Sistemi di Controllo

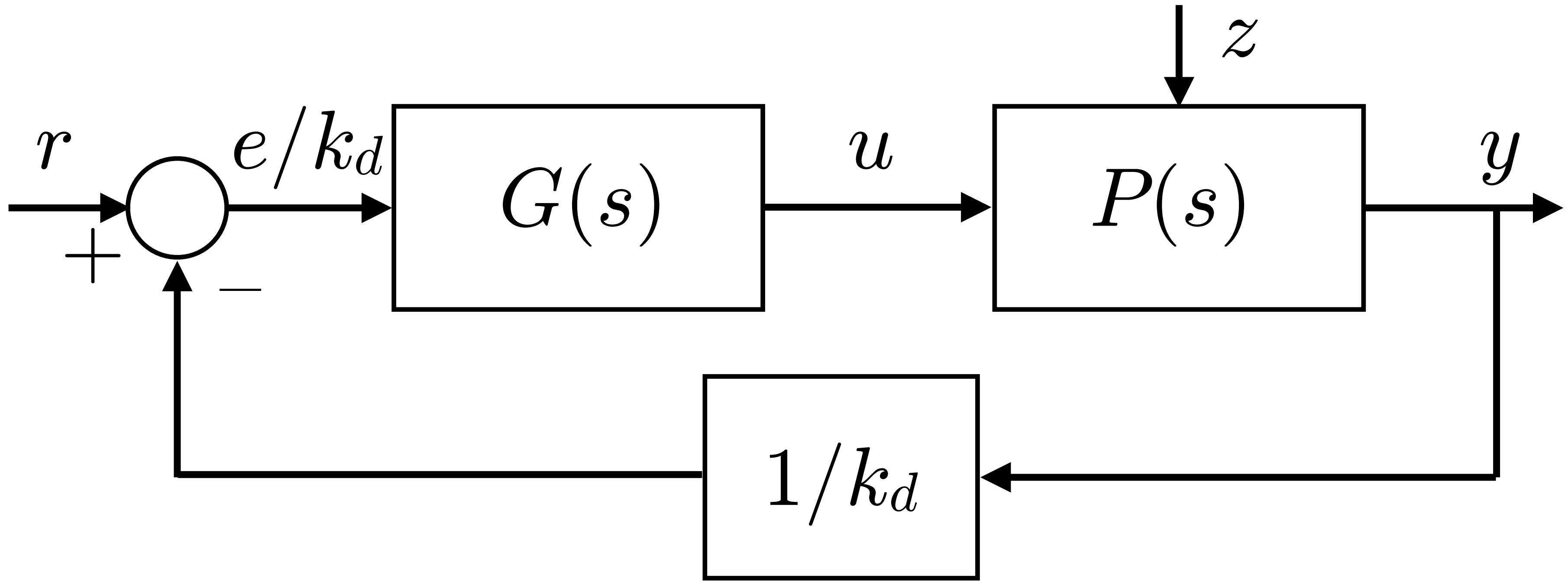
Prof. Giuseppe Oriolo

Progetto nel dominio di Laplace

Dipartimento di Ingegneria Informatica Automatica e Gestionale Antonio Ruberti

Sapienza Università di Roma

idea di base



- una metodologia \`classica' basata sull'uso di FdT come modelli e del luogo delle radici come strumento principale

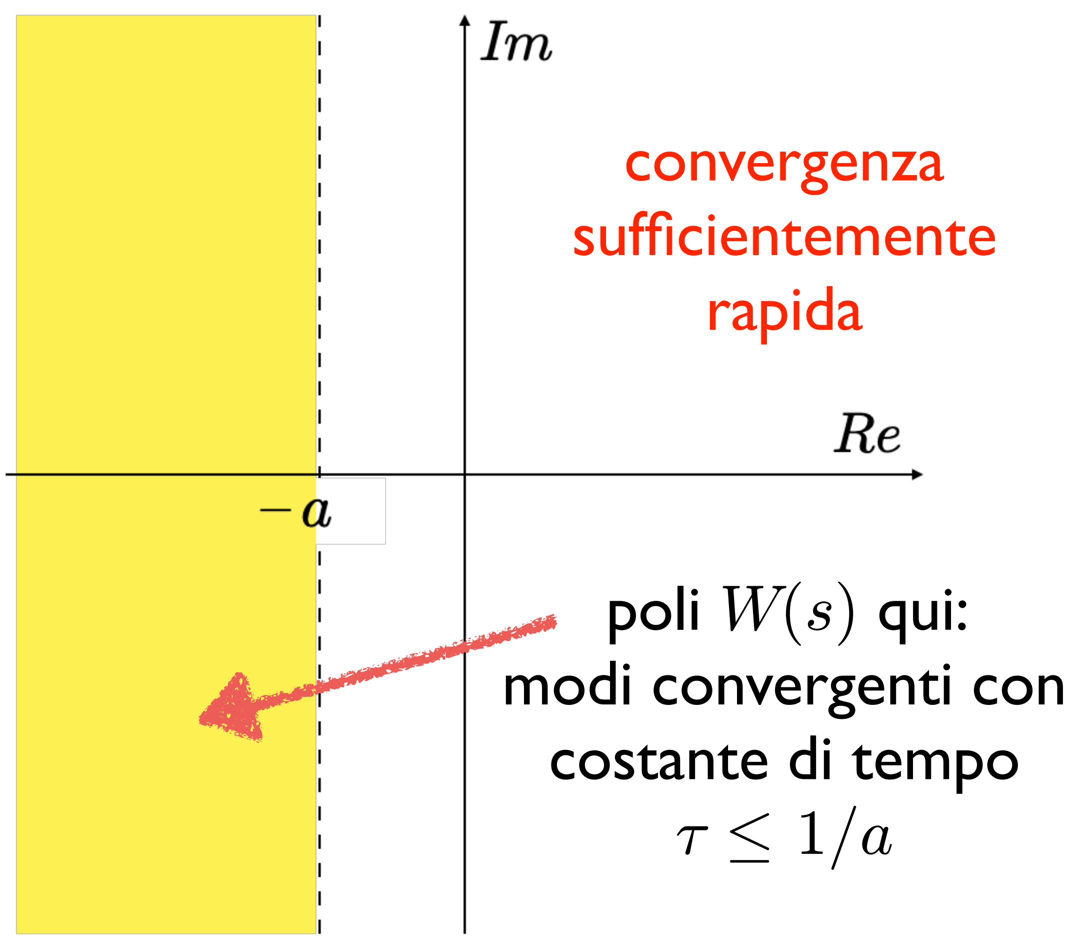
- nessuna hyp sulla FdT del processo $P(s)$, che potrà anche contenere poli con $Re[\ ]>0$; si avrà quindi in generale $n_F^+ \lesseqgtr 0$

