

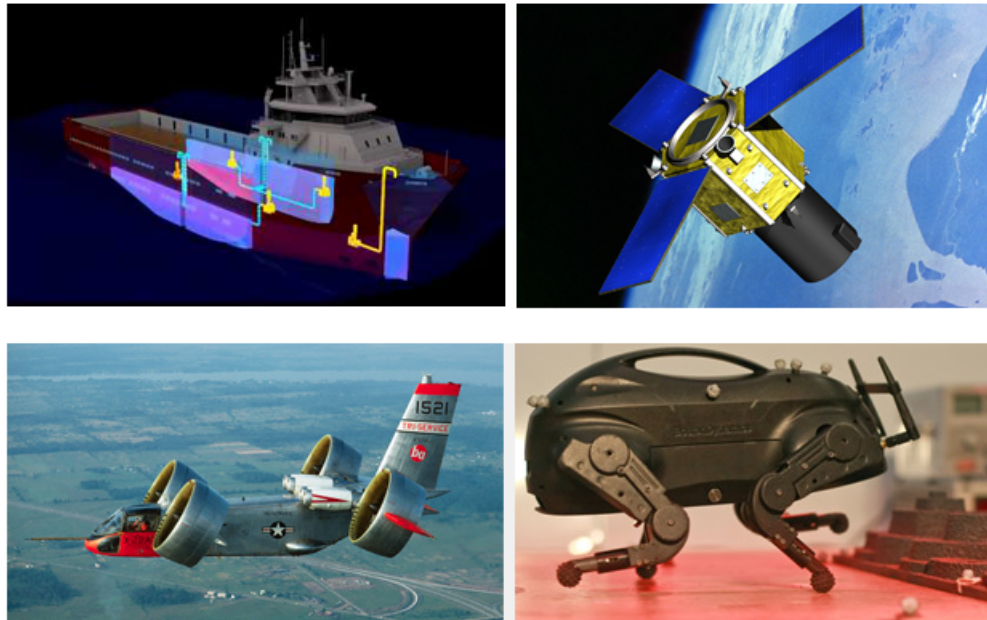
# Controllo del robot Pendubot

Ing. Massimo Cefalo

- I sistemi meccanici sottoattuati
- Il sistema Quanser Pendubot
- Obiettivi del controllo
- Modellistica dinamica
- Linearizzazione e analisi
- Progetto del controllore

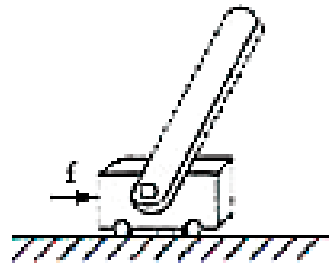
# I SISTEMI MECCANICI SOTTOATTUATI

- sono sistemi in cui il numero di attuatori è strettamente minore del numero dei gradi di libertà
- esempi di applicazioni: il controllo del volo di un aereo o di un elicottero, il controllo di un satellite, la stabilizzazione del moto di una nave o il controllo del moto di un robot con locomozione su gambe

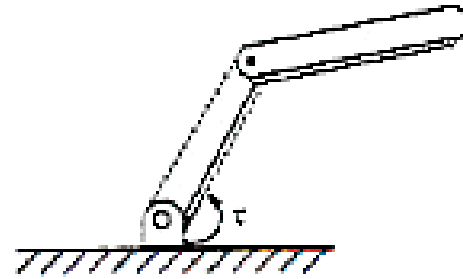


- la sottoattuazione può avere diverse origini:
  - una scelta di progetto della struttura meccanica (per esempio per motivi economici, come nelle missioni spaziali)
  - conseguenza di una momentanea indisponibilità di alcuni attuatori (dovuta per esempio a guasti)
  - caratteristiche del modello matematico del sistema in esame (per esempio nel caso di un manipolatore con elementi flessibili)
- il controllo dei sistemi meccanici sottoattuati è un campo di ricerca attivo e di estremo interesse per molte applicazioni
- due categorie di approcci al controllo: adattamenti di tecniche tradizionali e tecniche sviluppate ad hoc (come gli approcci energy-based)

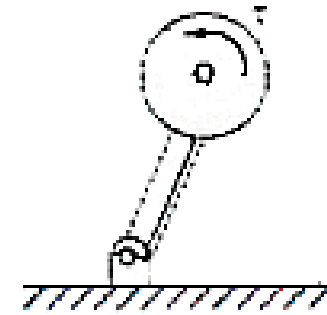
## Esempi di sistemi meccanici sottoattuati



