Decisioni razionali

Sommario

L'analisi delle decisioni

Teoria delle decisioni
Le decisioni si prendono in competizione con la natura: soggetto (persona, agente, robot) verso la natura. La natura è *indifferente* al risultato.

Teoria dei giochi
Le decisioni si prendono in competizione con un altro soggetto, opponente. Il risultato della decisione dipende da ciascun giocatore, entrambi i giocatori sono interessati al risultato.

Concetti di Base

La teoria delle decisioni si basa sui seguenti concetti:

1. La decisione di scegliere un'azione $a \in A$, dove A è l'insieme delle possibili azioni, che si basano sull'osservazione di un insieme di variabili aleatorie X.
2. La distribuzione di probabilità delle variabili $x \in X$, che dipende da un parametro $s \in \mathbb{S}$ che è lo stato della natura.

La decisione è una funzione d che mappa lo spazio campionario X nello spazio delle azioni: $a = d(X)$

L'oggetto della teoria delle decisioni è la scelta di una tra un insieme di azioni, o strategie ammissibili:

- una scommessa su un numero
- un investimento su un terreno
- una carta da giocare
- l'immissione di un prodotto sul mercato

Decisioni semplici

Uno studente che pianifica correttamente le sue decisioni sulla base dei corsi e degli esami offerti in un trimestre deve decidere se fare gli esoneri o meno, sulla base del numero di assenze necessarie per potersi preparare all'esonero, durante il corso. Se mediamente ogni esonero richiede tre assenze, fare entrambi gli esoneri comporta di non superare almeno un esame.

	Valutazione alternative sulla base delle assenze				
Azioni	Esonero1	Esonero2	Esame 1, c=	Esame2, c=	Esame3, c=
Esonero1	3	0	27	24	24
Esoncro2	0	3	24	27	24
Esonero1 & 2	3	3	22	22	no
Niente esoneri	0	0	30	30	30
voto = 30 - c *ln (1+assenze)					
c= penalita'					
c=2 assenze per esonero corso					
c=4 assenze esonero altro corso					

Il News-Boy Problem

Un ragazzo vende giornali ai semafori, di quante copie si deve rifornire?

	Domanda (SdN)			
Azioni	D=20	D=21	D=22	D=23
Q=20	9	9	9	9
Q=21	8.30	9.45	9.45	9.45
Q=22	7.60	8.75	9.90	9.90
Q=23	6.90	8.05	9.20	10.35
Probabilita	0.2	0.4	0.3	0.1

Abbiamo calcolato la tavola del Payoff considerando che:

1. Il costo di acquisto di un giornale è di 80 centesimi.
2. Il ricavo dalla vendita è di euro 1.25.
3. Il recupero tramite la resa è di 10 centesimi.

Vogliamo determinare la quantità che massimizza il profitto.

Modelli di decisione

Le decisioni sono classificate rispetto alla relazione tra azione ed esiti, cioè lo stato della natura che consegue come risultato dell'azione.

- Decisioni basate su condizioni di certezza, quando ogni azione (strategia) porta invariabilmente ad un esito certo: sono noti l'esito e lo stato di natura che consegue all'azione.
- Decisioni basate su condizioni di rischio, quando ogni azione o strategia porta ad un risultato di cui si conosce la distribuzione di probabilità (es. immissione di un prodotto sul mercato, scommesse, la maggioranza dei giochi).
- Decisioni basate su condizioni di incertezza, quando ogni azione ha conseguenze di cui non si conosce la distribuzione di probabilitá: lo stato della natura che consegue non è noto.

Certezza Rischio e Incertezza

Frank Knight (Risk, Uncertainty and Profit. 1921) ha proposto una distinzione fra rischio e incertezza basata sul seguente concetto:

Il Rischio si riferisce a situazioni in cui colui che prende delle decisioni può assegnare una probabilità alla aleatorietà dell'evento che deve affrontare.

L'Incertezza si riferisce a situazioni in cui l'aleatorietà non può essere definita in termini di una probabilità assegnata all'evento.

Keynes in The General Theory of Employment", Quarterly Journal of Economics, Vol. 51, 1937, p.209-23. scrive:

"By 'uncertain' knowledge, let me explain, I do not mean merely to distinguish what is known for certain from what is only probable. The game of roulette is not subject, in this sense, to uncertainty...The sense in which I am using the term is that in which the prospect of a European war is uncertain, or the price of copper and the rate of interest twenty years hence...About these matters there is no scientific basis on which to form any calculable probability whatever. We simply do not know."