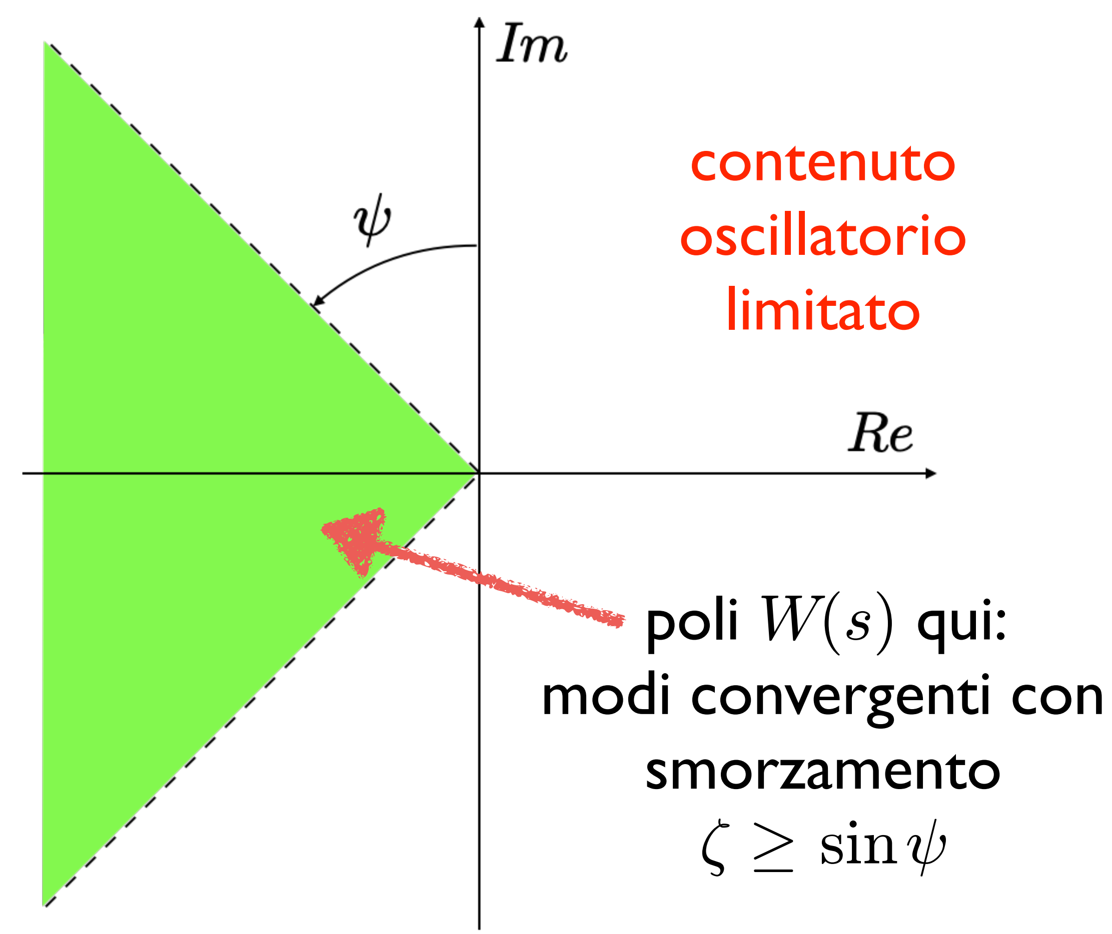
- in questa situazione, la condizione $m_\varphi > 0$ (criterio di Bode) non è né necessaria né sufficiente per la AS del SdC

- di conseguenza, il progetto non viene sviluppato in frequenza

- la specifica sulla stabilità asintotica del sistema retroazionato viene soddisfatta imponendo che la FdT $W(s)$ di quest'ultimo abbia tutti i poli a $Re[\ ]<0$

- imporre la collocazione dei poli di $W(s)$ consente di soddisfare anche specifiche sul regime transitorio:





- il controllore viene in questo caso progettato nella forma

$$\boxed{G(s) = \frac{R(s)}{s^h}}$$

(cfr: Progetto in frequenza, slide 4)

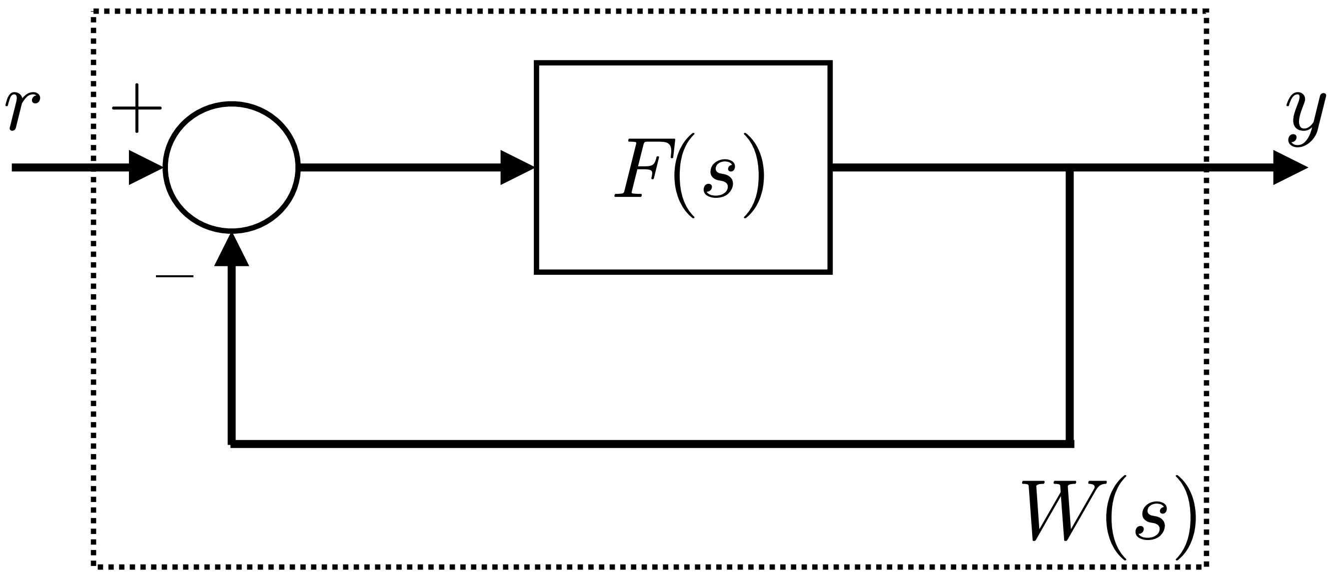
- i poli nell'origine s^h $(h = 0{,}1{,}2\ldots)$ vengono usati per conseguire il tipo richiesto o a ottenere astatismo rispetto ai disturbi