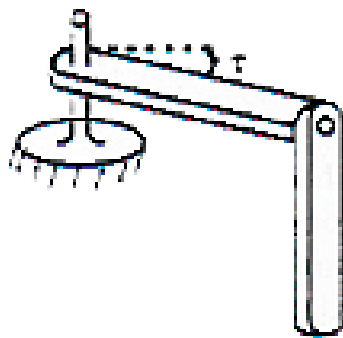
Inverted pendulum



Pendubot



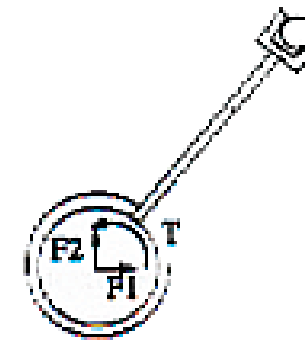
Inertia wheel



Rotational inverted pendulum

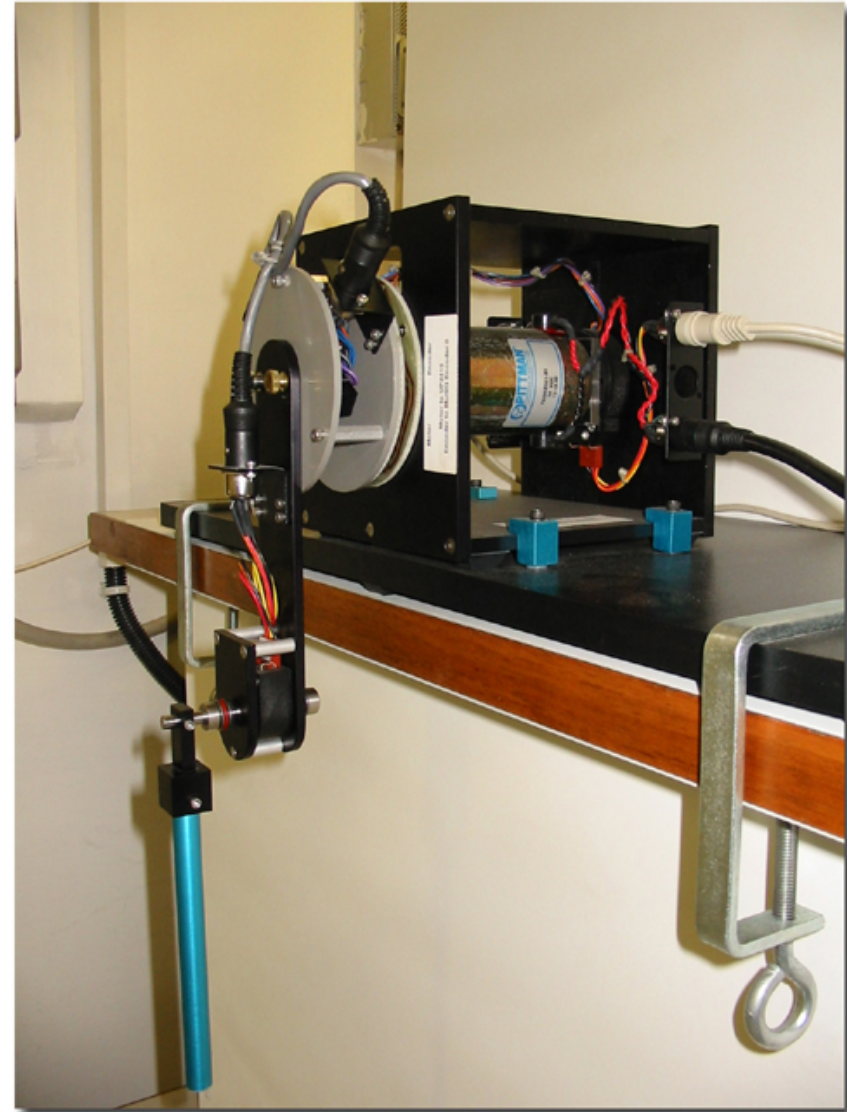
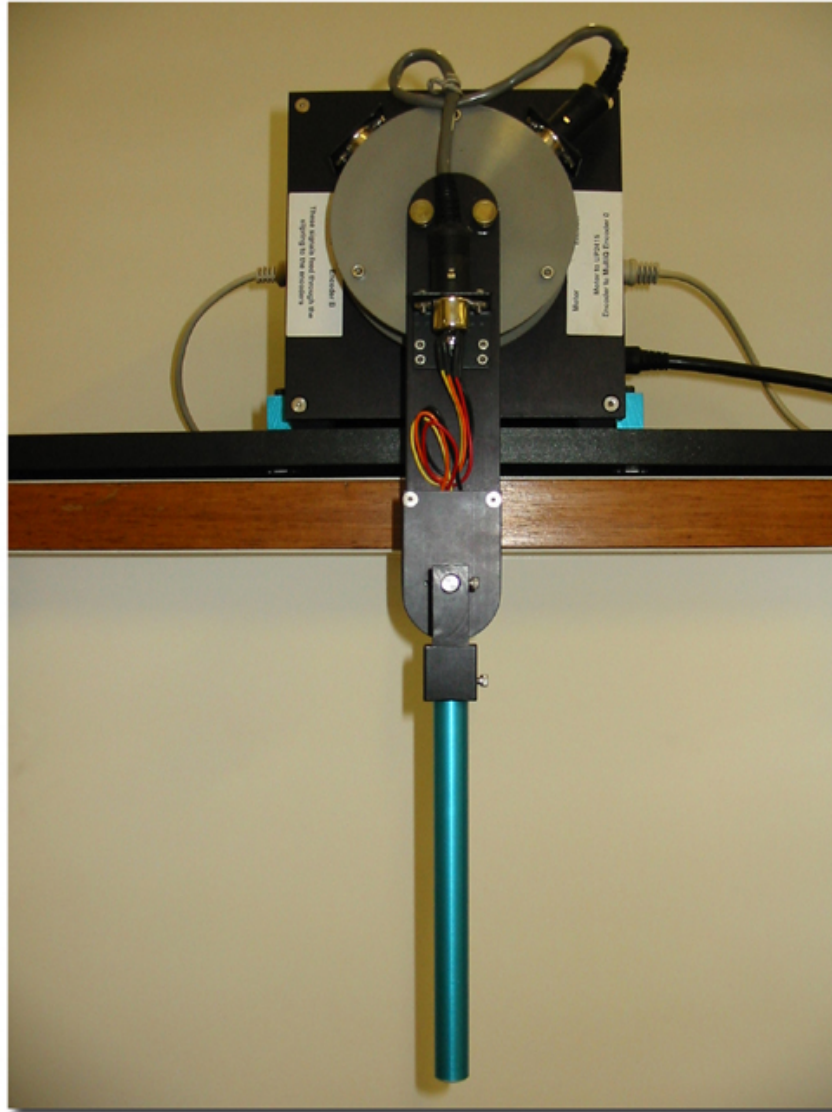