Decisioni in condizione di rischio

1. La distribuzione di probabilitá degli stati della natura, futuri, è specificata.
2. Le decisioni si basano sulla massimizzazione del valore atteso:
   (a) Azioni $a_1, \dots a_n$.
   (b) Stati di natura $s_1, \dots, s_k$.
   (c) Probabilitá sugli stati $p(s_i)$.
   (d) Matrice di payoff $M = N \times K$. Ciascun valore specifica la relazione azione-stato, come "valore monetario" v_{ij}: risultato della i-esima azione nello stato di natura j.
   (e) Il valore atteso $EV_i = \sum_j p(s_j) v_{ij}$.
   (f) Il massimo valore atteso (MEV) $MEV = max_i EV_i$.

	Domanda (SdN)				EV
Azioni	D=20	D=21	D=22	D=23	
Q=20	9	9	9	9	9
Q=21	8.30	9.45	9.45	9.45	**9.22**
Q=22	7.60	8.75	9.90	9.90	8.98
Q=23	6.90	8.05	9.20	10.35	8.39
Probabilità	0.2	0.4	0.3	0.1	

Decisioni in condizione di rischio

	Vincita	Perdita
	0.5	0.5
Puntata 100	1000	0

Il guadagno atteso è $(1000 \times 0.5 + 0 \times 0.5) - 100 = 400$. Coincide con il massimo guadagno atteso.

La decisione di puntare (es. rosso alla roulette) dipende da varie circostanze:

1. Condizioni economiche iniziali.
2. Quante volte è uscito il nero durante la giornata (influenzerebbe la probabilità degli stati?)
3. Il rammarico di non avere puntato se poi esce rosso.
4. Le vincite pregresse
5. L'umore..

Queste circostanze indicano la propensione soggettiva al rischio.

Il paradosso di San Pietroburgo

Generalizzando: il valore monetario atteso di una scomessa che ha guadagno X con una distribuzione cumulativa $F(x) = P(X \leq x)$ è dato da $EV(X) = \int_0^\infty x dF(x)$, quindi il premio, cioè quanto si è disposti a scommettere è un valore inferiore a $EV(x)$.

Daniel Bernoulli, sulla base di una indicazione del fratello Nicolas, mostrò (1738) che la funzione $EV(X)$ non è necessariamente convergente. Quindi introdusse il seguente paradosso.

Una moneta non truccata viene lanciata tante volte, fintanto che non compare testa all'n-esimo lancio. Si vincono 2^n ducati.

Quanto si è disposti a scommettere su questo gioco?

Chiaramente, il valore monetario atteso è teoricamente infinito:

$$EV = \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2^i})2^i$$

Qualunque giocatore razionale dovrebbe scommettere una quantità di denaro inferiore al valore atteso, e siccome questo è infinito qualunque giocatore razionale dovrebbe scommettere una qualunque quantità finita di denaro su questo gioco. Tuttavia nessuno è disposto a scommettere, diciamo, più di 2^2 su questo gioco. Quindi cosa c'è che non funziona nel concetto di valore monetario atteso?

Il paradosso di San Pietroburgo

Bernoulli spiegò il paradosso con il concetto di utilità marginale. Cioé, invece della funzione di distribuzione cumulativa, per il guadagno atteso, occorre introdurre una funzione diversa, appunto la funzione di utilità. Nel caso specifico Bernoulli penso che l'utilità fosse per l'appunto il logaritmo della funzione.

Quindi Bernoulli propose come funzione di utilità $\alpha \log x$, in particolare:

$$EU(X) = \sum_i \frac{1}{2^i} \times \log i = 2$$

Tuttavia diversi esempi (si gioca sulla potenza 2^{2^n} in modo che il logaritmo dia sempre 1) hanno mostrato che l'ipotesi di Bernoulli era ad hoc, e non è sufficiente per risolvere il paradosso.

Ci sono attualmente diverse versioni del paradosso.

Utilitá

Daniel Bernoulli's (1738) introduce il concetto di utilità attesa che decompone la valutazione del rischio come:

Somma delle utilità degli esiti pesate con le probabilità degli esiti stessi.

John von Neumann e Oskar Morgenstern in Theory of Games and Economic Behavior (1944) introducono un metodo assiomatico per una teoria delle decisioni basata su incertezza e rischio, sulla base di un insieme di regole che definiscono le preferenze razionali di un agente.

Le basi della teoria dell'utilità

La teoria dell'utilità (l'ipotesi relativa all'utilità attesa) fu formulata dopo Bernoulli, da John von Neumann e Oskar Morgenstern (1944). N e M hanno assiomatizzato la teoria dell'utilità introducendo il concetto di lotteria.

Sia $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un insieme di esiti di una prova, e sia $\Delta(X)$ l'insieme delle misure di probabilità su X.

Per ogni $\lambda \in \Delta(X)$ e ogni funzione $f : X \mapsto \mathbb{R}$, il valore atteso di X è:

$$E_\lambda[f(x)] = \sum_i \lambda(x_i) f(x_i)$$

Ciascun $\lambda \in \Delta(X)$ è una lotteria.

