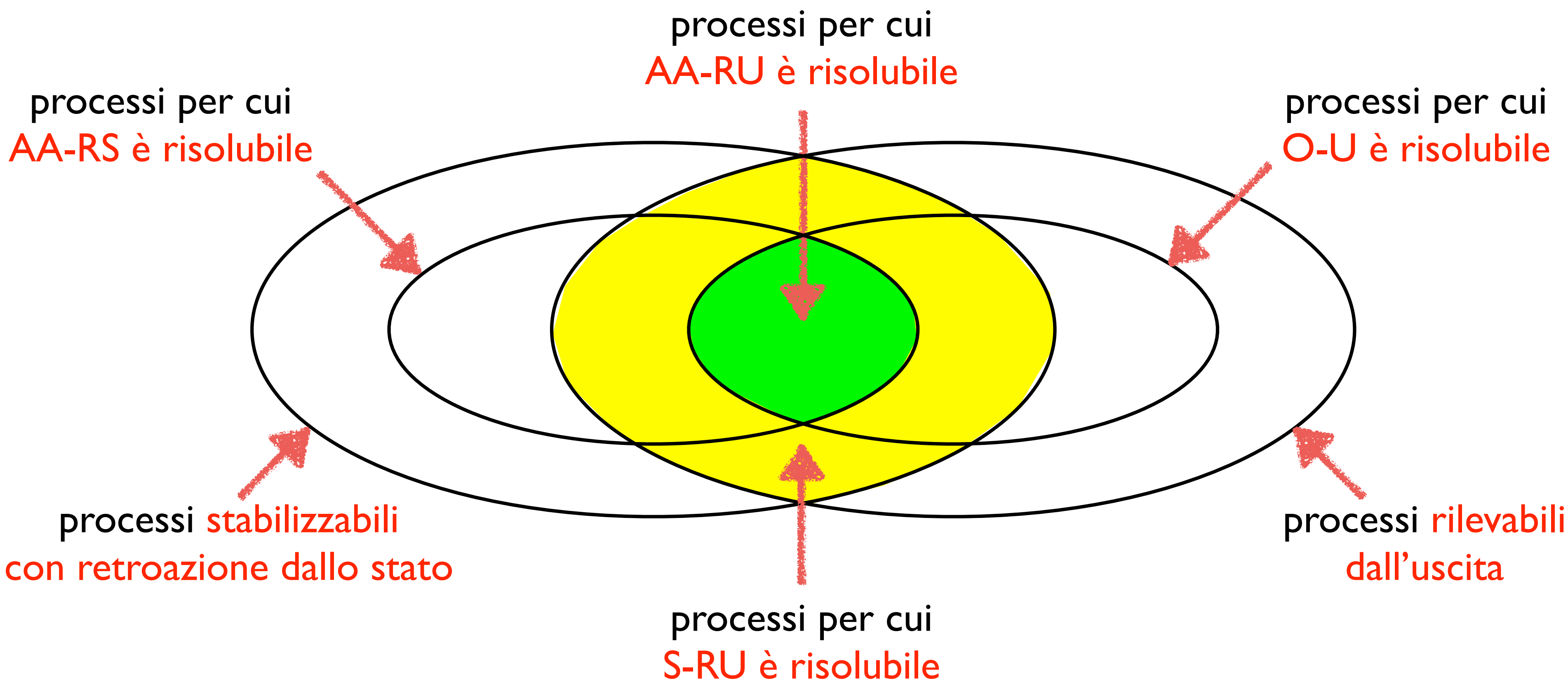
autovalori del processo controllato, che dipendono da K

autovalori della dinamica di osservazione, che dipendono da G

- se il processo è raggiungibile e osservabile, entrambi questi gruppi di autovalori si possono assegnare arbitrariamente, risolvendo così il problema AA-RU

- se il processo è stabilizzabile con retroazione dallo stato e rilevabile dall'uscita (cioè, se eventuali autovalori con $Re[\ ]\geq 0$ sono sia R che O) si può fare in modo che gli autovalori di entrambi i gruppi abbiano tutti $Re[\ ]<0$, risolvendo così il problema di Stabilizzazione con Retroazione dall'Uscita, S-RU

- si ha quindi



- il controllore utilizzato nello schema di slide 25 può anche essere rappresentato mediante la sua funzione di trasferimento

$$\Gamma(s) = K(sI - A - BK + GC)^{-1}G$$

se la $P(s)$ ha n poli (ovvero, se il processo è raggiungibile e osservabile) anche $\Gamma(s)$ avrà n poli; il controllore che risolve il problema AA-RU ha quindi lo stesso ordine del processo

- si può abbassare la dimensione del controllore usando un osservatore ridotto, che stima $n-1$ componenti dello stato, ricostruendo poi l'ultima componente dall'equazione di uscita; ne segue che è possibile assegnare gli autovalori (e quindi i poli) via retroazione dall'uscita con un controllore di ordine $n-1$ (cfr: Progetto nel dominio di Laplace, slide 24)

- nel caso generale, si trova che $\Gamma(s)$ ha tanti poli quanti sono gli autovalori di A che sono R oppure O; eventuali autovalori NR e NO di A saranno autovalori nascosti del controllore