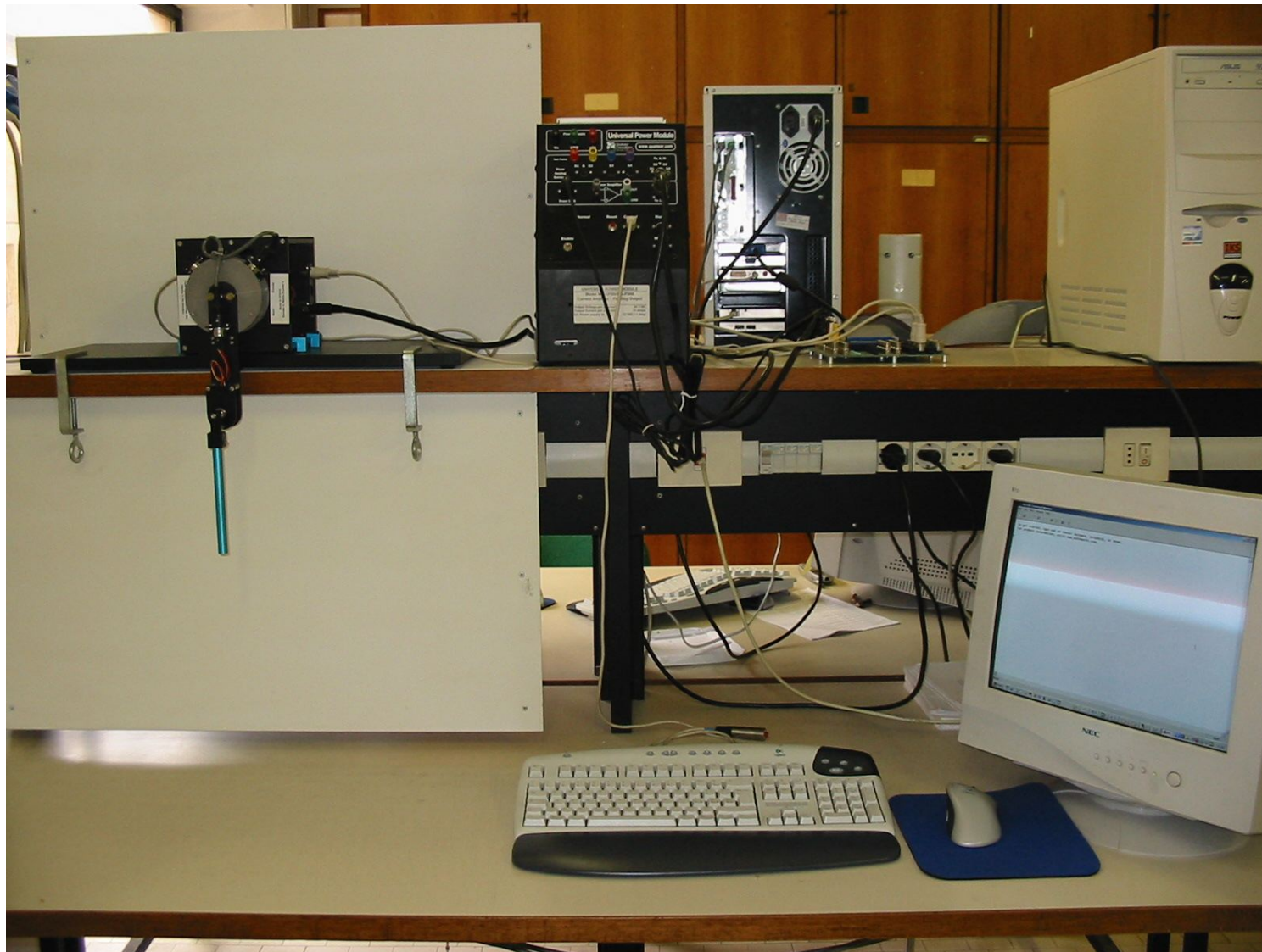
Planar manipulator



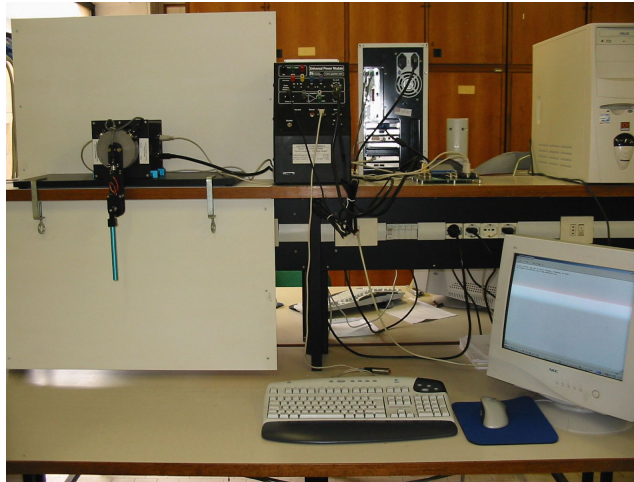
One revolute and two prismatic joints planar manipulator

## IL SISTEMA QUANSER PENDUBOT



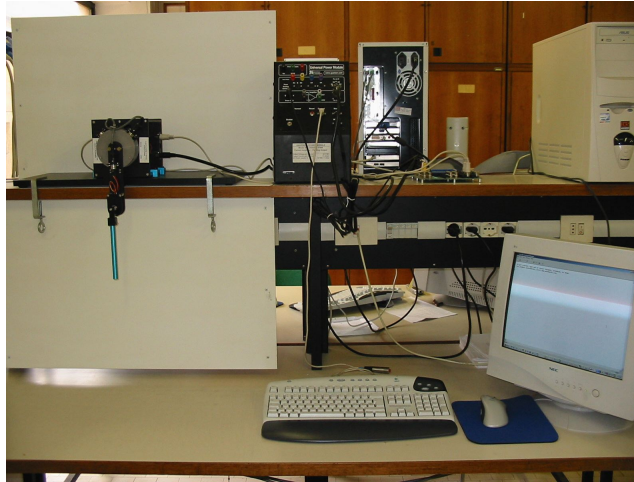


## Componenti del sistema - 1



- robot: 2 gradi di libertà rotazionali, **sottoattuato** (motore solo sul primo giunto), in moto nel piano  $xy$  verticale (asse  $x$  verticale in basso)
- sensori: due encoder ottici incrementali ai giunti (risoluzioni 1/8192 e 1/4096 su angolo giro)
- attuatore: motore in c.c. a magneti permanenti pilotato in corrente da uno stadio di potenza (UPM) con onda quadra modulata in ampiezza (PWM a 40 KHz) come segnale applicato al motore

## Componenti del sistema - 2



- interfaccia: scheda acquisizione dati e conversione A/D e D/A (MultiQ-PCI) con filtri passa-basso + scheda con connettori per canali ingresso-uscita
- Setup hardware originale: Pentium III con MS Windows NT + Venturcom RTX (patch del sistema operativo per prestazione real time)
- software: Matlab/Simulink (progetto/simulazione/realizzazione del sistema di controllo), Real-Time Workshop (generatore automatico di codice C++ da modelli Simulink), Real-Time Windows Target (motore Matlab per esecuzione real-time di modelli Simulink)

# OBIETTIVI DEL CONTROLLO

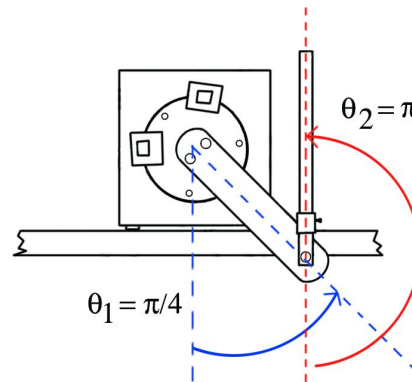
- regolazione di posizione
  - configurazioni di equilibrio libero o forzato, stabili o instabili
  - particolare interesse per la stabilizzazione di equilibri instabili ad anello aperto
  - manovre globali di **swing-up** (per avvicinarsi a certi equilibri)
  - **stabilizzazione locale** tramite retroazione lineare dallo stato
- inseguimento di traiettorie
  - devono essere dinamicamente ammissibili!

