Esame di FONDAMENTI di AUTOMATICA
(Nuovo ordinamento)
8 Luglio 2002
(Bozza di soluzione)

NB. Si riportano a grandi linee alcune soluzioni degli esercizi proposti all'esame. Lo svolgimento della prova scritta deve essere più chiara di quanto qui rapidamente accennato.

1) Il polinomio caratteristico di A è pari a

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\left\{\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}\right\} = \lambda(\lambda+1)$$

e quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$. Si noti che tale calcolo in realtà non è necessario in quanto la A ha una struttura triangolare inferiore (e quindi gli autovalori coincidono con i termini sulla diagonale). I modi naturali sono $e^{\lambda_1 t} = e^{0t} = 1$ e $e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$. Un autovalore è reale negativo mentre l'altro è a parte reale nulla ($\lambda_1 = 0$) con molteplicità algebrica unitaria (ed essendo $0 < m_g \leq m_{alg} = 1$ si ha anche $m_g = 0$); il sistema è quindi stabile semplicemente. Il regime permanente, non essendo il sistema stabile asintoticamente non esiste. In particolare dipenderà dallo stato iniziale.

La funzione di trasferimento è uguale a

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s(s+1)}$$

La risposta forzata è data da

$$y_f(s) = P(s)u(s) = \frac{-2}{s^2(s+1)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s} + \frac{R_3}{s^2}$$

con $R_1 = -2$, $R_2 = 2$ e $R_3 = -2$. Il calcolo dall'antitrasformata è immediato

$$y_f(t) = R_1 e^{-t}\delta_{-1}(t) + R_2\delta_{-1}(t) + R_3 t\delta_{-1}(t)$$

Chiudendo $P(s)$ in controreazione unitaria si nota immediatamente la presenza del polo nell'origine in catena diretta $\Rightarrow$ sistema di controllo di Tipo 1 (errore a regime permanente nullo, se esiste il regime, in corrispondenza ad un ingresso di riferimento a gradino; errore finito $1/K_p = 1$ diverso da zero per riferimento a rampa unitaria). Si ha anche astatismo rispetto ad un eventuale disturbo costante non noto in uscita al processo. Il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente in quanto la fase è sempre maggiore o uguale a $-\pi$ (in modo approssimato la fase diventa $-\pi$ una decade dopo la pulsazione di rottura – 1rad/sec – del fattore binomio a denominatore) e la pulsazione di attraversamento sarà evidentemente vicina a 1rad/sec (e quindi margine di fase positivo pari a circa 45°, criterio di stabilità di Bode). Pertanto esiste il regime permanente.

2) Vedi teoria.

3) Il sistema ad anello chiuso è caratterizzato dalla funzione di trasferimento riferimento/uscita

$$W(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{K}{s+1+K} = \frac{K}{1+K}\left(\frac{1}{1+\frac{s}{1+K}}\right)$$

Dalla definizione di banda passante (caso semplice di sistema caratterizzato da un guadagno e un fattore binomio a denominatore, banda passante coincidente con la pulsazione di rottura) si ha

$$B_3 = 1 + K \ \text{rad/sec}$$

Per $K > 0$ il sistema di controllo

- è stabile asintoticamente (basta $K > -1$);

- è di tipo 0 (assenza di poli in $s = 0$ in catena diretta), con errore finito a regime permanente per $r(t) = \delta_{-1}(t)$ pari a $e_0 = 1/(1 + K_p)$. Quindi all'aumentare di K l'errore e_0 diminuisce (e quindi l'uscita a regime permanente della risposta indiciale tende sempre di più a 1). Alla stessa conclusione si poteva direttamente arrivare notando che l'uscita a regime permanente nella risposta indiciale tende al guadagno di $W(s)$ e cioè a $K/(1 + K)$ (il quale tende a 1 per $K \to \infty$).
- All'aumentare di K aumenta la banda passante del sistema di controllo e di conseguenza diminuisce il tempo di salita nella risposta indiciale.
- Essendo il sistema di controllo del primo ordine – un solo polo – (e strettamente proprio) non ci sarà sovraelongazione nella risposta indiciale.