- se necessario, in $G(s)$ vengono inseriti elementi risonanti puri per riproduzione (reiezione) di riferimenti (disturbi) sinusoidali

- la funzione compensatrice $R(s)$ ha il compito di modificare la $F(s)$ per garantire che i poli di $W(s)$ appartengano alla zona desiderata (AS + precisione regime transitorio)

- al termine si può aumentare il guadagno di $R(s)$ per soddisfare specifiche a regime sull'errore e_k o sulla risposta al disturbo y_z

luogo delle radici



hyp: retroazione unitaria
(non restrittiva)

$$F(s) = \frac{N_F(s)}{D_F(s)} = k\,\frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_F(s)}{D_F(s) + N_F(s)}$$

- lo strumento fondamentale di progetto nel dominio di Laplace è il luogo delle radici (LdR), ovvero il luogo geometrico dei poli di $W(s)$ al variare di k

- annullando $D_W(s)$ si ottiene la seguente equazione del LdR

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i) + k\prod_{i=1}^{m}(s - z_i) = 0 \qquad \text{(ELR)}}$$

grado n

- (ELR) si può riscrivere come

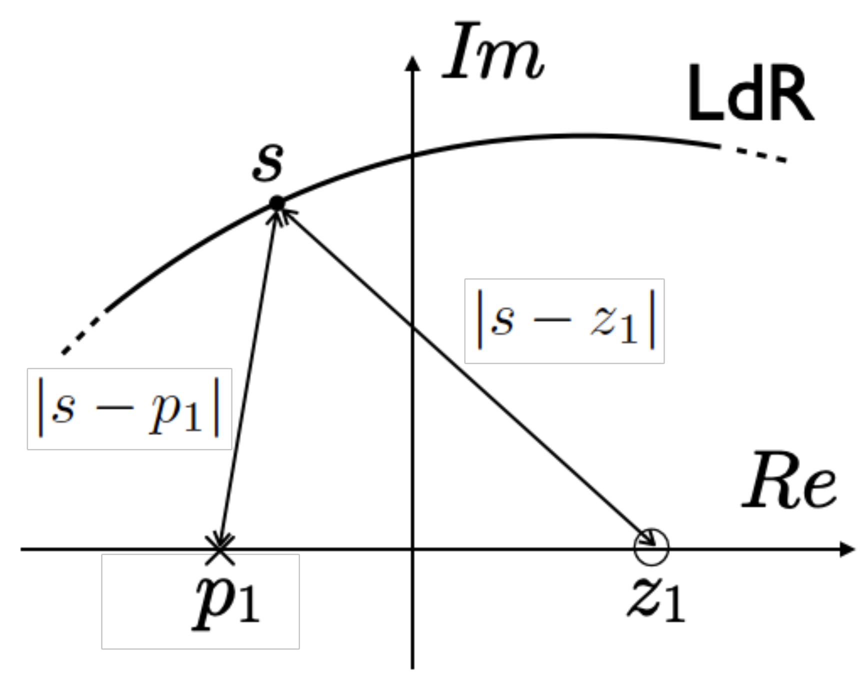
$$\prod_{i=1}^{n}(s-p_i) = -k\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)$$

che, in quanto uguaglianza tra numeri complessi, implica due uguaglianze tra numeri reali

$$\begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^{n}|s-p_i| = |k|\prod_{i=1}^{m}|s-z_i| & \text{condizione di modulo (CdM)} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i) = \angle(-k) + \sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i) + h\cdot 360^\circ \quad h=0,\pm1,\dots & \text{condizione di fase (CdF)} \end{cases}$$

- la CdM dà $|k| = \dfrac{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|}$

utile per la graduazione del LdR



- la CdF si può riscrivere come

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \angle(s-p_i) - \sum_{i=1}^{m} \angle(s-z_i) = 180^\circ + h \cdot 360^\circ & \text{per } k>0 \text{ (luogo positivo)} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \angle(s-p_i) - \sum_{i=1}^{m} \angle(s-z_i) = h \cdot 360^\circ & \text{per } k<0 \text{ (luogo negativo)} \end{cases}$$

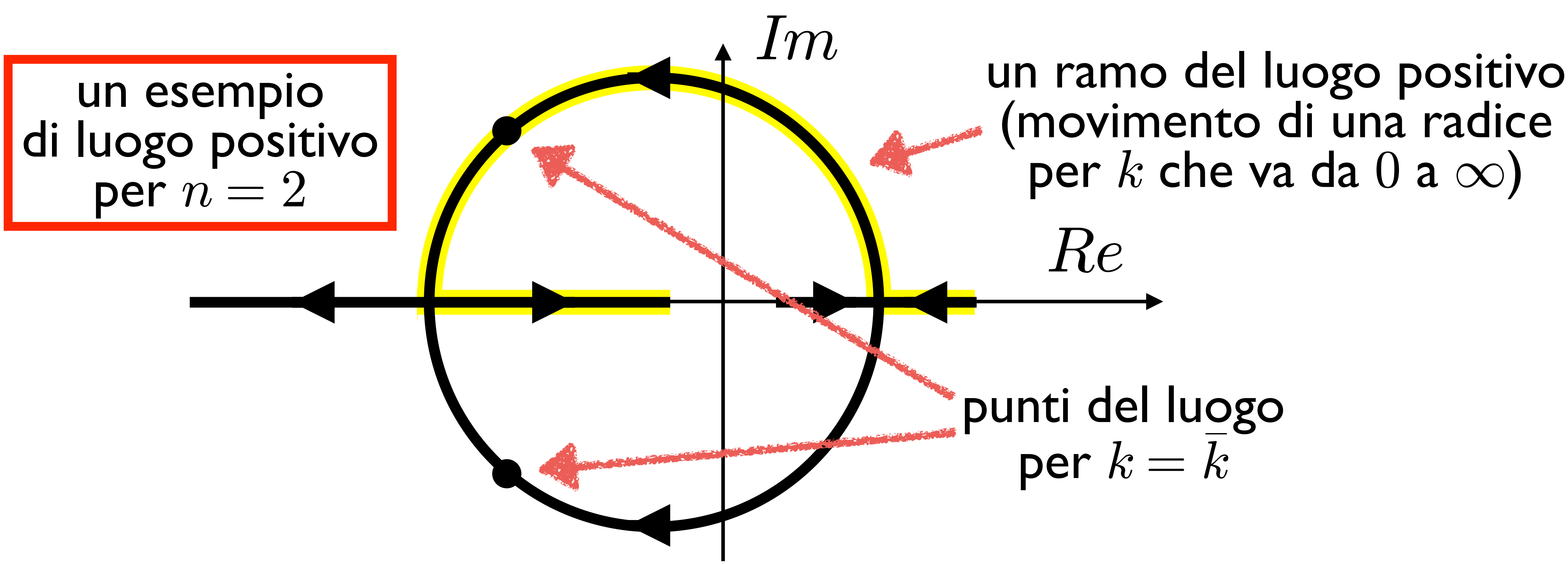
poiché non contengono k, queste condizioni possono essere usate direttamente per il tracciamento del LdR, o per derivare delle regole che consentano un tracciamento qualitativo