# MODELLISTICA DINAMICA

- sistema **elettro-meccanico** a più gradi di libertà
- equazioni di bilanciamento **elettrico** del motore
  - motore c.c. comandato in corrente  $i_a$  d'armatura: coppia  $\tau = k_i i_a$
  - amplificatore tensione–corrente:  $i_a = k_{UPM} v_c$ , con  $v_c$  tensione di controllo
- equazioni di Eulero-Lagrange (formulazione energetica) del braccio **meccanico**
- accoppiamento diretto motore–braccio 1 (**direct-drive**), senza riduttori del moto o trasmissioni
- fenomeni di attrito (viscoso, statico) ai giunti (connessioni elettriche striscianti) rilevanti, ma trascurati qui in fase di analisi

## Equazioni di Eulero-Lagrange

- scelta di coordinate generalizzate che descrivono la configurazione del robot



$\theta = (\theta_1, \theta_2)$ : posizioni angolari assolute dei bracci rispetto alla verticale

- calcolo di energia cinetica  $T = T(\theta, \dot{\theta})$  ed energia potenziale (gravitazionale)  $U = U(\theta)$  dei corpi (bracci)

- il Lagrangiano  $L = T - U$  soddisfa le equazioni vettoriali

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right)^T - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^T = u$$

dove  $u = (u_1, u_2)$  sono le coppie non conservative (coppia fornita dal primo motore, attrito dissipativo sui due giunti)

- in forma scalare

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = u_i, \quad i = 1, 2$$

- modello dinamico risultante

$$M(\theta)\ddot{\theta} + c(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta) = u$$

con  $M(\theta) =$  matrice di inerzia,  $c(\theta, \dot{\theta}) =$  vettore di coppie dovute alle velocità centrifughe (e di Coriolis),  $g(\theta) =$  vettore di coppie dovute alla gravità

## Passaggi

- energia cinetica  $T = T_1 + T_2$  dei due bracci

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (d_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{c2}^T v_{c2} + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 = \dots$$

con

$m_i$  = massa del braccio  $i$

$d_i$  = distanza del baricentro del braccio  $i$  dall'asse di rotazione

$I_i$  = momento di inerzia del braccio  $i$  intorno al suo baricentro

$v_{c2} = \dot{p}_{c2}$  = velocità planare del baricentro del braccio 2

$\ell_1$  = lunghezza del braccio 1

$$p_{c2} = \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 + d_2 c_2 \\ \ell_1 s_1 + d_2 s_2 \end{bmatrix} \Rightarrow v_{c2} = \begin{bmatrix} -\ell_1 s_1 \dot{\theta}_1 - d_2 s_2 \dot{\theta}_2 \\ \ell_1 c_1 \dot{\theta}_1 + d_2 c_2 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

con  $c_i = \cos \theta_i$ ,  $s_i = \sin \theta_i$  ( $i = 1, 2$ ), da cui

$$T_2 = \dots = \frac{1}{2} m_2 [\ell_1 \dot{\theta}_1^2 + d_2 \dot{\theta}_2^2 + 2\ell_1 d_2 c_{2-1}] + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2$$

con  $c_{2-1} = \cos(\theta_2 - \theta_1)$

- energia potenziale  $U = U_1 + U_2$  dei due bracci (a meno di una costante)

$$U_1 = -m_1 g_0 d_1 c_1$$

$$U_2 = -m_2 g_0 (\ell_1 c_1 + d_2 c_2)$$

con  $g_0 = 9.81 \text{ m/sec}^2$

( $U_i$  è legata alla quota del baricentro del braccio  $i$ )

- le coppie non conservative (a destra nelle equazioni di Eulero-Lagrange) sono

$$u = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{v1}\dot{\theta}_1 \\ F_{v2}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{s1} \text{sign}(\dot{\theta}_1) \\ F_{s2} \text{sign}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \end{bmatrix}$$

dove  $\tau$  = coppia fornita dal motore alla base,  $F_{vi}$  = coefficiente di attrito viscoso al giunto  $i$ ,  $F_{si}$  = coefficiente di attrito statico al giunto  $i$  ( $i = 1, 2$ )

**nota:** da ora in poi, attriti trascurati per semplicità

- dal Lagrangiano  $L = T - U$ , eseguendo le derivazioni indicate nelle equazioni di Eulero-Lagrange, si ottengono 2 equazioni differenziali (non-lineari) del 2° ordine

$$\begin{aligned} (I_1 + m_1 d_1^2 + m_2 \ell_1^2) \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 d_2 c_{2-1} \ddot{\theta}_2 - m_2 \ell_1 d_2 s_{2-1} \dot{\theta}_2^2 \\ + g_0 (m_1 d_1 + m_2 \ell_1) s_1 = \tau \\ m_2 \ell_1 d_2 c_{2-1} \ddot{\theta}_1 + (I_2 + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_2 + m_2 \ell_1 d_2 s_{2-1} \dot{\theta}_1^2 + g_0 m_2 d_2 = 0 \end{aligned}$$

- in forma compatta (matriciale) si ha

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 c_{2-1} \\ \alpha_3 c_{2-1} & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_3 s_{2-1} \dot{\theta}_2^2 \\ \alpha_3 s_{2-1} \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_4 s_1 \\ \alpha_5 s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M(\theta) > 0$$

$$c(\theta, \dot{\theta})$$

$$g(\theta)$$

avendo definito i coefficienti dinamici

$$\alpha_1 = I_1 + m_1 d_1^2 + m_2 \ell_1^2 > 0$$

$$\alpha_2 = I_2 + m_2 d_2^2 > 0$$

$$\alpha_3 = m_2 \ell_1 d_2 > 0 \quad (\iff d_2 > 0)$$

$$\alpha_4 = g_0 (m_1 d_1 + m_2 \ell_1) > 0 \quad (\iff d_1 > 0)$$

$$\alpha_5 = g_0 m_2 d_2 > 0 \quad (\iff d_2 > 0)$$

## LINEARIZZAZIONE E ANALISI

- matrice di inerzia simmetrica e definita positiva ( $T = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta} \geq 0$ )