4) Il processo è caratterizzato da un guadagno (positivo) $K_p = 5$ ed è privo di poli in $s = 0$. Le specifiche richiedono:

- Presenza di un polo in $s = 0$ nel controllore $C(s)$ per garantire l'astatismo.
- Sistema di controllo di tipo 1 (già garantito dalla presenza del polo in $s = 0$ introdotto per la specifica sull'astatismo) con guadagno opportuno. Per ottenere $|e_1| = 1/|K_cK_p| \leq 0.1$ il guadagno del controllore deve soddisfare $|K_c| \geq 2$. Scelgo $K_c = 2$ essendo il guadagno del processo positivo.
- Dal tracciamento dei diagrammi di Bode di

  $$\frac{2}{s}P(s) = \frac{10}{s}\frac{1}{(1 + 10s)}$$

  noto che in $\omega_t^* = 10$rad/sec ho un modulo pari a -40dB e una fase pari a $-\pi$ circa. Devo anticipare di almeno 30° e amplificare di esattamente 40dB. Incominciando dall'anticipo di fase ottenibile da una funzione anticipatrice, scegliendo ad esempio $m_a = 6$, si nota che non devo preoccuparmi troppo dell'amplificazione introdotta dalla funzione anticipatrice in questa particolare situazione. Un caso generico è riportato in Fig.1. Potrei pensare di scegliere la pulsazione normalizzata $\omega\tau = 0.8$ oppure, a destra della "campana" della fase della funzione anticipatrice, $\omega\tau = 7$ con anticipi leggermente maggiori di quello richiesto. A prima vista sembrerebbe più opportuno scegliere $\omega\tau = 7$ in quanto mi fornisce contemporaneamente un'amplificazione di circa 13dB (maggiore di quella fornita a $\omega\tau = 0.8$). Tuttavia, con tale scelta, una successiva leggera variazione (in particolare aumento) della pulsazione di attraversamento rispetto al valore desiderato (ad esempio se i parametri del processo sono leggermente diversi da quelli nominali rispetto ai quali stiamo effettuando le scelte di progetto) potrebbe portare ad un reale margine di fase inferiore rispetto a quello richiesto. Questo perché di solito la fase del processo modificato (parte necessaria del controllore per il soddisfacimento delle specifiche a regime più il processo) decresce all'aumentare della pulsazione. Posizionandoci a destra della "campana" della funzione anticipatrice (fase), a destra della pulsazione normalizzata prescelta si ha un anticipo minore di quello richiesto, sommato alla fase decrescente del processo modificato, porta, per pulsazioni maggiori rispetto alla pulsazione di attraversamento desiderata nominale, ad un margine di fase minore. Ciò non accade scegliendo la pulsazione normalizzata a sinistra della campana. Tale situazione per un caso generico è riportata in Fig.2.

  Sulla base di queste considerazioni, scelgo $\omega\tau = 0.8$ (con conseguente amplificazione di 2.5dB circa). Per ottenere tale effetto in $\omega_t^* = 10$rad/sec deve essere $\omega_t^*\tau_a = 0.8$ da cui $\tau_a = 0.8/10$. Per ottenere come pulsazione di attraversamento $\omega_t^* = 10$rad/sec devo ancora amplificare di 40-2.5 = 37.5dB. Ottengo tale effetto con un guadagno K_{c2} aggiuntivo, maggiore di 1 (maggiore di 0 in dB), nel controllore scelto in modo tale che $K_{c2}|_{dB} = 37.5$dB (e cioè $K_{c2} = 75$ circa). L'aggiunta di un tale guadagno nel controllore è lecita in quanto non altera il soddisfacimento dello specifiche di regime permanente (anzi le migliora).

Il controllore è quindi dato da

$$C(s) = K_cK_{c2}R_a(s) = K_cK_{c2}\left(\frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a}s}\right)$$

Si noti che si poteva anche ottenere un cospicuo aumento della fase con la semplice aggiunta di uno zero a parte reale negativa nel controllore (fattore binomio con costante di tempo positiva). Ciò è possibile in quanto il controllore ha già un polo (in $s = 0$ derivante dalle specifiche di regime permanente) e quindi risulterà proprio. Si deve sempre verificare che il controllore ottenuto sia fisicamente realizzabile (caratterizzato da una funzione di trasferimento al più propria). Scegliendo ad esempio lo zero in -10 si ottiene un anticipo di fase di 45° ed un'amplificazione di esattamente 3 dB. Per ottenere la pulsazione