- il tracciamento qualitativo è utile per

  - schizzo a mano di luoghi semplici o parametrici
  - verifica di luoghi ottenuti al computer
  - previsione dell'effetto di azioni compensatrici

regole di tracciamento del LdR

- (ELR) è un'equazione polinomiale a coefficienti reali, di grado n e parametrica in k, quindi si hanno le seguenti proprietà di base:
  - a ogni valore di k corrispondono n radici di (ELR), cioè n punti del LdR, che possono essere reali o complesse coniugate
  - ogni radice al variare di k descrive un ramo del LdR
  - il LdR è una curva continua al variare di k
  - il LdR è una curva simmetrica rispetto all'asse reale



- R1: i poli $p_1,\ldots,p_n$ di $F(s)$ sono punti del LdR (cioè poli di $W(s)$) per $k = 0$

  (da (ELR))

- R2: appartengono al luogo positivo (LdR+) i punti dell'asse reale che lasciano a destra un numero totale dispari di poli e zeri di $F(s)$; il resto dell'asse reale appartiene al luogo negativo (LdR-)

  (dalla CdF, versione sdoppiata; 0 si considera pari)

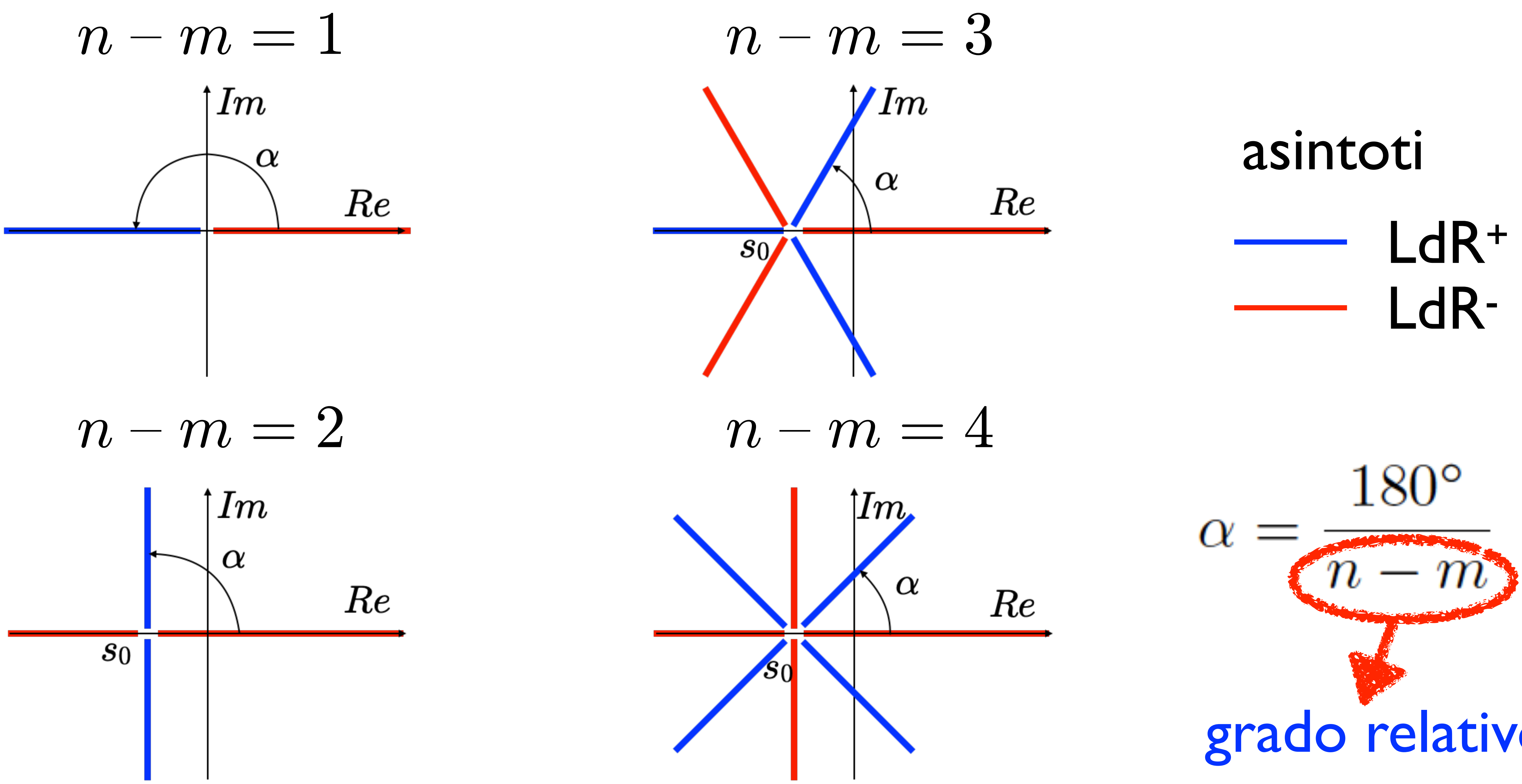
- R3: per $k \to +\infty$ (LdR+) e per $k \to -\infty$ (LdR-):
  m rami del luogo convergono sugli zeri $z_1,\ldots,z_m$ di $F(s)$
  $n{-}m$ rami del luogo divergono all'infinito lungo asintoti