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \det M(\theta) = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2 c_{2-1}^2 > 0 \quad (\forall \theta)$$

- configurazioni di equilibrio  $\theta_e$  del sistema meccanico: si pone  $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$

$$g(\theta_e) = \begin{bmatrix} \tau_e \\ 0 \end{bmatrix}$$

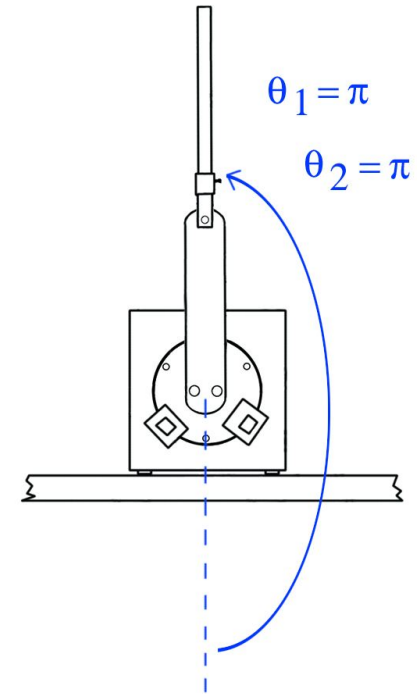
- equilibrio **libero** (con  $\tau_e = 0$ )

$$g(\theta_e) = 0 \quad \iff \quad \sin \theta_{1e} = \sin \theta_{2e} = 0 \quad (4 \text{ soluzioni})$$

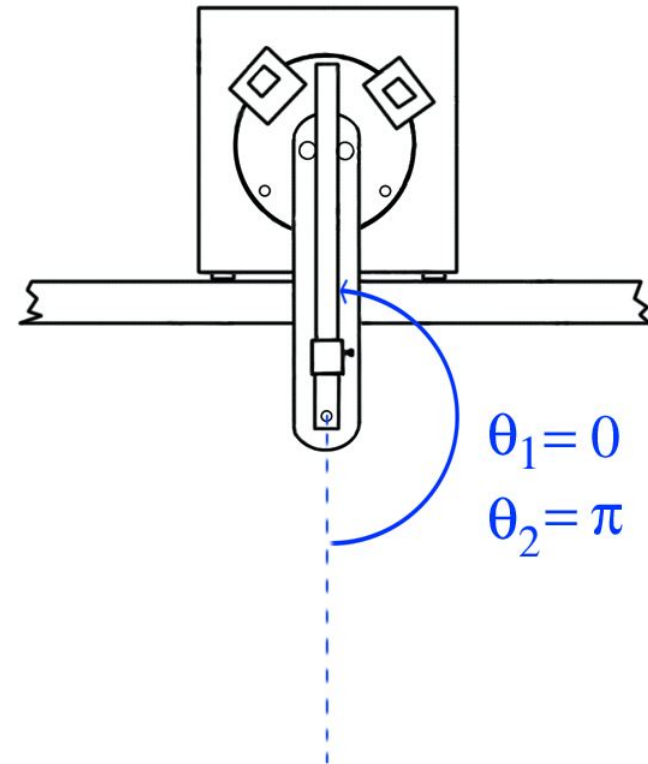
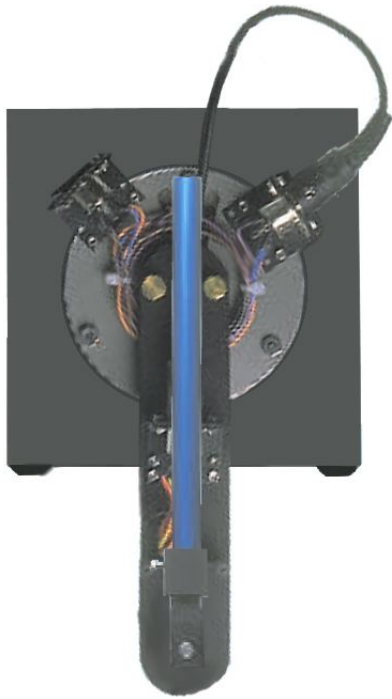
- equilibrio **forzato** (con  $\tau_e \neq 0$ )

$$\sin \theta_{1e} = \frac{\tau_e}{\alpha_4} \quad \sin \theta_{2e} = 0 \quad (\infty \text{ soluzioni})$$

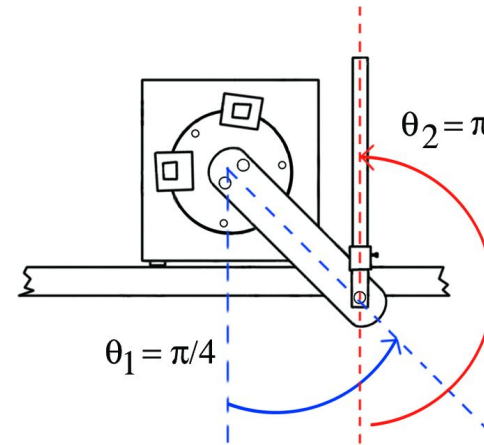
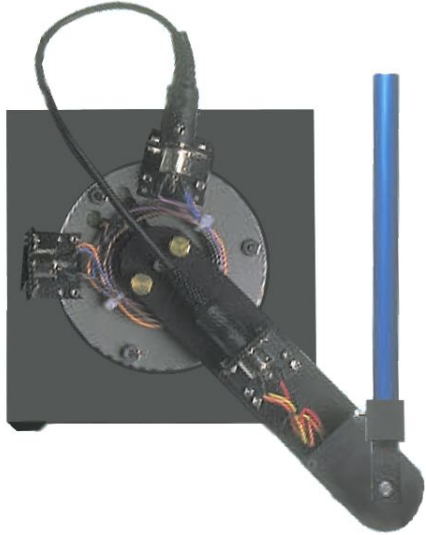
## Configurazione di equilibrio libero: UP-UP