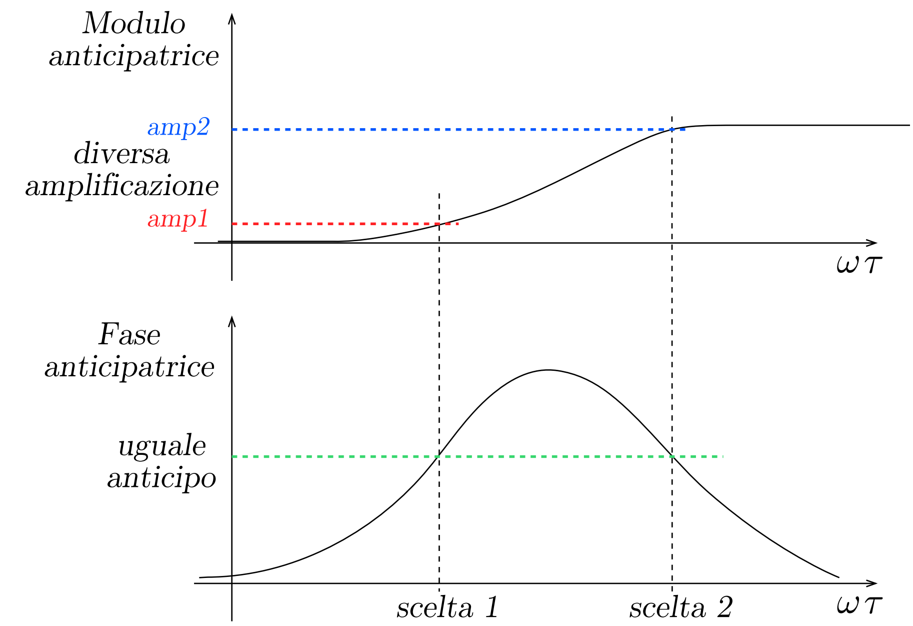

Figure 1: A parità di contributo in fase, due possibili scelte della pulsazione normalizzata $\omega\tau$

di attraversamento desiderata si deve ancora amplificare di 37dB con un semplice guadagno (pari a $K_{c2bis} = 70.8$ circa). Il controllore alternativo è quindi dato da

$$C_{bis} = K_c K_{c2bis} \frac{(1+0.1s)}{s}$$

In un progetto reale si preferisce il primo controllore in quanto è strettamente proprio e dà luogo ad un minore sforzo della variabile di controllo (rispetto ad un controllore proprio).

Il diagramma di Nyquist esatto con $C(s)$ (senza la chiusura all'infinito) è riportato in Fig.3. Un tracciamento approssimato deve mettere in evidenza il margine di fase ottenuto e la chiusura all'infinito.

5) (Leggermente fuori programma per l'A.A. 2004–2005). La funzione di trasferimento del disturbo (in uscita)/uscita controllata è, per un generico sistema di controllo a controreazione unitaria con controllore e processo in catena diretta $F(s) = C(s)P(s)$, data da

$$W_d(s) = \frac{1}{1+C(s)P(s)}$$

A regime permanente, nell'ipotesi di stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso e quindi anche della $W_d(s)$, un disturbo $d(t) = \sin\bar{\omega}t$ con $\bar{\omega} \in [\omega_1, \omega_2]$ influenza l'uscita secondo la seguente relazione

$$y_{d,RP}(t) = |W_d(j\bar{\omega})|\, sin\,(\bar{\omega}t + \angle W_d(j\bar{\omega}))$$

Per ottenere un effetto del disturbo limitato $|y_{d,RP}(t)| \leq \alpha$ deve essere $|W_d(j\bar{\omega})| \leq \alpha$ e cioè

$$\left|\frac{1}{1+C(j\bar{\omega})P(j\bar{\omega})}\right| \leq \alpha, \quad \Leftrightarrow \quad |1+C(j\bar{\omega})P(j\bar{\omega})| \geq \frac{1}{\alpha}$$

Tale condizione non può essere usata direttamente per individuare delle condizioni sul controllore (ci dice comunque che il modulo $|C(j\bar{\omega})P(j\bar{\omega})|$ deve essere sufficientemente elevato). Si sfrutta la seguente maggiorazione

$$|1+F(j\bar{\omega})| \geq |F(j\bar{\omega})| - 1$$

non banale nel caso $|F(j\bar{\omega})| = |C(j\bar{\omega})P(j\bar{\omega})| > 1$ e cioè per pulsazioni maggiori della pulsazione di attraversamento. Se si impone

$$|F(j\bar{\omega})| - 1 \geq \frac{1}{\alpha}$$

è necessariamente soddisfatta la specifica richiesta

$$|1+C(j\bar{\omega})P(j\bar{\omega})| = |1+F(j\bar{\omega})| \geq |F(j\bar{\omega})| - 1 \geq \frac{1}{\alpha}$$