  (da (ELR) per $k = \pm\infty$, notando che il grado si abbassa di $n{-}m$ e le corrispondenti radici "perse" divergono all'infinito)

- R4: gli asintoti sono $n-m$ semirette per il LdR⁺ e altrettante per il LdR⁻; esse formano una stella regolare centrata in $(s_0,0)$, con

$$\boxed{s_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}}$$

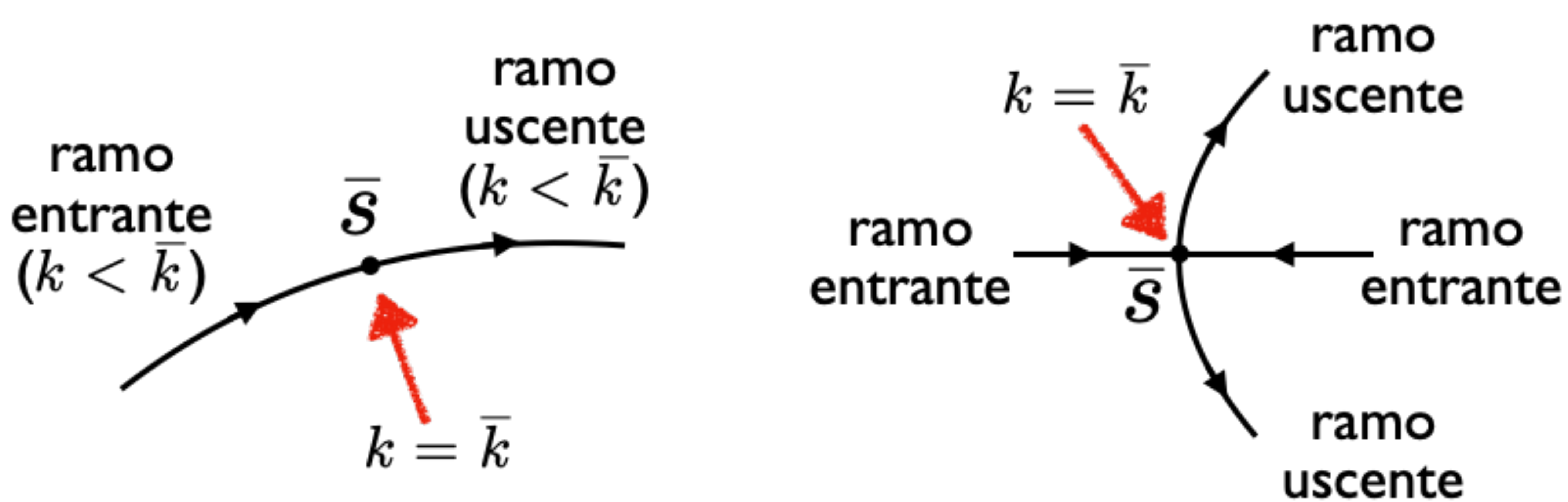
centro degli asintoti



$$\alpha = \frac{180°}{n-m}$$

grado relativo

- se per un valore $\bar{k}$ di k l'equazione (ELR) ammette una radice $\bar{s}$ di molteplicità $\mu > 1$, $\bar{s}$ è un punto singolare del LdR
- in s si incontrano 2μ rami del luogo, μ entranti e μ uscenti



punto regolare
$(\mu = 1)$

punto singolare
(qui $\mu = 2$)

- eventuali poli o zeri multipli di $F(s)$, rispettivamente punti del LdR per k=0 e k=$\pm\infty$, sono senz'altro punti singolari

- i punti singolari devono risolvere per k reale il sistema

$$\begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+k\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)=0 \\ \displaystyle\frac{d}{ds}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+k\,\frac{d}{ds}\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)=0 \end{cases}$$

- eliminando k tra le due si ottiene l'equazione dei punti singolari

$$\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)\frac{d}{ds}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)-\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)\frac{d}{ds}\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)=0 \qquad \text{(EPS/1)}$$

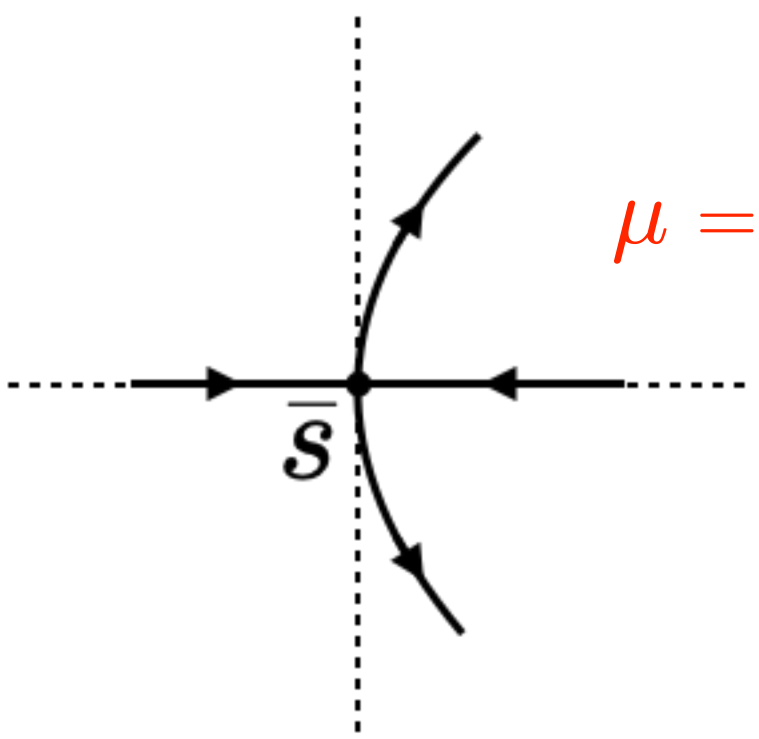
  che ha grado $n+m-1$

- dividendo quest'ultima per $\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)$ si ha