Prima di introdurre gli assiomi di von Neumann e Morgenstern che comportano un ordinamento su $\Delta(X)$ introduciamo una lotteria come una n-upla

$$[p(x_1), x_1; \ldots; p(x_n), x_n]$$

dove ciascun $p(x_i)$ è una probabilità, cioé:

$$\Sigma_i p(x_i) = 1 \text{ e } p(x_i) \geq 0$$

Quindi una lotteria definisce una funzione di probabilità $p(x) = P(X = x_i)$ finita, visto che una lotteria è finita.

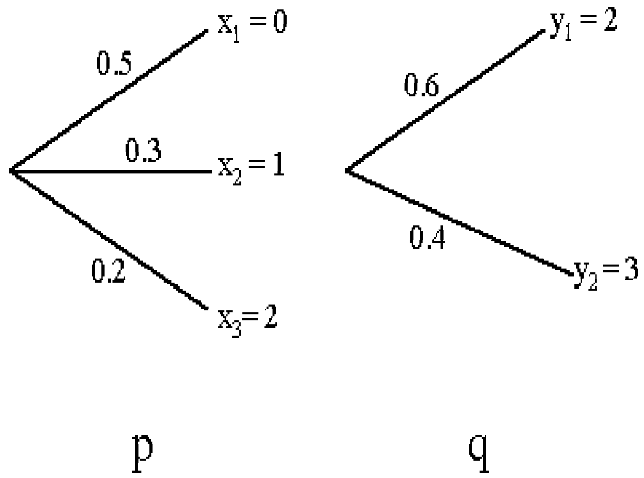
Lotterie composte

Le lotterie si possono comporre, cioè un esito può a sua volta essere una lotteria.

Supponiamo di avere una lotteria $r = [0.5, p; 0.5, q]$ e i due possibili esiti sono:

0.5 ottieni un biglietto per un'altra lotteria p,
0.5 ottieni un biglietto per una terza lotteria q,

Esempio, siano p e q le seguenti due lotterie:
$p = [0.5, 0; 0.3, 1; 0.2, 2]$ e $q = [0.6, 2; 0.4, 3]$



Combinazione di lotterie

Combinando i risultati delle due lotterie, la lotteria composta si ottiene combinando linearmente i valori delle lotterie che denotano i risultati della lotteria iniziale. Se le lotterie sono k, si combinano come segue:

> per ciascun risultato i, con probabilità $p_1^i, \dots p_k^i$
> nelle lotterie $l_1, \dots, l_k$:
> la combinazione lineare per il risultato i-esimo è:
> $lc_i = \alpha_1(p_1^i) + \dots \; + \alpha_k(p_k^i)$

dove α_j è la probabilità della lotteria j-esima (nel nostro esempio , $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$) e per k lotterie:

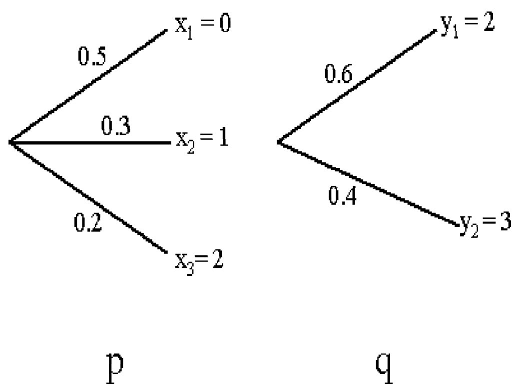
$$\sum_i^K \alpha_i = 1$$

Così ad esempio se consideriamo il risultato 2 nelle lotterie l_1 e l_2 abbiamo

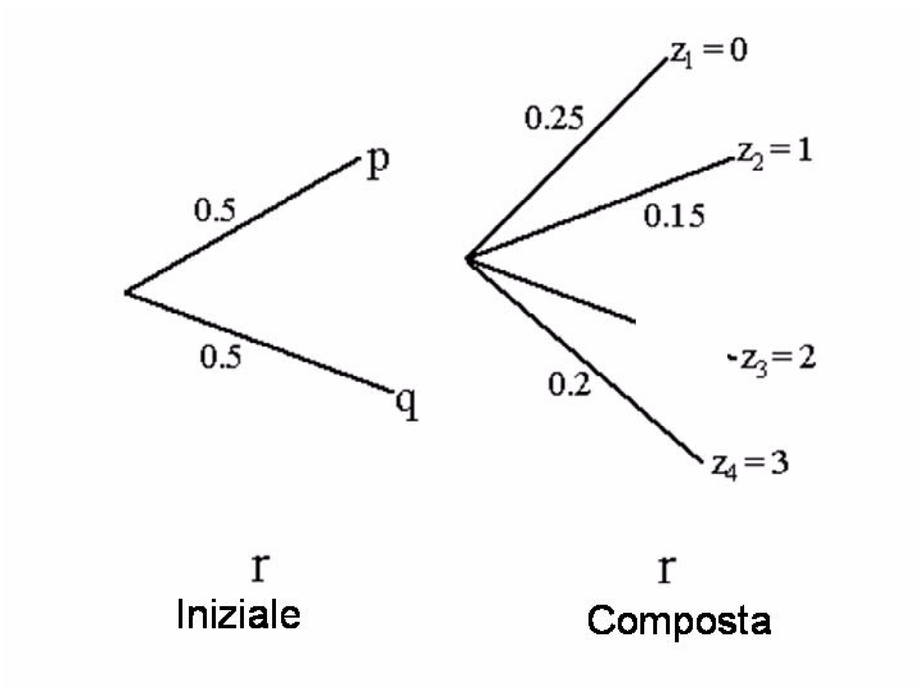
$$lc_2 = 0.5(0.2) + 0.5(0.6) = 0.4$$

Quindi la lotteria r ottenuta dalla combinazione di l_1 e l_2 è

$$(0.25, 0; 0.15, 1; 0.4, 2; 0.2; 3).$$



La lotteria composta ottenuta e' quindi la seguente:



Ordinamento e Assiomi su $\Delta(X)$

Notazione.

Siano $L_0, L_1 \in \Delta(X)$:

$L_0 \succ L_1$ $\quad$ L_0 e' preferito a L_1

$L_0 \sim L_1$ $\quad$ indifferenza tra L_0 e L_1

$L_0 \succsim L_1$ $\quad$ L_1 non e' preferito a L_0

Le preferenze si possono estendere agli esiti in virtù della <u>sostituibilità</u>.

Assiomi dell'Utilità

Siano $A, B, C \in \Delta(X)$.

A1. Ordinamento

$$(A \succ B) \vee (B \succ A) \vee (A \sim B)$$

A2. Transitivita'

$$(A \succ B) \wedge (B \succ C) \;\Rightarrow\; (A \succ C)$$

A1-A2 definiscono una preferenza ordinata totalmente su $\Delta(X)$.

A3. Continuità (Assioma di Archimede)

$$A \succ B \succ C \;\Rightarrow\; \exists p \;\; , 0 < p < 1, \;\; [p, A; \;\; (1-p), C] \sim B$$

A4. Indipendenza Per ogni $A, B, C \in \Delta(X)$ e per ogni $p, 0 \leq p \leq 1 \quad A \succ B$ sse

$$pA + (1-p)C \succ pB + (1-p)C$$

Preferenze Razionali

A5. Sostituibilita'

$$A \sim B \;\Rightarrow\; [p, A;\; 1-p, C] \sim [p, B; 1-p, C]$$

A6. Monotonicita'

$$A \succ B \;\Rightarrow\; (p \geq q \;\Leftrightarrow\; [p, A;\; 1-p, B] \succsim [q, A;\; 1-q, B])$$

Teorema di von Neumann e Morgenstern

Teorema 1 (Ramsey, 1926[1]; von Neumann e Morgenstern, 1944):
Sia $\succ$ una relazione su $\Delta(X)$, un sottoinsieme convesso di uno spazio lineare.

$\succ$ soddisfa gli assiomi (Transitività, Linearità, Continuità e Sostituibilità)
se e solo se esite una funzione a valori reali:

$$U : \Delta(X) \mapsto R$$

tale che $\forall A, B \in \Delta(X)$:

$\diamondsuit$

$$A \succsim B \Leftrightarrow E_A[U] \geq E_B[U] \Leftrightarrow \sum_{x \in A} p(x)U(x) \geq \sum_{y \in B} p(y)U(y)$$

Teorema 2 Siano u e v due funzioni di utilità, queste sono equivalenti se rappresentano lo stesso ordine di preferenza: esiste un $a \in \mathbb{R}$ e un $b > 0$ tale che $v(x) = a + bu(x)$.

[1] Truth and Probability

Esempio

L'ipotesi di von Neumann-Morgenstern consiste in questo:

Se un agente ha delle preferenze che sono definite tramite le lotterie, allora esiste una funzione di utilità $U : \Delta(X) \mapsto \mathcal{R}$ che assegna una utilità a ciascuna lotteria A in $\Delta(X)$ che rappresenta tale preferenza.