## Configurazione di equilibrio libero: DOWN-UP



## Configurazione di equilibrio forzato: 45°-UP



$$\tau_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \alpha_4 \neq 0$$

## Linearizzazione intorno ad un equilibrio

- si pone

$$\theta = \theta_e + \delta\theta \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_e + \delta\dot{\theta} = \delta\dot{\theta} \quad \ddot{\theta} = \ddot{\theta}_e + \delta\ddot{\theta} = \delta\ddot{\theta} \quad \tau = \tau_e + \delta\tau$$

con  $\dot{\theta}_e = \ddot{\theta}_e = 0$ , e con  $\tau_e = 0$  per equilibrio libero

e si sviluppano in serie di Taylor nelle (piccole) variazioni  $(\delta\theta, \delta\dot{\theta}, \delta\ddot{\theta}, \delta\tau)$  tutti i termini (nonlineari) del modello dinamico

- eliminando i termini con prodotti di variazioni (che hanno ordine di infinitesimo superiore al primo), si ottiene

$$M(\theta_e)\delta\ddot{\theta} + G(\theta_e)\delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad G(\theta_e) = \left. \frac{\partial g}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_e}$$

con i termini centrifughi/di Coriolis mai presenti (essenzialmente perché **quadratici** nelle velocità!)

## Equazioni di stato linearizzate intorno all'equilibrio UP-UP

- per  $\theta_e = (\pi, \pi)$  (e quindi  $\tau_e = 0$ ) si ha

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\dot{\theta}_1 \\ \delta\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_4 & 0 \\ 0 & -\alpha_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\tau \\ 0 \end{bmatrix} \\ M(\theta_e) & & G(\theta_e) \end{array}$$

- posto  $\Delta = \det M(\theta_e) = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2 > 0$ , una **conveniente** scelta delle (quattro) variabili di stato e della (singola) variabile di ingresso è

$$x = \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \frac{1}{\Delta} M(\theta_e)\delta\dot{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad u = \frac{1}{\Delta} \delta\tau \in \mathbb{R}$$

- le equazioni di stato sono nella forma usuale

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & M^{-1}(\theta_e) \cdot \Delta \\ -G(\theta_e)/\Delta & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & -\alpha_3 & \alpha_1 \\ \alpha_4/\Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_5/\Delta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Autovalori della matrice $A$

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -\alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \lambda & \alpha_3 & -\alpha_1 \\ -\alpha_4/\Delta & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\alpha_5/\Delta & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^4 - \frac{\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4}{\Delta} \lambda^2 + \frac{\alpha_4\alpha_5}{\Delta}\end{aligned}$$

- posto  $\mu = \lambda^2$ , il polinomio caratteristico si può riscrivere come

$$\Delta\mu^2 - (\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4)\mu + \alpha_4\alpha_5 = 0$$

ed ha **due** cambi di segno nei coefficienti  $\Rightarrow$  2 radici reali  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 > 0$   
 $\Rightarrow$  2 coppie di autovalori reali opposti  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\mu_1}$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\mu_2}$

- sistema **instabile** intorno all'equilibrio UP-UP (ad anello aperto)

## PROGETTO DEL CONTROLLORE

- nelle nuove coordinate, l'origine corrisponde all'equilibrio UP-UP; di conseguenza rendere asintoticamente stabile il sistema linearizzato vuol dire rendere l'equilibrio UP-UP asintoticamente stabile (localmente) per il Pendubot
- raggiungibilità della coppia  $(A, B)$

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 & 0 & (\alpha_2^2\alpha^4 + \alpha_3^2\alpha_5)/\Delta \\ 0 & -\alpha_3 & 0 & -(\alpha_2\alpha^4 + \alpha_1\alpha_5)\alpha_3/\Delta \\ 1 & 0 & \alpha_2\alpha_4/\Delta & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_3\alpha_5/\Delta & 0 \end{bmatrix}$$

- test di raggiungibilità: rango  $P = 4 (= \dim x)$ , infatti

$$\det P = -\frac{(\alpha_3\alpha_5)^2}{\Delta} \neq 0 \quad !!$$

## Stabilizzazione

- essendo il sistema raggiungibile e lo stato misurabile, si può procedere per assegnazione degli autovalori mediante retroazione dallo stato

$$u = Kx = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4]x \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = (A + BK)x$$

con  $K$  tale che gli autovalori di  $\sigma(A + BK)$  siano tutti a parte reale negativa

- per calcolare la  $K$  che impone il polinomio caratteristico desiderato

$$p^*(\lambda) = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

si può utilizzare la formula di Ackermann

$$K = -\mu p^*(A)$$

dove  $\mu$  indica l'ultima riga di  $P^{-1}$

- numerico (in Matlab) con i dati del problema

$$\begin{aligned}g_0 &= 9.81 \\l_1 &= 0.1492 & l_2 &= 0.1905 \\m_1 &= 0.193 & m_2 &= 0.073 \\d_1 &= 0.1032 & d_2 &= 0.1065 \\I_1 &= \frac{1}{12}m_1l_1^2 & I_2 &= \frac{1}{12}m_2l_2^2\end{aligned}$$

da cui si ha

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0.0040 \\ \alpha_2 &= 0.0010 \\ \alpha_3 &= 0.0012 \\ \alpha_4 &= 0.3893 \\ \alpha_5 &= 0.0763\end{aligned}$$

con le matrici di stato e ingresso

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0010 & -0.0012 \\ 0 & 0 & -0.0012 & 0.0040 \\ 134719.9851 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 26390.8899 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con  $\sigma(A) = (\pm 13.9729, \pm 7.2544)$

utilizzando le istruzioni Matlab

```
p = [-1 - 2 - 3 - 4];    (insieme degli autovalori desiderati)
K = -acker(A,B,p);
sigma = eig(A + B * K);
```

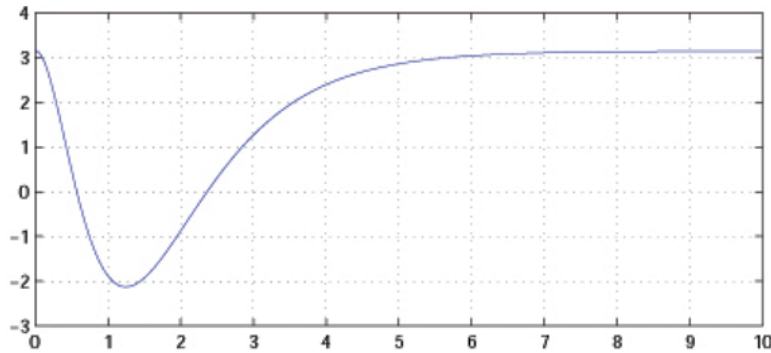
si ottiene

$$K = 10^5 * [-1.3441 \quad 1.2234 \quad -0.0001 \quad 0.0004]$$
$$\sigma(A + BK) = (-1.000, -1.999, -3.000, -4.000) \quad (\text{arrotondamenti})$$