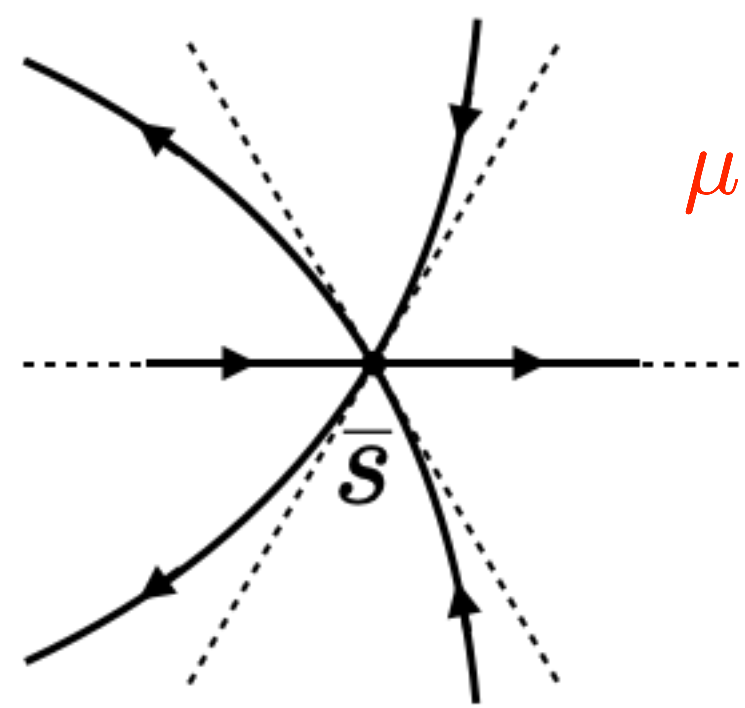
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-p_i}-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s-z_i}=0 \qquad \text{(EPS/2)}$$

  che, per come è ricavata, non fornisce poli e zeri multipli di $F(s)$

- R5: il LdR contiene al più $n+m-1$ punti singolari, da ricavarsi risolvendo (EPS1) o (EPS2) e prendendo le radici corrispondenti a k reali attraverso (ELR); se si è usata (EPS2), a questi punti vanno aggiunti eventuali poli o zeri multipli di $F(s)$
- R6: in un punto singolare del LdR, radice di (ELR) di molteplicità $\mu > 1$, si incontrano 2μ rami del luogo, alternativamente entranti e uscenti; le tangenti a questi rami nel punto singolare formano una stella regolare



$\mu = 2$

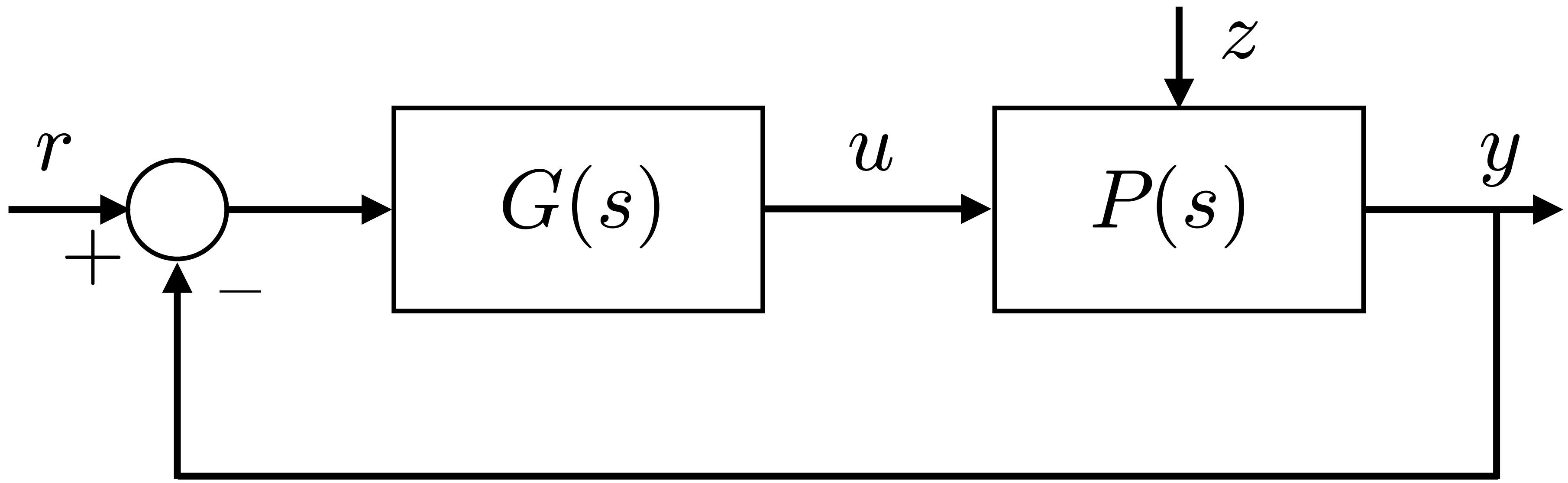


$\mu = 3$

algoritmo di tracciamento del LdR

1. marcare la posizione di poli ($\times$) e zeri ($\bigcirc$) di $F(s)$
2. assegnare a LdR⁺ e LdR⁻ l'asse reale (R2)
3. tracciare gli asintoti (R4) e i rami che convergono a essi (R3)
4. determinare i versi dei rami secondo il movimento delle radici per k che va da $-\infty$ a $+\infty$:
   - LdR⁺ esce dai $\times$, entra negli $\bigcirc$ e va agli asintoti
   - LdR⁻ esce dagli $\bigcirc$, entra nei $\times$ e viene dagli asintoti
5. se necessario, calcolare i punti singolari (R5) e l'andamento del LdR nell'intorno di tali punti (R6)
6. determinare eventuali valori critici di k (per i quali il LdR attraversa l'asse immaginario) applicando il CdR a $D_W(s)$

progetto con il LdR



- il controllore viene progettato nella forma

$$\boxed{G(s) = \frac{R(s)}{s^h}}$$

  con h fissato all'inizio del progetto (tipo e/o astatismo); se necessario, in $G(s)$ vengono aggiunti elementi risonanti puri

- per iniziare, assumiamo che la funzione compensatrice $R(s)$ debba solo garantire che i poli di $W(s)$ abbiano $Re[\ \ ] < 0$ (AS)
- ulteriori specifiche (entità errore, transitorio): dopo