Consideriamo una situazione con due esiti:

$$X = \{10euro, 0euro\}$$

Consideriamo due lotterie, L_1 e L_2:

in L_1 vinci 10 euro con probabilità 0.9, ed in L_2 ricevi 10 euro con probabilità 0.4:

Verifichiamo la rappresentazione della preferenza, con $U(x) = x$

Esempio

$$L_1 = (10euro, 0.9; 0euro, 0.1) \quad L_2 = (10euro, 0.4; 0euro, 0.6)$$

Quindi

$$\begin{array}{ll} & L_1 \succ L_2 \\ \text{sse} & EU(L_1) \geq EU(L_2) \\ \text{sse} & EU([10, 0.9; 0, 0.1]) \geq EU([10, 0.6; 0, 0.4]) \\ \text{sse} & \sum_{x_i \in L_1} p(x_i)U(x_i) \geq \sum_{x_i \in L_2} p(x_i)U(x_i) \\ \text{sse} & (10 \times 0.9 + 0 \times 0.1) \geq (10 \times 0.6 + 0 \times 0.4) \end{array}$$

In particolare si fanno degli aggiustamenti se due lotterie non hanno gli stessi risultati.

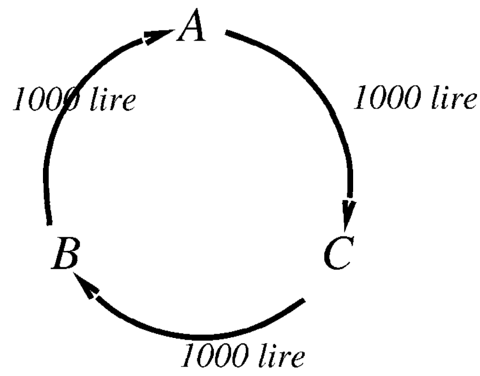
Le preferenze sono razionali

Immaginiamo un agente che non accetta l'assioma della transitivita'. Vediamo che e' naturalmente portato a perdere soldi.

Se $B \succ C$, allora l'agente che possiede C e' disposto a pagare per esempio 1000 lire per ottenere B.

Se $A \succ B$, l'agente che ha B e' disposto a pagare 1000 lire per ottenere A.

Se $C \succ A$, allora l'agente che ha A e' disposto a pagare 1000 lire per ottenere C.



Preferenze razionali implicano un comportamento razionale che si puo' descrivere in termini di massimizzazione dell' utilita' aspettata.

Violare questi assiomi porta inevitabilmente ad un comportamento irrazionale.

Non siamo sempre razionali

$L_1 = [0.8, 4000; 0.2, 0] \quad L_2 = [1, 3000; 0, 0]$

Secondo la funzione di utilità $U(x) = x$, e l'utilità attesa, la preferenza razionale è:

$$\begin{aligned} L_1 \succ L_2 & \equiv 0.8 \times 4000 + 0.2 \times 0 \geq 1 \times 3000 + 0 \times 0 \\ & \equiv 3200 \geq 3000 \end{aligned}$$

Tuttavia la maggior parte delle persone preferisce L_2.

Basi della scelta

Data la sostituibilità di un esito con una lotteria, chiamiamo genericamente un esito stato.

Esempio:

Sia s_0 il peggior stato possibile e s_1 il miglior stato possibile. Sia s lo stato attuale dell'agente. Su quale base l'agente puo' decidere tra s e la lotteria $L = \langle p, s_1, s_0 \rangle$?

- $s \neq s_0$: l'agente dovrebbe razionalmente scegliere s rispetto a $L = \langle p, s_1, s_0 \rangle$ se $p(s_1) = 0$. Se $s = s_0$, l'agente è già nel peggior stato: gli basta $p > 0$ per cambiare stato e, quindi, se $p > 0$ deve preferire L.
- $s \neq s_1$, l'agente dovrebbe razionalmente scegliere $L = \langle p, s_1, s_0 \rangle$ se $p > 0$. Se $s = s_1$, l'agente è nel migliore stato: gli basta $p < 1$ per cambiare stato e, quindi, non sceglie L.

Calcolo dell'utilità

L'esito di un'azione ha utilità u se l'agente è indifferente tra tale esito e la lotteria L da cui riceve il miglior esito con probabilità u e il peggior esito con probabilità $1 - u$.

Supponiamo che un agente sia indifferente tra
α_0 e $L_0 = \langle p_0, s_0, s_1 \rangle$ e tra
α_1 e $L_1 = \langle p_1, s_0, s_1 \rangle$.

Se consideriamo la lotteria $L = \langle p, \alpha_0, \alpha_1 \rangle$, ci aspettiamo che l'agente sia indifferente tra L e la lotteria L' che otteniamo per sostituzione, ovvero:

$$\langle p, \langle p_0, s_0, s_1 \rangle, \langle p_1, s_0, s_1 \rangle \rangle$$