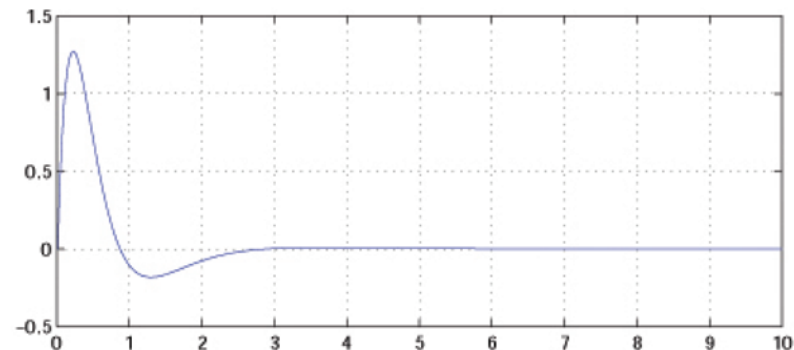
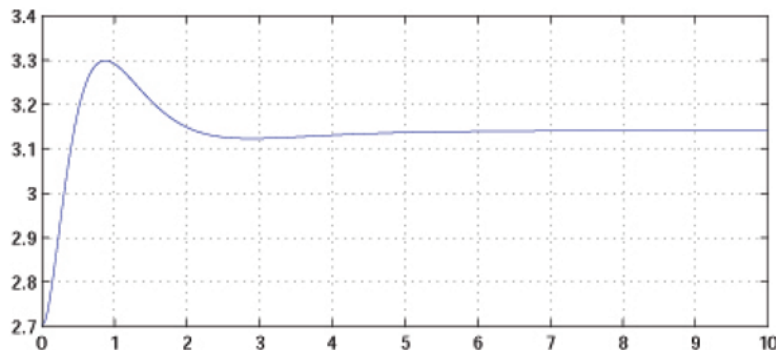
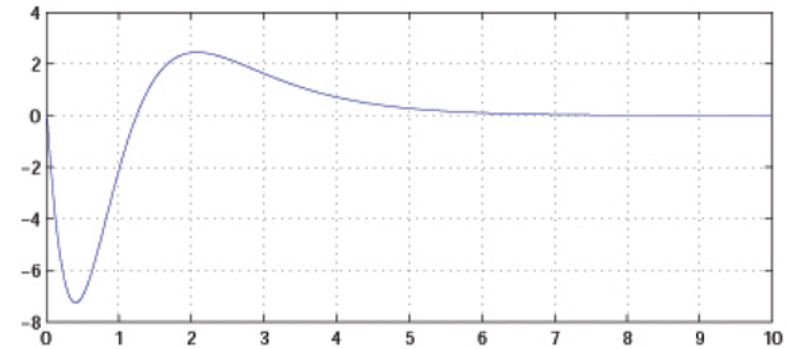
## Simulazione sistema linearizzato

- a partire da condizioni iniziali non nulle ( $\theta_2 = 155^\circ$ ) si ottiene

Prime due variabili di stato:  $\theta_1$  e  $\theta_2$



Seconde due variabili di stato (le velocità)



- non è detto che lo stesso comportamento valga per il sistema meccanico originario (non lineare): dipende dal dominio di attrazione!

- in alternativa al progetto precedente, si osservi che due degli autovalori del sistema sono già stabili:

$$\sigma(A) = (\pm 13.9729, \pm 7.2544)$$

è quindi possibile stabilizzare il sistema "ribaltando" gli autovalori instabili e lasciando inalterati quelli stabili

$$p = [-13.9729 - 7.2544 - 13.9729 - 7.2544];$$

si ottiene

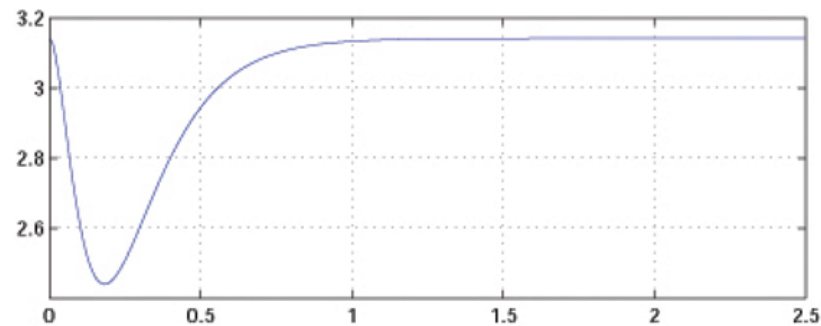
$$\begin{aligned} K &= -\text{acker}(A, B, p); \\ \Rightarrow K &= 10^5 * [0.000000603 \quad 8.1121 \quad -0.0004 \quad 0.0028] \end{aligned}$$

in questo modo si ottimizza il controllo dal punto di vista dello sforzo del controllore (coppia più bassa) e si riducono le sovraelongazioni in uscita