- si assuma che $P(s)$ sia priva di zeri a $Re[\ ] \geq 0$ (processo a fase minima), cosicché gli (eventuali) zeri sono nel semipiano sinistro
- la FdT del processo modificato $\hat{F}(s) = P(s)/s^h$ ha gli stessi zeri
- per $k \to +\infty$, m rami del LdR+ (e cioè m poli di $W(s)$) convergeranno sugli zeri (R3), e quindi nel semipiano sinistro
- i restanti $n - m$ rami (qui n indica il numero di poli di $\hat{F}(s)$) convergeranno sugli asintoti del LdR+; questi ultimi giacciono interamente nel semipiano sinistro solo in due casi:
   a. $n - m = 1$
   b. $n - m = 2$ e $s_0 < 0$
- la stabilizzazione dei sistemi a fase minima consiste dunque nel ricondursi a uno di questi due casi e successivamente usare un k sufficientemente grande

stabilizzazione di processi a fase minima: algoritmo

1. porre $R(s) = k_R$ e verificare se esistono valori di k_R per cui il sistema retroazionato è AS (LdR+CdR); altrimenti proseguire
2. se $n - m > 2$, riportare il grado relativo a 2 aggiungendo $n - m - 2$ zeri in $R(s)$
3. (ora $n - m = 2$) se:
   a. $s_0 < 0$: scegliere un k_R abbastanza elevato (CdR) da garantire AS
   b. $s_0 \geq 0$: spostare il centro degli asintoti nel semipiano sinistro aggiungendo in $R(s)$ una coppia polo-zero, e poi scegliere un k_R abbastanza elevato (CdR) da garantire AS
4. se necessario, recuperare la realizzabilità del controllore $G(s)$ aggiungendo poli sufficientemente \`lontani'

note sull'algoritmo

- se la $\hat{F}(s) = P(s)/s^h$ ha $n - m = 1$, oppure $n - m = 2$ e $s_0 < 0$, l'algoritmo si arresterà certamente al passo 1
- al passo 2: gli zeri eventualmente aggiunti devono essere nel semipiano sinistro per preservare la proprietà di fase minima
- al passo 2: se possibile, scegliere gli zeri da aggiungere in modo da ottenere un centro degli asintoti nel semipiano sinistro
- al passo 3b: con la coppia polo-zero nella forma $\dfrac{s+\bar{z}}{s+\bar{p}}$ si ha

$$s_0' = s_0 - \frac{\bar{p} - \bar{z}}{2}$$

spostamento del centro degli asintoti

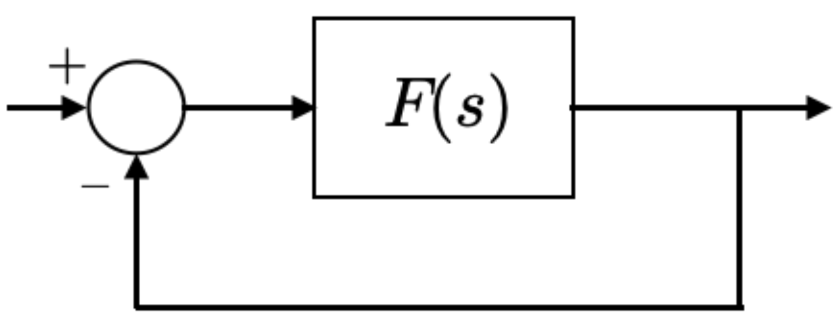
e si dovrà quindi scegliere $\bar{p}$ sufficientemente maggiore di $\bar{z}$, oltre che $\bar{z} > 0$ per preservare la proprietà di fase minima

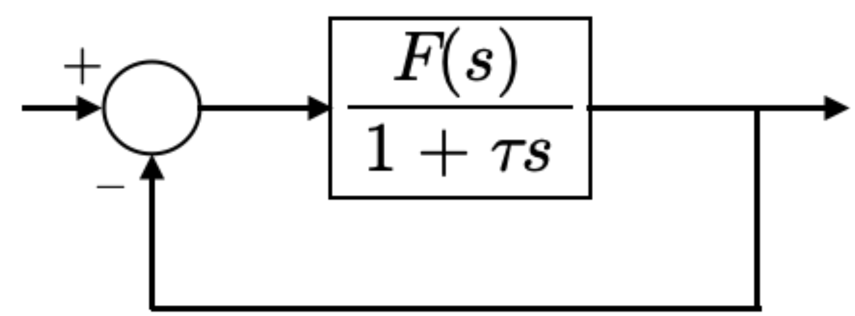
- al passo 4: nel caso generale il controllore assume la forma

$$G(s) = k_R \frac{(s+\bar{z}_1)\dots(s+\bar{z}_{n+m-2})}{s^h} \frac{s+\bar{z}}{s+\bar{p}}$$

se questa risulta essere impropria (dunque irrealizzabile) si può rendere propria aggiungendo un numero opportuno di poli nella forma $1+\tau s$, con τ sufficientemente piccolo

- infatti si ha la seguente proposizione:

se 

è AS, lo è anche 

purché $0 < \tau < \tau_{\max}$

dim dal CdN, considerando che un polo nella forma $1+\tau s$ non modifica il ddN nell'intorno del punto critico se τ è abbastanza piccolo

- per il calcolo di $\tau_{\max}$ si può usare il CdR

implicazioni dell'algoritmo di stabilizzazione

- un processo a fase minima avente grado relativo $n-m$ può sempre essere stabilizzato con un controllore di dimensione $n-m-1$
  - infatti: se l'obiettivo è solo la stabilizzazione, si ha $h=0$, e il controllore che risulta dalla successione dei passi 1-4 ha appunto a tale dimensione

- un processo a fase minima può sempre essere stabilizzato con un controllore asintoticamente stabile (stabilizzabilità forte)
  - infatti: se l'obiettivo è solo la stabilizzazione, si ha $h=0$, e il controllore risulta dalla successione dei passi 1-4, che prevedono l'aggiunta di poli esclusivamente nel semipiano sinistro