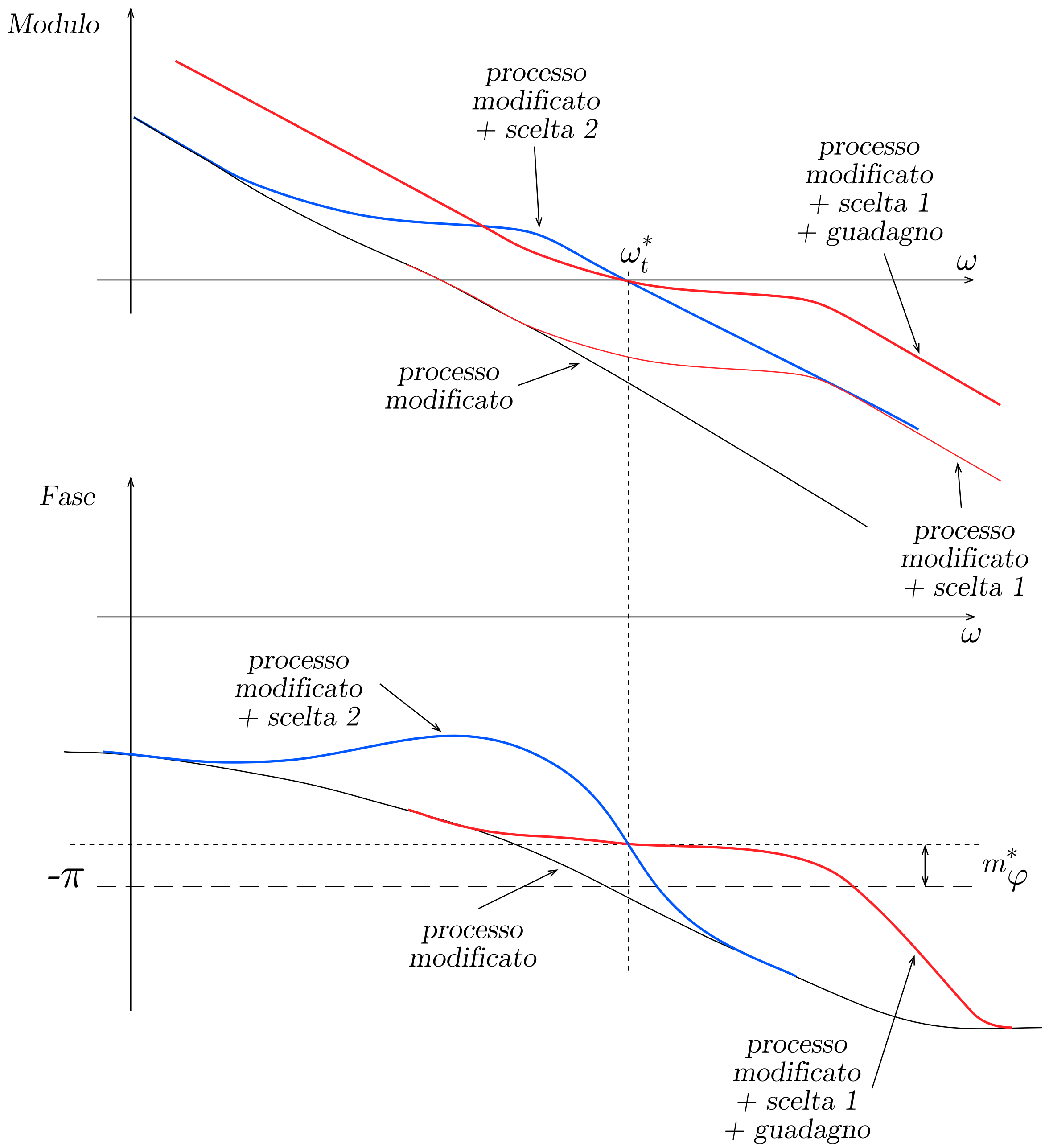

Figure 2: Effetto delle due diverse scelte per un caso generico

Si è quindi ottenuto una specifica sul sistema in catena diretta

$$|F(j\bar{\omega})| = |C(j\bar{\omega})P(j\bar{\omega})| \geq 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad \text{per} \quad \bar{\omega} \in [\omega_1, \omega_2]$$

Per ottenere una certa attenuazione di un segnale di disturbo in uscita sinusoidale in un certo campo di pulsazioni, il modulo della risposta armonica del sistema in catena diretta deve essere sufficientemente elevato. Si noti che la quantità $1 + 1/\alpha$ è sicuramente maggiore di 1 (coerentemente con la maggiorazione utilizzata).