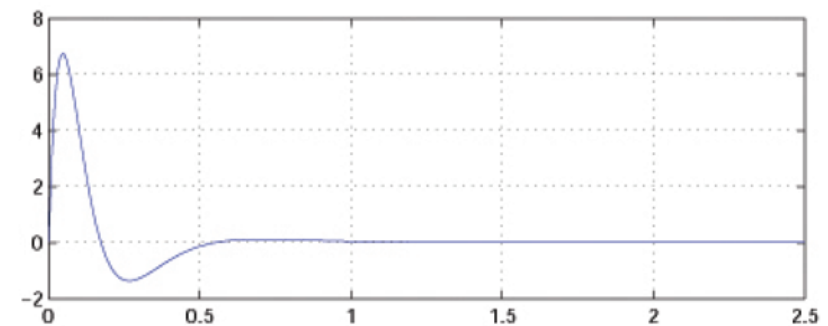
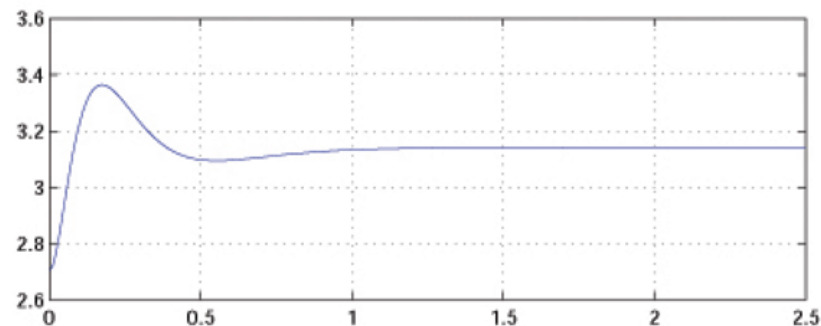
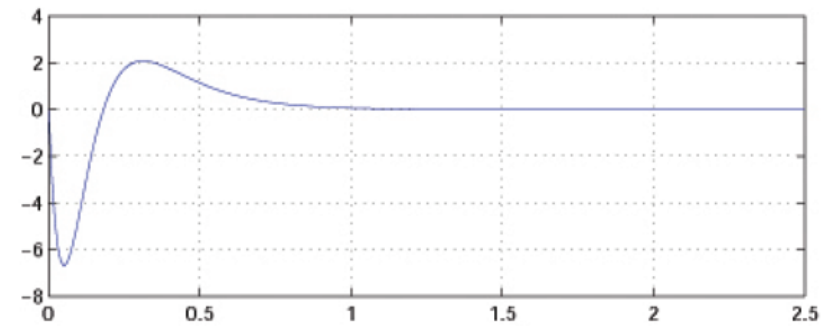
## Simulazione sistema linearizzato: ribaltamento autovalori instabili

- a partire da condizioni iniziali non nulle ( $\theta_2 = 155^\circ$ ) si ottiene

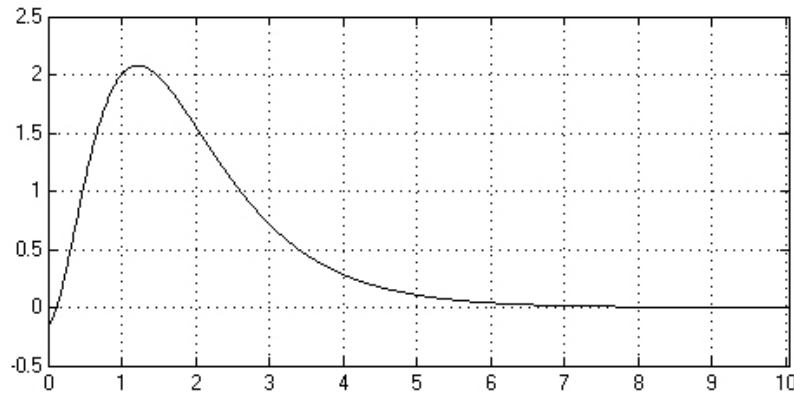
Prime due variabili di stato:  $\theta_1$  e  $\theta_2$



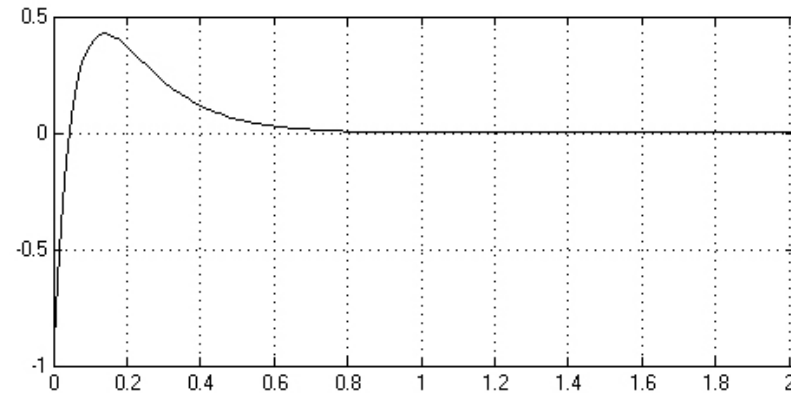
Seconde due variabili di stato (le velocità)



## Confronto tra le coppie prodotte dai due controllori a parità di condizioni iniziali



$$\sigma(A+BK) = [-1 \ -2 \ -3 \ -4]$$



$$\sigma(A+BK) = [-13,9729 \ -7,2544 \ -13,9729 \ -7,2544]$$

nel primo caso la coppia prodotta raggiunge un picco più elevato, ed interessa un intervallo di tempo più lungo

## Simulazione sistema linearizzato: ribaltamento autovalori instabili

## Simulazione sistema NON lineare: ribaltamento autovalori instabili

a partire da condizioni iniziali appartenenti al bacino di attrazione

## Simulazione sistema NON lineare: ribaltamento autovalori instabili

a partire da condizioni iniziali lontane dal punto di equilibrio (NON più appartenenti al bacino di attrazione)

## Manovra di swing-up

- lo swing-up (cio il trasferimento da DOWN-DOWN a UP-UP) è risolto con una tecnica ibrida:
  - si fa oscillare il primo braccio, fornendo **energia** sufficiente a far sì che anche il secondo entri in oscillazione ampia
  - quando entrambi i bracci entrano in un **dominio di attrazione** per il controllore lineare, si commuta sulla stabilizzazione locale
  - per il Pendubot, il dominio è circa  $[-15^\circ, +15^\circ]$  di errore in posizione (rispetto a  $\theta_e$ ) e di  $[-4, +4]$  rad/s in velocità (rispetto a  $\dot{\theta}_e = 0$ ); il dominio di attrazione dipende da  $\theta_e$  e dalla matrice  $K$  dei guadagni del controllore
  - capacità di contrastare piccoli disturbi non persistenti (**reiezione dei disturbi**)

# Esperimento di swing-up

## COMMENTI CONCLUSIVI

- aspetti da considerare in pratica:
  - attrito ai giunti (quello viscoso è un fenomeno lineare, quello statico è una nonlinearietà 'hard')
  - inerzia del motore (si aggiunge  $I_m$  ad  $\alpha_1$ )
  - indisponibilità della misura di velocità (differenziazione numerica filtrata delle misure degli encoder)
  - discretizzazione e quantizzazione delle grandezze
  - saturazione dell'attuatore (coppia di picco e di regime)
  - perturbazioni sul valore dei parametri