In L' ci aspettiamo di ottenere s_0 con esito

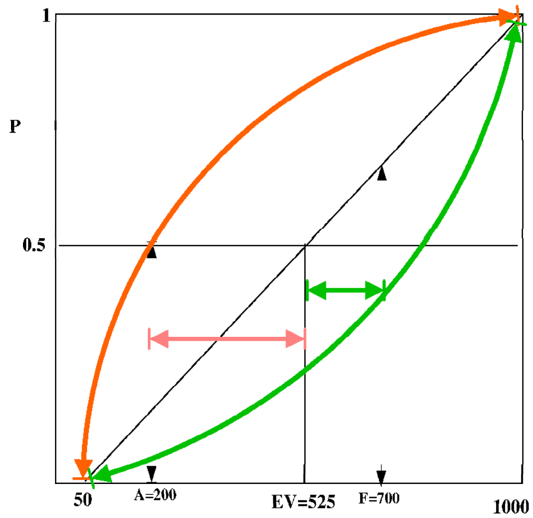
$$p' = p \times p_0 + (1 - p) \times p_1 \text{ e } s_1 = (1 - p')$$

L' e' uguale a $\langle p_0 \times p + (1 - p) \times p_1, s_0, s_1 \rangle$

Avversione e propensione al rischio

Sulla retta del valore atteso $EV(x) = \sum_i p(x_i)x_i$, quantizziamo la propensione al rischio e la avversione al rischio.

Es. Una lotteria $L = \langle 0.5, 1000; 0.5, 50 \rangle$, $EV = 525$. La curva dell'utilità è determinata dalla propensione/avversione al rischio. Quanto si è disposti a pagare per una lotteria il cui valore monetario è EV.



$EV = 525,\ sia\ U = 350\ allora$
$0.5\ 350 + 0.2\ 50 = 200\ quindi EU = 200.$

Il massimo che si è disposti a pagare sulla base della corrente avversione al rischio, per partecipare ad una lotteria con valore atteso 525 è 200. Il premio è 325.

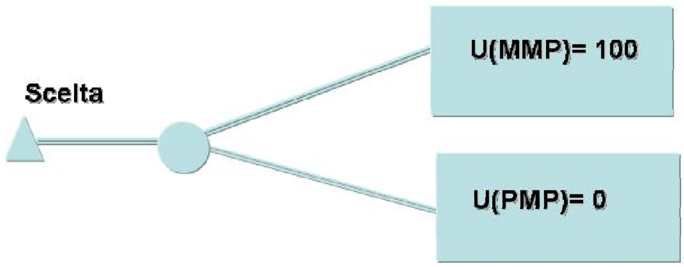
Esperimento di $M\&N$

Definiamo la lotteria standard come la lotteria

$L_0 = [p, MMP; (1-p), PMP]$ con $p = 0.5$.

dove MMP e PMP sono il massimo guadagno e la peggior perdita, fissiamo:

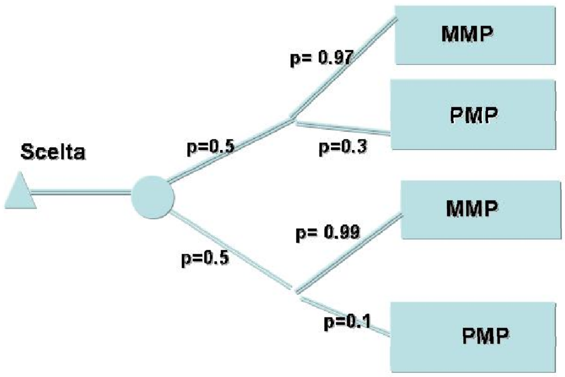
$U(MMP) = 100$ e $U(PMP) = 0$, con $EU = 50$



Sia data una lotteria $L = [p, 3000; (1-p), -100]$ l'esperimento di Morgenstern consiste nel determinare l'utilità di L modificando la probabilità p in L_0 fintanto che è indifferente scegliere tra L ed L_0.

Esperimento di $M\&N$

Es. Si rinuncia a 3000 (certi) per $p(MMP) = 0.97$ e piuttosto che perdere 100 (per certo) si partecipa ad L_0 per $p(PMP) = 0.1$. Otteniamo la lotteria composta come segue:



Calcolando la combinazione delle lotterie otteniamo:

$p(L) = 0.5 \times 0.97 + 0.5 \times 0.99 = 0.98$ e quindi

$$L = [0.98, 3000; 0.2, -100] \sim$$
$$L_0 = [0.5, [0.97, 3000; 0.3, 100]; 0.5[0.99, 3000; 0.1, 100]]$$

Scale di utilita'

Utilita' normalizzate: $u_\top = 1.0$, $u_\perp = 0.0$ I valori intermedi sono assestati stabilendo una preferenza tra l'esito s e la lotteria standard $\langle p, u_\top, u_\perp \rangle$

Micromorti: Una possibilita' su un milione di morte istantanea

Es. le micromorti valgono 20 dollari ma poiche' le funzioni di utilita' non sono lineari cio' non significa che qualcuno sarebbe disposto ad uccidersi per 20 milioni di dollari.

Per esempio la roulette Russa: quanto sei disposto a pagare per ridurre il rischio.

QALYs: quality-adjusted life years = un anno di vita in buona salute

Aspettativa di vita $\times$ qualità dei rimanenti anni.