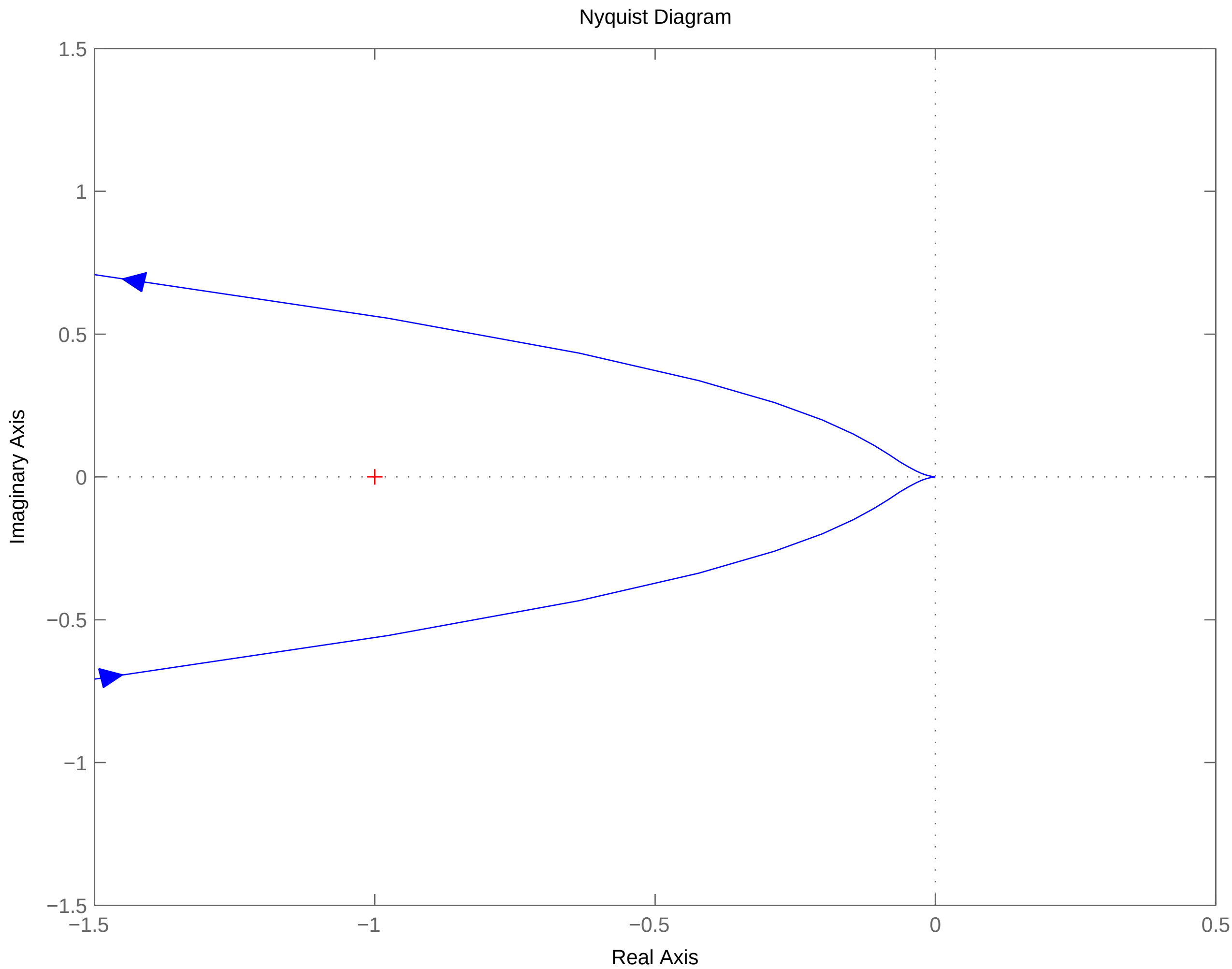

Figure 3: Dettaglio del diagramma di Nyquist