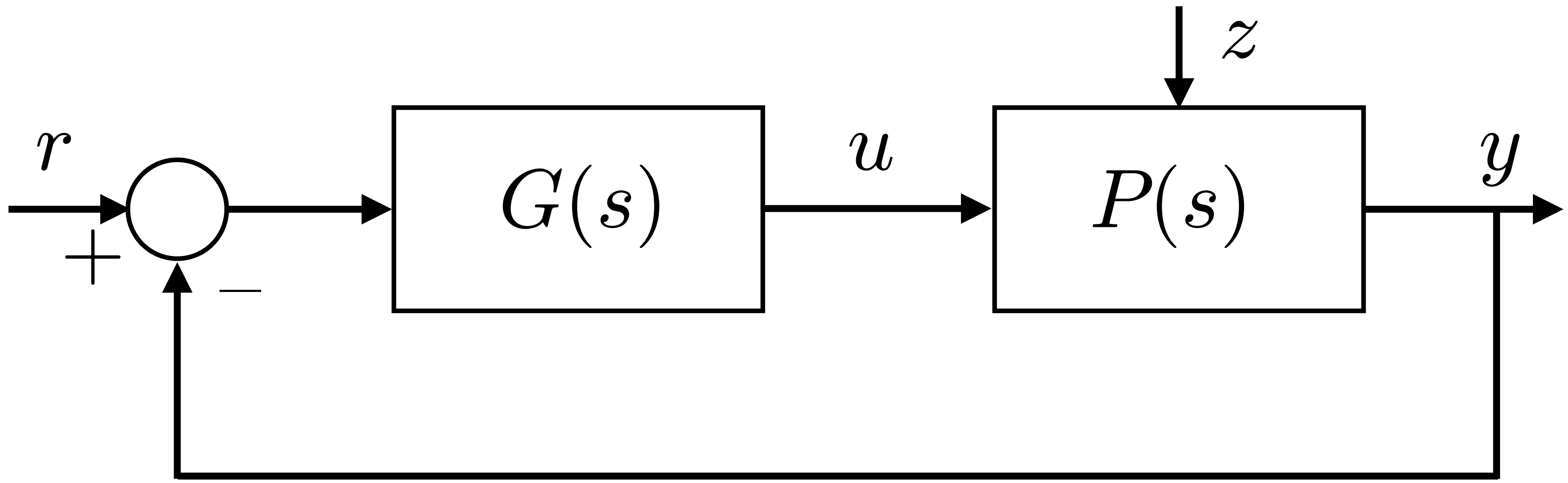
specifiche aggiuntive

- in presenza di una richiesta del tipo $|k_F| \geq \ldots$, proveniente da specifiche sull'entità dell'errore (o della risposta al disturbo) a regime, il valore di k_R dovrà essere sufficientemente grande da soddisfare anche questa (oltre che garantire la AS)

- se, invece della semplice AS, si richiedono poli con $Re[\quad] \leq -a$ (cfr: slide 3), sia gli eventuali zeri aggiunti dall'algoritmo (su cui convergono altrettanti poli di $W(s)$) che il centro degli asintoti dovranno rispettare la stessa condizione, e il valore minimo di k_R andrà calcolato applicando il CdR al polinomio $D_W(s-a)$

- se, invece della semplice AS, si richiedono poli con $\zeta \geq \sin\psi$ (cfr: slide 3), gli eventuali zeri aggiunti dall'algoritmo dovranno rispettare la stessa condizione, e il valore minimo di k_R andrà calcolato applicando il CdR al polinomio $D_W(s\,e^{j\psi}) \cdot D_W(s\,e^{-j\psi})$

progetto per assegnazione dei poli



- se la $P(s)$ ha degli zeri a $Re[\ ]>0$ (processo a fase non minima), l'algoritmo di stabilizzazione non può essere applicato
- il LdR può essere ancora utilizzato per verificare se è possibile risolvere il problema con un semplice guadagno (solo passo 1)
- se questo non è possibile, però, il LdR non fornisce indicazioni utili per la stabilizzazione (se non in casi molto semplici)
- in questo caso la soluzione può essere ricercata procedendo in modo algebrico, in particolare scegliendo $G(s)$ in modo che i poli del sistema retroazionato coincidano con dei valori assegnati

- dato il processo

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

con $n > m$, si ponga il controllore nella forma parametrica

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} = \frac{d_r s^r + d_{r-1} s^{r-1} + \ldots + d_1 s + d_0}{s^r + c_{r-1} s^{r-1} + \ldots + c_1 s + c_0}$$

- il grado r e i $2r+1$ coefficienti $c_{r-1},\ldots,c_0,d_r,\ldots,c_0$ vanno scelti in modo da imporre che il denominatore di $W(s)$

$$D_W(s) = D_F(s) + N_F(s) = D_G(s)D_P(s) + N_G(s)N_P(s)$$

coincida con il polinomio desiderato $D_W^*(s)$

$$D_G(s)D_P(s) + N_G(s)N_P(s) = D_W^*(s)$$

- poiché $D_W(s)$ è monico e ha grado $n+r$, anche $D^*_W(s)$ dovrà esserlo; quindi, per imporre l'identità dei due polinomi basterà eguagliare i coefficienti del termini di grado $n+r-1,\ldots,0$
- si ottiene quindi un sistema di $n+r$ equazioni lineari nelle $2r+1$ incognite $c_{r-1},\ldots,c_0,d_r,\ldots,c_0$
- il sistema ammette un'unica soluzione se $n+r = 2r+1$, cioè se

$$r = n - 1$$

quindi: dato un processo con $P(s)$ di ordine n, si può usare un controllore con $G(s)$ semplicemente propria e di ordine $n-1$ per assegnare a piacere gli $2n-1$ poli del sistema retroazionato

- essendo $n-1 \geq n-m-1$, il controllore risultante avrà ordine sempre maggiore o uguale a quello del controllore stabilizzante (cfr: slide 20) e potrà avere zeri e/o poli nel semipiano destro

- questo metodo si può utilizzare anche nel caso in cui la $G(s)$ debba avere dei poli fissi (nell'origine per tipo e/o astatismo, o immaginari per riproduzione di riferimenti sinusoidali); si pone

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G^f(s)D_G^l(s)}$$

dove $D_G^f(s)$ e $D_G^l(s)$ sono rispettivamente la parte fissa di $G(s)$, di grado n_G^f, e quella libera, di grado n_G^l

- i parametri liberi sono quindi gli n_G^l coefficienti di $D_G^l(s)$ (che è monico) e gli $n_G^l+n_G^f+1$ coefficienti di $N_G(s)$
- procedendo come prima e uguagliando il numero di equazioni a quello delle incognite si trova $2n_G^l+n_G^f+1 = n+n_G^l+n_G^f$, cioè

$$n_G^l = n-1$$

che generalizza il risultato precedente

- in conclusione, si può fare un confronto tra i due metodi di progetto nel dominio di Laplace analizzati fin qui

progetto con il LdR	progetto per assegnazione dei poli
algoritmico per processi a fase minima	sempre algoritmico
controllore di ordine minimo	controllore di ordine fisso
poli di W(s) lungo i rami del LdR	poli di W(s) in posizioni arbitrarie