In genere utilizzate in medicina per prendere decisioni che comportano un notevole rischio.

Alberi di decisione

Sono formate dai seguenti nodi:

Eventi Disegnati come ovali, indicano come nelle BN gli eventi, e hanno associate le tabelle di PC.

Nodi di decisione Disegnati come triangoli indicano le variabili di decisione. Archi che terminano sui nodi di decisione indicano l'informazione che verrà sfruttata al momento di prendere una decisione.

Nodi d'utilità Disegnati come rettangoli. Rappresentano l'utilità. Sono i nodi terminali. Gli archi che terminano su un nodo di utilità indicano gli attributi da cui l'utilità dipende.

Alberi di decisione

Algoritmo:

Per ciascun valore nei nodi di decisione

calcola il valore atteso del nodo utilità, data la decisione

Restituisci il MEU.

Il valore dell'Informazione

Supponiamo di avere contattato uno sponsor per partecipare alla rescue e dobbiamo quantizzare i vantaggi nel caso di vittoria. Proponiamo al nostro (presunto) sponsor una tavola di payoff.

A= Robot solo

B= Team di Robot

Tavola del Payoff

	$Pr(G) = 0.7$	$Pr(RA) = 0.3$	VP
Stati di Natura	Gialla	Rossa o Arancione	
Azioni			
A	60.000	20.000	48.000
B	100.000	-40.000	58.000

Lo sponsor ci dice che ci darà un congruo finanziamento dopo che avremo vinto. Possiamo vincere se sappiamo come sarà l'arena al momento della gara. Quanto siamo disposti noi ad investire sull'informazione?

Il valore dell'Informazione

Informazione perfetta

EVP (con informazione perfetta)	(0.7 x 100,000) + (0.3 x 20,000)	76.000
EV		58.000
EVPI		18.000

EVPI è il massimo ammontare che si è disposti a pagare per ottenere l'informazione che restituisce il segnale perfetto sullo stato di natura.

Informazione imperfetta o campionaria L'informazione campionaria è quella che si riesce ad ottenere da sorgenti incerte. Vogliamo valutare quanto si è disposti a pagare tale informazione, sulla base della sua attendibilità.

Sia S_1 la sorgente di informazione relativa all'arena gialla.

Sia S_2 la sorgente di informazione relativa alle arene arancione o rossa.

Supponiamo che tale sorgente sia corretta nel 90% dei casi. Le probabilità condizionate, dato lo stato di natura sono:

$$Pr(S1|G) = 0.9$$
$$Pr(S2|G) = 0.1$$
$$Pr(S1|RA) = 0.1$$
$$Pr(S2|RA) = 0.9$$

Il valore dell'Informazione

Le probabilità congiunte sono:

$$Pr(S1|G)Pr(G) = 0.9 \times 0.7 = 0.63$$
$$Pr(S2|G)Pr(G) = 0.1 \times 0.7 = 0.07$$
$$Pr(S1|RA)Pr(RA) = 0.1 \times 0.3 = 0.03$$
$$Pr(S2|RA)Pr(RA) = 0.9 \times 0.3 = 0.27$$

Usando la rule of average otteniamo:

$$Pr(S1) = 0.63 + 0.03 = 0.66$$
$$Pr(S2) = 0.07 + 0.27 = 0.34$$

Utilizzando Bayes otteniamo le probabilità a posteriori:

$$Pr(G|S1) = 0.63/0.66 = 0.955$$
$$Pr(RA|S1) = 0.03/0.66 = 0.045$$
$$Pr(G|S2) = 0.07/0.34 = 0.206$$
$$Pr(RA|S2) = 0.27/0.34 = 0.794$$

Per determinare il valore dell'informazione campionaria, costruiamo la tavola dei payoff per ciascuna sorgente, utilizzando le probabilità a posteriori.

Il valore dell'Informazione

Se abbiamo l'informazione dalla sorgente S_1 la tavola di payoff è::

	Pr(G) $=$ 0.995	Pr(RA) $=$ 0.045	VP
Stati di Natura	Gialla	Rossa o Arancione	
Azioni			
A	60.000	20.000	58.200
B	100.000	-40.000	93.700

Con l'informazione ottenuta dalla sorgente S_1 la migliore alternativa è il metodo B. Ricordiamoci che la probabilità di S_1 è uguale a 0.66.

Ottenendo l'informazione dalla sorgente S2 allora la tavola di payoff è:

	$Pr(G \mid S_2) = 0.206$	$Pr(RA \mid S_2) = 0.794$	VP
Stati di Natura	Gialla	Rossa o Arancione	
Azioni			
A	60.000	20.000	28.240
B	100.000	-40.000	-11.160

Con l'informazione dalla sorgente S_2 la migliore alternativa è il metodo A. La probabilità di S_2 è 0.34.

Il valore dell'Informazione

Il valore atteso con l'informazione addizionale (campionaria) è, quindi:

$(0.66 \times 93.700) + (0.34 \times 28.240)$	71. 444
Il valore atteso con l'informazione corrente è	58.000
Il valore atteso dell'informazione è:	13.444

I passi che abbiamo eseguito

- Abbiamo calcolato la tavola del payoff.
- Abbiamo calcolato, sulla base delle probabilità degli stati del mondo e delle probabilità condizionate, relativi alle sorgenti dell'informazione campionaria, le probabilità:

  $$P(Informazione_i \mid StatoDiNatura_j)$$

  questa informazione suggerisce, dato un determinato stato di natura, quale alternativa seguire.
- Usando la rule of average abbiamo calcolato la probabilità dell'informazione:

  $$P(Informazione_i) = \sum_j P(Informazione_i \mid StatoDiNatura_j) P(StatoDiNatura_j)$$

  Questa equazione fornisce l'attendibilità dell'informazione, indipendentemente dallo stato di natura corrente.

Il valore dell'informazione

- Usando la regola di Bayes, abbiamo calcolato la probabilità a posteriori:

$$P(StatoDiNatura_i \mid Informazione_j) = \frac{P(Informazione_j \mid StatoDiNatura_i) \times P(StatoDiNatura_i)}{\sum_j P(Informazione_i \mid StatoDiNatura_j)}$$

- Infine abbiamo costruito le tavola dei payoff usando la probabilità a posteriori.

- Sottraendo a questo valore il massimo valore ottenibile senza informazione, ricaviamo il valore atteso dell'informazione campionaria. Abbiamo così calcolato EVC, cioè il valore atteso, data l'informazione campionaria, (EVSI expected value of sample information).

La formula generale per IP

Sia E la nostra conoscenza a priori del dominio di interesse. Sia α l'azione corrente con s_i lo stato di natura, e sia E_j l'eventuale nuova conoscenza:

$$EU(\alpha|E) = \max_a \sum_i U(s_i)\ P(s_i|E, a)$$

Supponiamo di essere a conoscenza di $E_j = e_{jk}$, quindi sceglieremmo $\alpha_{e_{jk}}$ in modo tale che:

$$EU(\alpha_{e_{jk}}|E, E_j = e_{jk}) = \max_a \sum_i U(s_i)\ P(s_i|E, a, E_j = e_{jk})$$

E_j è una variabile aleatoria il cui valore è attualmente ignoto. Ciò implica che dobbiamo calcolare il guadagno atteso in relazione a tutti i possibili valori.

$$VPI_E(E_j) = \left(\sum_k P(E_j = e_{jk}|E) EU(\alpha_{e_{jk}}|E, E_j = e_{jk})\right) - EU(\alpha|E)$$

(VPI = Valore dell-informazione perfetta)

Proprietà di VEPI

Non negativa— SPERANZA,

$$\forall\, j, E \;\; VPI_E(E_j) \geq 0$$

Nonadditiva— per esempio vogliamo ottenere E_j due volte

$$VPI_E(E_j, E_k) \neq VPI_E(E_j) + VPI_E(E_k)$$

Indipendente dall'ordine

$$VPI_E(E_j, E_k) = VPI_E(E_j) + VPI_{E,E_j}(E_k) = VPI_E(E_k) + VPI_{E,E_k}(E_j)$$

L'aquisizione di "certezza" è un problema di decisione sequenziale.

Decisioni in presenza di incertezza

Diverse metodologie affrontano la soluzione di un problema di decisione in cui la distribuzione di probabilità sugli stati non è nota.

1. Il criterio del MinMax, seleziona prima lo stato di natura con minima utilità e poi sceglie quello con massima utilità.
2. Il criterio del MaxMax, seleziona sia prima che dopo lo stato di natura massimale.
3. Il criterio di Laplace, introduce una funzione equiprobabile e sceglie il valore massimale.

Ci sono inoltre metodi che assumono che la distribuzione di probabilità segua un modello, ad esempio sia una distribuzione normale e su quella base possono anche introdurre sia la regola Bayesiana che il Maximum Likelihood.

Decisioni in presenza di incertezza

Decisioni del Governo(X) di investire in tre settori portanti dell'economia, gli stati di natura, che sono: **Ricerca**, **Formazione** e **Spettacolo**. Ciascuna azione G_i è una possibile finanziaria.

Consideriamo la tavola di payoff:

	Stati di Natura (utilità)					
Azioni				MaxMax	MinMax	Laplace
G1	100	240	380	**380**	100	239.98
G2	120	260	350	350	120	243.3
G3	230	200	300	300	**200**	243.3
G4	190	250	300	300	190	**246.6**
P(Laplace)	0.33	0.33	0.33			

Non ci devono essere condizioni di dominanza, singolarità della matrice.

FINE QUI